МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТОМ 2, ВЫПУСК 4, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ Том 2, выпуск 4

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 4

2010

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО
издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН,
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru url: http://mgta.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 2
Выпуск 4

Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 31.12.10.
Формат 70x108$^{1}/_{16}$. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,0. Усл. печ. л. 9,8. Тираж 300 экз.
Изд. № 174. Заказ 931.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 4

2010

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Журнал «МТИ&П» публикует статьи, касающиеся теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления для решения прикладных задач в экономике, экологии, политике и менеджменте. Теоретико-игровой подход обладает обширным потенциалом в социальных, экономических и политических задачах. С другой стороны сама теория игр может быть обогащена исследованиями реальных проблем принятия решений.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал «МТИ&П» принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Учредители журнала:
Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН

Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Редакция журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru
url: http://mgta.krc.karelia.ru

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 3–24

УДК 517.977.8+519.834
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ*

Маргарита А. Гладкова
Николай А. Зенкевич
Высшая школа менеджмента
Санкт-Петербургский государственный университет
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 3б
e-mail: gladkova@gsom.pu.ru, zenkevich@gsom.pu.ru

В работе построена и исследована теоретико-игровая модель управления качеством продукции в условиях конкуренции. Данная модель представляет собой двухшаговую игру фирм-производителей при неравномерном распределении склонности к качеству потребителей. В явном виде построено сильное равновесие в исследуемой модели, что позволило найти равновесные цены, доли рынка и доходы фирм-производителей. Практическое применение механизма управления качеством апробировано на примере анализа эмпирических данных для двух систем Интернет-трейдинга.

Ключевые слова: оценка качества, измерение качества, склонность к качеству потребителя, управление качеством, двухшаговая игра, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, парето-оптимальное решение, оптимальная дифференциация по качеству, показатель удовлетворенности потребителя.

---

* Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-1-00301-а).

1. Введение

В статье рассматриваются вопросы, связанные с количественной оценкой и разработкой механизма управления качеством производимой продукции и оказываемых услуг в условиях конкуренции. Под управлением качеством здесь понимается целенаправленное изменение его количественной оценки.

Основная теоретическая задача проведенного исследования заключается в разработке механизма управления качеством на основе построения и нахождения решения адекватной теоретико-игровой модели конкуренции фирм -производителей с учетом информации о качественных предпочтениях потребителей. С практической точки зрения интерес представлял вопрос методики измерения количественной оценки качества.

Для количественной оценки качества товара на основании мнений потребителей о его характеристиках будем оценивать качество товара как системы в целом. Поэтому в расчетах на основании эмпирических данных вычисление качества товара было сведено к некоторому единому сводному показателю, позволяющему оценивать степень удовлетворенности потребителем товаром в целом. Для этого использована методика [3], которая позволила получить сводную оценку качества исследуемого товара на основе экспертных данных, полученных от потребителей.

Для оценки предпочтительного качества товара в условиях конкуренции построена теоретико-игровая модель, которая позволяет проанализировать процесс принятия решения по производству товаров необходимого качества в условиях рыночной конкуренции.

Представленная теоретико-игровая модель является развитием работ Бенасси и Мотта, которые рассматривали модели дуополии в условиях вертикальной дифференциации по качеству товаров. Так в работе [9] проанализированы два вида моделей вертикальной дифференциации продуктов в целях изучения влияния конкуренции по цене и количеству на вид равновесия по Нэшу. Модели различаются видом функции затрат относительно качества продукции. В одном случае они постоянные, а в другом – переменные. Установлено, что оптимальная дифференциация товаров увеличивается в обоих рассмотренных случаях по сравнению с более ранними результатами при симметричном выборе качества. Авторами показано, что дифференциация фирм больше в случае конкуренции по Бертрану, чем по Курно.

В данной статье модель [9] была доработана на случай, когда рынок непокрыт, и параметр склонности к качеству распределен неравномерно (треугольное распределение). Другая модификация модели [9] была исследована авторами в работе [1].

В работе [6] исследована дуополия в условиях вертикальной дифференциации в случае непокрытого рынка. Авторы анализируют влияние концентрации потребителей в отношении склонности к приобретению более качественных товаров на поведение фирм.

В статье [10] исследованы теоретико-игровые модели дуополии и вертикальной дифференциации для случая последовательного выбора качеств производимых товаров компаниями-конкурентами (модель Штакельберга). При этом авторы ограничиваются рассмотрением случая покрытого рынка. Подобная проблематика одновременного и последовательного выбора исследована в работе [5].

В теоретическом плане основными вопросами исследования являлись нахождение равновесия по качеству товаров и оптимальной дифференциации по качеству в условиях конкуренции. С этой целью была разработана теоретико-игровая модель дуополии, в основе которой лежат модели [9,11], а также их развитие в работе [7].

2. Теоретико-игровая модель конкуренции по качеству

В работе рассматривается двухшаговая теоретико-игровая модель, когда фирмы на первом шаге конкурируют по качеству производимого товара, а затем по ценам при известных качествах продукции. При этом предполагается, что на каждом шаге фирмы реализуют свои решения одновременно.

Пусть две фирмы (игроки 1 и 2, соответственно) на некотором рынке предлагают потенциальным потребителям товары одинаковых потребительских свойств, но разного качества. Будем считать, что каждый потребитель имеет единичный спрос, но по-разному готов платить за качество товара. Предположим, что потребитель характеризуется параметром склонности к качеству $\theta \in [0, \overline{\theta}]$, который и определяет его готовность покупать товар известного качества. Тогда полезность потребителя со склонностью к качеству θ (потребитель θ)

при покупке товара качества s по цене p может быть представлена в виде:

$$U_\theta(p,s) = \begin{cases} \theta s - p, & p \le \theta s, \\ 0, & p > \theta s. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь θs – это максимальная цена потребителя θ, при которой он готов покупать товар качества s, т.е. ценность товара для потребителя θ.

Естественно предположить, что потребитель θ покупает товар качества s по цене p, если $U_\theta(p,s) > 0$, и не покупает товар в противном случае. Будем предполагать в модели, что параметр θ случайный и имеет треугольное распределение вида:

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \le 0, \\ \frac{4}{b^2}\theta & \text{при } \theta \in A = (0, \frac{b}{2}], \\ \frac{4}{b} - \frac{4}{b^2}\theta & \text{при } \theta \in B = (\frac{b}{2}, b], \\ 0 & \text{при } \theta > b. \end{cases}$$

Тогда функция распределения параметра θ примет вид:

$$F(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \le 0, \\ \frac{2}{b^2}\theta^2 & \text{при } \theta \in A = (0, \frac{b}{2}], \\ \frac{4}{b}\theta - \frac{2}{b^2}\theta^2 - 1 & \text{при } \theta \in B = (\frac{b}{2}, b], \\ 1 & \text{при } \theta > b. \end{cases}$$

Здесь параметр $b \in [0, \overline{\theta}]$ – крайняя точка носителя распределения. Заметим, что функция распределения является непрерывной, дифференцируемой и строго возрастает на промежутке $[0, b]$. На рис. 1 представлен график функции плотности распределения параметра склонности к качеству θ.

Потребитель θ безразличен к покупке товара качества s_1 при цене p_1 и отказу от покупки, если $\theta s_1 - p_1 = 0$. Поэтому величина $\theta_1 = \theta_1(p_1, s_1) = \frac{p_1}{s_1}$ характеризует такого потребителя.

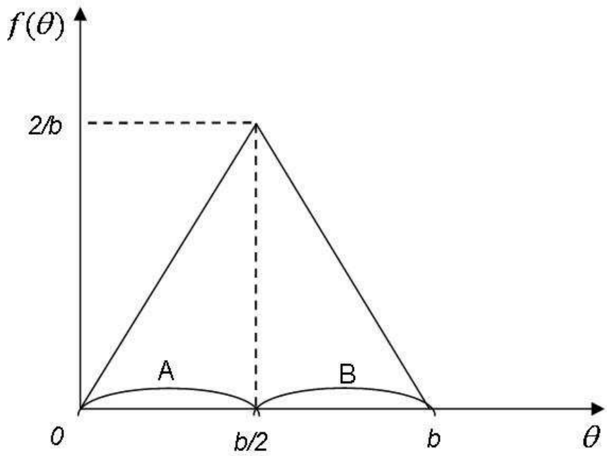

Рисунок 1. Плотность распределения $f(\theta)$.

Пусть фирма i производит товар качества s_i при удельных затратах c_i, и пусть для определенности $s_2 > s_1$, значения которых известны обеим фирмам и потребителям. Будем предполагать, что фирмы ведут ценовую конкуренцию по Бертрану. Обозначим через p_i цену, назначенную фирмой i за товар качества s_i.

Потребитель θ безразличен к покупке товаров качеств s_1, s_2 при ценах p_1, p_2 соответственно, где $s_1 \leq s_2$ и $p_1 \leq p_2$, если $\theta s_1 - p_1 = \theta s_2 - p_2$. Поэтому число $\theta_2 = \theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = \dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}$ характеризует такого потребителя.

Определим функции спроса $D_i(p_1, p_2, s_1, s_2)$ фирм 1 и 2, соответственно, в виде:

$$D_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = \int\limits_{\theta_1(p_1,s_1)}^{\theta_2(p_1,p_2,s_1,s_2)} f(\theta)d\theta = F(\theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2)) - F(\theta_1(p_1, s_1));$$

$$D_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = \int\limits_{\theta_2(p_1,p_2,s_1,s_2)}^{b} f(\theta)d\theta = 1 - F(\theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2)).$$

Выигрыш фирмы будем оценивать функцией дохода от продаж

$$R_i(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_i \cdot D_i(p_1, p_2, s_1, s_2), \tag{2.2}$$

где p_i – цена фирмы i за товар качества s_i.

Теоретико-игровая модель управления качеством представляет собой следующую двухшаговую игру двух лиц (фирм, игроков), где выборы на каждом шаге осуществляются одновременно. При этом:

- на первом шаге фирмы i выбирают качества s_i товаров;
- на втором шаге, в предположении, что качества s_i товаров известны игрокам и потребителям, фирмы продолжают конкуренцию по ценам p_i.

Решать данную игру будем методом обратной индукции. В этом случае равновесие по Нэшу строится в два этапа. На первом этапе в предположении, что качества товаров s_i известны, находим равновесные цены $p_i^*(s_1, s_2)$. Зная $p_i^*(s_1, s_2)$, на втором этапе находим равновесные по Нэшу значения качеств s_1^*, s_2^* фирм 1 и 2, соответственно.

В силу треугольного распределения параметра θ явный вид функций спроса будет различаться в зависимости от взаимного расположения параметров θ_1 и θ_2 на промежутке $[0, b]$. Теоретически возможны три случая:

1. $\theta_1, \theta_2 \in A$,
2. $\theta_1, \theta_2 \in B$,
3. $\theta_1 \in A, \theta_2 \in B$,

где области $A = [0, b/2]$, $B = (b/2, b]$ изображены на рис.1.

Для нахождения ценового равновесия воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Предположим, что некоторая вогнутая функция плотности $f(\theta)$, определенная на интервале $[0, b]$, где $b \geq 0,5$, симметрична относительно медианы распределения $b/2$ и удовлетворяет условиям $f(0) = f(b) = 0$ и $f(b/2) \geq 2$. Если $\theta_2^* > \theta_1^*$ значения параметров в ценовом равновесии в модели вертикальной дифференциации*[1]*, то θ_2^* единственно и $\theta_2^* < b/2$.*

---

[1]В вертикально дифференцированном пространстве продуктов все потребители согласны относительно наиболее предпочтительного набора характеристик товара. Качество явный тому пример.

Из теоремы 2.1 следует, что для нахождения ценового равновесия достаточно рассмотреть только один случай взаимного расположения параметров $\theta_1, \theta_2 \in A$ (см. рис. 1). Тогда функции спроса фирм 1 и 2, соответственно, примут вид:

$$D_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_1}{s_1}\right)^2;$$

$$D_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = 1 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2;$$

и функции выигрышей могут быть записаны в следующем виде:

$$R_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_1\left(\frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_1}{s_1}\right)^2\right);$$

$$R_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_2\left(1 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2\right).$$

Найдем ценовое равновесие p_1^*, p_2^* при заданных качествах товаров s_1 и s_2.

Значения p_1^*, p_2^* находим как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial p_1} = \dfrac{2}{b^2}\left(\left(\dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2 - 3\left(\dfrac{p_1}{s_1}\right)^2 - 2p_1\dfrac{(p_2 - p_1)}{(s_2 - s_1)^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial p_2} = 1 - \dfrac{6}{b^2}\left(\dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right) - \dfrac{4p_1}{b^2(s_2 - s_1)} = 0. \end{cases}$$

Для нахождения решения системы сделаем замену вида $p_2 = mp_1$, где коэффициент $m > 1$. Тогда первое уравнение преобразуется в квадратное уравнение относительно m следующего вида:

$$m^2 - 4m + 3 - 3\frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1^2} = 0.$$

Откуда, учитывая неравенство $m > 1$, получаем:

$$m = 2 + \sqrt{1 + 3\frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1^2}}. \tag{2.3}$$

Из системы уравнений получим ценовое равновесие по Нэшу

$$\begin{cases} p_1^*(s_1, s_2) = \dfrac{bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{m-3}{\sqrt{(3m-1)(m-3)}}, \\ \\ p_2^*(s_1, s_2) = \dfrac{bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{m(m-3)}{\sqrt{(3m-1)(m-3)}}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где m задается значением (2.3).

Теперь вычислим спрос фирм 1 и 2 и их выигрыши в равновесии как функции качеств соответственно

$$\begin{cases} D_1^*(s_1, s_2) = D_1^*(p_1^*(s_1, s_2), p_2^*(s_1, s_2), s_1, s_2) = \dfrac{2m}{3(3m-1)}, \\ \\ D_2^*(s_1, s_2) = D_2^*(p_1^*(s_1, s_2), p_2^*(s_1, s_2), s_1, s_2) = \dfrac{2m}{3m-1}, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} R_1^*(s_1,s_2)=R_1^*(p_1^*(s_1,s_2), p_2^*(s_1,s_2), s_1, s_2)=\dfrac{2bs_1}{3\sqrt{6}}\dfrac{m(m-3)}{\sqrt{(3m-1)^3(m-3)}}; \\ \\ R_2^*(s_1,s_2)=R_2^*(p_1^*(s_1,s_2), p_2^*(s_1,s_2), s_1, s_2)=\dfrac{2bs_1}{\sqrt{6}}\dfrac{m^2(m-3)}{\sqrt{(3m-1)^3(m-3)}}. \end{cases} \tag{2.6}$$

На втором этапе решения игры найдем равновесие по Нэшу по качествам $s_1, s_2 \in [\underline{s}, \overline{s}]$ относительно функций выигрыша R_1^*, R_2^*, где $\underline{s} < \overline{s}$ – заданные параметры.

Частная производная выигрыша R_2 фирмы 2 по s_2 равна

$$\frac{\partial R_2^*(s_1, s_2)}{\partial s_2} = \frac{b(s_2 - s_1)\sqrt{6}}{\sqrt{s_1^2 + 3(s_2 - s_1)^2}} \frac{m(3m^2 - 7m + 6)}{\sqrt{(3m-1)^5(m-3)}}.$$

Непосредственно проверяется, что в предположении $s_2 > s_1$ производная $\dfrac{\partial R_2^*(s_1, s_2)}{\partial s_2} > 0$, т.е. функция $R_2^*(s_1, s_2)$ строго возрастает по s_2. Поэтому равновесной стратегией фирмы 2 будет выбор максимально возможного значения, т.е. $s_2^* = \overline{s}$.

Для нахождения равновесного значения s_1 для фирмы 1 сделаем замену переменных $s_1^* = k\overline{s}$, где $0 < k < 1$ – неизвестный параметр. Тогда значение параметра k можно найти из условия

$$\frac{\partial R_1^*(k\overline{s}, \overline{s})}{\partial k} = 0. \tag{2.7}$$

.

Явный вид решения уравнения очень громоздкий, но при любом заданном числовом значении параметра b можно получить численное значение коэффициента k, используя программный пакет Maple.

Так, например, если диапазон распределения параметра θ равен $[0; 0,5]$, т.е. $b = 0,5$, решением уравнения (2.7) будет число $k = 0,6543$. В этом случае равновесие по Нэшу имеет вид:

$$\begin{cases} s_1^* = 0,6543\overline{s}, \\ s_2^* = \overline{s}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Подставляя это решение в формулу (2.3), получим численное значение коэффициента $m = 3,3555$.

В соответствии с формулами для равновесных цен (2.4), спроса (2.5) и выигрышей (2.6), можно выписать в явном виде окончательные выражения относительно параметров b и k для равновесных цен p_1^*, p_2^*, спроса D_1^*, D_2^* в равновесии и равновесных значений выигрышей R_1^*, R_2^*

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{kb\overline{s}}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k}}; \\[2em] p_2^* = \dfrac{b\overline{s}}{\sqrt{6}}\left(2k+\sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1^* = \dfrac{2\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+4k}{3(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k)}; \\[2em] D_2^* = \dfrac{2\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+4k}{3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1^* = \dfrac{2kb\overline{s}}{3\sqrt{6}}\left(2k+\sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{\left(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k\right)^3}}; \\[2em] R_2^* = \dfrac{2b\overline{s}}{\sqrt{6}}\left(2k+\sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)^2\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{\left(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k\right)^3}}. \end{cases}$$

Заметим, что фирма 2, производящая продукцию более высокого качества s_2, получает в равновесии больший доход, чем фирма 1, поскольку

$$R_2^* - R_1^* = \frac{2b\overline{s}}{\sqrt{6}}\left(2k + \sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{\left(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k\right)^3}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{5k}{3} + \sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right) > 0.$$

Отметим, что по построению в данной модели имеется два асимметричных равновесия по Нэшу $(k\overline{s}, \overline{s})$ и $(\overline{s}, k\overline{s})$, выгодные, соответственно, игрокам 2 и 1. Нетрудно заметить, что оба равновесия при этом являются парето-оптимальными, т.е. сильными равновесиями [2].

Поэтому в плане выбора оптимального поведения в условиях конкуренции фирмы сталкиваются с известной проблемой борьбы за лидерство, подобной игре «Семейный спор» [2]. Это означает, что каждая фирма будет стремиться стать лидером, т.е. начать производить продукцию высокого качества, обеспечив себе более выгодную позицию в равновесии.

Заметим также, что если рассмотреть модель Штакельберга (фирма 2 – лидер, фирма 1 – ведомый), то результат получится аналогичным, но равновесие будет одно – $(k\overline{s}, \overline{s})$. При этом лидер (фирма 2) использует свое право первого хода и займет более выгодную позицию в равновесии.

3. Численный пример

В данном разделе рассмотрим пример применения представленной в предыдущем разделе методики на примере систем Интернет-трейдинга, использующихся в биржевых торгах.

Интернет-трейдинг – это принципиально новый, простой в использовании и высокоэффективный программный инструмент, дающий неограниченную возможность дистанционного участия в биржевых торгах в режиме реального времени через Интернет, а также предоставляющий доступ к огромному количеству аналитической информации. При помощи удаленного торгового терминала инвестор может без постороннего участия выставлять заявки и проводить биржевые сделки. Появляется доступ к финансовой отчетности компаний и аналитической информации по рынку. Благодаря Интернет-трейдингу можно в режиме реального времени наблюдать движение собственных средств и контролировать состояние активов на разных счетах.

В настоящий момент насчитывается свыше 20 систем Интернет-трейдинга, использующихся в России. Некоторые брокеры создали их самостоятельно, другие системы созданы ИТ-компаниями. Разработки ИТ-компаний сейчас доминируют на рынке. К ним относятся в первую очередь QUIK, NetInvestor, TRANSAQ, «ИТС-Брокер». В России наиболее распространена система QUIK, которая используется более 60 брокерами (свыше 3500 работающих пользователей). Система, предлагаемая компанией QUIK, фактически стала именем нарицательным, синонимом понятия «система Интернет-трейдинга».

Существует свыше 100 брокерских организаций-пользователей, которые установили системы Интернет-трейдинга. Списки таких организаций можно найти на сайтах крупнейших российских бирж – Московской межбанковской валютной биржи (ММВБ) и фондовой биржи «Российская торговая система (РТС)».

Основное предназначение системы Интернет-трейдинга – это получение интерфейса для разработки собственной программы, позволяющей осуществлять операции на биржевых торгах. Системы Интернет-трейдинга дают возможность получения биржевой информации и возможность самостоятельного совершения сделок. В них отображаются состояние портфеля инвестора (количество купленных/проданных акций), состояние денежных средств, как правило, в программе имеется опция просмотра ценовых графиков и другие дополнительные возможности.

При эмпирическом исследовании качества системы Интернет-трейдинга были выделены восемь основных характеристик такой системы:

1. количество биржевых рынков, на которые предоставляется доступ;

2. скорость операций, т.е. скорость передачи заявок и приема ин-

формации;

3. функциональность системы (котировки, построение временных рядов, графиков), т.е. наличие встроенной аналитики;

4. осуществляемая поддержка разработчиков;

5. возможность экспорта данных;

6. возможность самостоятельного расширения возможностей системы;

7. цена системы и ее обслуживания;

8. гарантия и надежность использования, т.е. ответственность компании-разработчика за возможные ошибки, их устранение и компенсация убытков.

3.1. Описание выборки

Сбор данных проводился с помощью экспертного анкетирования. По результатам опроса была сформирована выборка из 29 респондентов. В рамках исследования интерес представляли мнения пользователей систем Интернет-трейдинга, а именно, работников департаментов администрирования торговых систем и экономистов брокерских компаний, непосредственно работающих с такими системами. По географическому местоположению были отобраны пользователи систем Интернет-трейдинга из таких крупнейших российских городов, как Москва, Санкт-Петербург и Екатеринбург.

Зачастую брокерские компании работают сразу с несколькими системами Интренет-трейдинга, что позволяет удовлетворять запросы различных инвесторов. Поскольку на российском биржевом рынке основной системой Интернет-трейдинга выступает QUIK, были выделены два типа систем – система QUIK и другие системы (OTHER). В результате такого предположения, получилось, что 22 респондента являются пользователями системы QUIK, и 20 – работают с системами Интернет-трейдинга OTHER.

3.2. Алгоритм и методика оценки качества системы Интернет-трейдинга

Определения качества объекта, представленные в документах ISO 9000 (2005), выделяют системный характер множества свойств объекта. В связи с этим, можно говорить о качестве системы Интернет-трейдинга в целом, о некоторой обобщенной количественной оценке или сводного показателя этого качества.

В данном исследовании респонденты выступали одновременно в роли потребителей и экспертов. На основании мнений потребителей о каждой характеристике системы Интернет-трейдинга мы оценивали качество системы в целом. Для реализации этой идеи был использован метод сводных показателей, реализованный в программе ОСППР АСПИД-3W [3]. Особенности применения ОСППР АСПИД-3W для оценки в условиях неопределенности качества сложных технических систем различного назначения и их проектов представлены, например, в работах [4,8].

Первым этапом эмпирического исследования была обработка данных с целью определения качества выбранной системы Интернет-трейдинга. Для этого респондентам предлагалось оценить степень удовлетворенности каждой из восьми выделенных нами ранее характеристик по всем системам Интернет-трейдинга, используемым в их организации. По методу сводных показателей оценка качества проводилась за три шага:

1. сначала был вычислен сводный показатель степени удовлетворенности для каждой из восьми характеристик системы Интернет-трейдинга QUIK; для каждой характеристики был вычислен сводный показатель по остальным системам Интернет-трейдинга (OTHER);

2. на основе сводных показателей были вычислены общие сводные показатели степени удовлетворенности потребителей α_2 и α_1 для системы QUIK и OTHER, соответственно;

3. на основе общих сводных показателей α_2 и α_1 были вычислены количественные оценки качеств систем по формулам: $s_2 = \alpha_2 p_2$ (для системы QUIK) и $s_1 = \alpha_1 p_1$ (для OTHER), где p_2, p_1 – цены систем QUIK и OTHER.

Формула количественной оценки качества требует пояснения. При анкетировании респондентам задавался вопрос: «Если Вы не вполне удовлетворены системами Интернет-трейдинга, которые используются в Вашей организации, то скажите, насколько процентов больше от нынешней стоимости Вы готовы платить за систему, которая бы Вас полностью удовлетворяла?» Поэтому если система полностью удовлетворяет потребителя, то в соответствии с нашим представлением количественной оценки качества величина $s = p_0$, где p_0 – цена системы. Если же степень удовлетворенности потребителей равна $0 < \alpha < 1$, то $s = \alpha p_0$.

Теперь обсудим связь эмпирической и теоретической модели. Если потребитель со склонностью к качеству θ_0 полностью удовлетворен используемой системой Интернет-трейдинга, то максимальная цена, которую он готов платить за систему равна $\theta_0 p_0$. С другой стороны, $\theta_0 p_0 = p_0 + \Delta p$, где Δp – это приращение цены, при котором потребитель готов приобретать исследуемую систему Интернет-трейдинга. Откуда, $\theta_0 = 1 + \dfrac{\Delta p}{p_0} > 1$. Обозначим склонность к качеству респондента через $\theta = \dfrac{\Delta p}{p_0}$.

Тогда полезность потребителя с параметром склонности к качеству θ примет вид

$$U_\theta(p,s) = \begin{cases} \theta s - p, & p \le \theta s, \\ 0, & p > \theta s, \end{cases} \quad p = p_0 - s, \tag{3.1}$$

где $\theta \in [0, b]$, а правая граница промежутка b определяется из анкеты. Поэтому использование теоретико-игровой модели по данным эмпирического исследования корректно.

3.3. Результаты эмпирического исследования

В данном разделе представлены результаты реализации описанного выше алгоритма анализа полученных при анкетировании данных.

Сбор данных проводился с помощью экспертного анкетирования. Анкета состояла из двенадцати вопросов (разделенных на три группы), отражающих специфику пользователей и систем Интернет-трейдинга. При ответе на первую группу вопросов все респонденты указали, какими системами они пользуются, в каких целях и насколько они удовлетворены каждой из используемых систем в целом.

Вторая группа вопросов посвящена характеристикам систем Интернет-трейдинга. Здесь респондентам было предложено проранжировать характеристики систем по степени важности, указать какими характеристиками систем они удовлетворены и насколько (по 5-бальной шкале Лакерта).

Третья группа вопросов касалась предпочтений потребителей по системам Интернет-трейдинга:

1. какую из используемых систем потребители считают ключевой;
2. на какую величину они готовы увеличить плату за систему при полном удовлетворении потребностей;
3. какой из имеющихся систем они бы хотели пользоваться;
4. какой бренд разработчика более предпочтителен потребителю.

Оценка качества системы QUIK (товар 2) и OTHER (товар 1) проводилась на основе ответов на вторую группу вопросов. Используя программу ОСППР АСПИД-3W, рассчитаны сводные показатели степени удовлетворенности потребителей по каждой характеристике систем (см. табл. 2). В качестве весовых коэффициентов использована информация о ранжировании потребителями выделенных восьми характеристик систем Интернет-трейдинга (см. табл. 1).

Следующим шагом рассчитаны сводные показатели $\alpha_1 = 0,572$ и $\alpha_2 = 0,545$ удовлетворенности потребителями системами QUIK и OTHER, соответственно.

Оценку качества каждой из систем получаем по формуле $s_i = \alpha_i p_i$, где $i = 1$ означает систему OTHER, а $i = 2$ – систему QUIK. Цена на систему Интернет-трейдинга OTHER составляет $p_1 = 119000$ руб. (эта цена получена как среднее арифметическое цен на каждую систему из OTHER, которые представлены на сайтах компаний) и цена системы QUIK равна $p_2 = 140000$ руб., соответственно. Поэтому оценки качеств систем равны $s_1 = 68068$ руб. и $s_2 = 76300$ руб., соответственно.

Таблица 1. Весовые коэффициенты характеристик систем Интернет-трейдинга

Характеристика системы	Веса
количество доступных рынков	6.103
скорость операций	$7,172$
встроенная аналитика	$3,552$
поддержка разработчиков	$5,517$
экспорт данных	$4,103$
возможность самостоятельного расширения	$2,828$
цена	$4,379$
гарантия	$3,586$

Таблица 2. Сводные показатели удовлетворенности характеристиками систем

Характеристика системы	Quik	Other
количество доступных рынков	$0,639$	$0,774$
скорость операций	$0,549$	$0,701$
встроенная аналитика	$0,492$	$0,498$
поддержка разработчиков	$0,699$	$0,612$
экспорт данных	$0,610$	$0,500$
возможность самостоятельного расширения	$0,394$	$0,407$
цена	$0,507$	$0,636$
гарантия	$0,470$	$0,450$

Оценим диапазон изменения качества системы Интернет-трейдинга, т.е. оценим параметры $\underline{s}$ и $\overline{s}$. Для этого рассчитаны показатели степени удовлетворенности потребителей с помощью ОСППР АСПИД-3W, которые получаются в случае, когда потребитель оценивает все характеристики системы по «1 – совсем не удовлетворен» и в случае, когда по всем характеристикам он ставит «5 – полностью удовлетворен». Результаты расчетов дают значения $\underline{\alpha} = 0,056$ и $\overline{\alpha} = 1,000$. Тогда границы диапазона изменения качеств равны $\underline{s} = \underline{\alpha} p_1 = 6664$ руб. и $\overline{s} = \overline{\alpha} p_2 = 140000$ руб.

Оценим теперь верхнюю границу b параметра θ. Величина $b = \max\{\max \Delta p_1, \max \Delta p_2\} = 0,5$. Поэтому $\theta \in [0; 0,5]$.

Далее проверяем гипотезу о треугольном распределении параметра θ склонности к качеству на промежутке $[0; 0,5]$.

В виду небольшой исходной выборки, будем рассматривать гипотезу о треугольном распределении параметра склонности к качеству на промежутке среднего по данной группе потребителей. Таким образом, необходимо проверить гипотезу о треугольном распределении θ на промежутке $[0,15916; 0,220852]$.

В табл. 3 представлены результаты расчетов при проверке гипотезы по критерию Колмогорова. Здесь x_i и x_{i+1} – границы интервалов разбиения значений выборки, l_i – относительные частоты для соответствующих интервалов, F^* – значение эмпирической функции распределения на конце интервала, F – значение теоретической функции распределения на конце интервала.

Таблица 3. Проверка гипотезы о треугольном распределении

x_i	x_{i+1}	l_i	F^*	F	$F^* - F$
0,15916	0,167973	1	0,01	0,034327	0,024327
0,167973	0,176786	9	0,1	0,152158	0,052158
0,176786	0,185599	15	0,25	0,353875	0,103875
0,185599	0,194412	27	0,52	0,63245	0,11245
0,194412	0,203226	25	0,77	0,834055	0,064055
0,203226	0,212039	14	0,91	0,951774	0,041774
0,212039	0,220852	9	1	0,985608	0,014392

По критерию Колмогорова рассчитываем выборочную статистику

$$\lambda^* = \sup \mid F^*(x_i) - F(x_i) \mid = 1,124498.$$

В результате проверки, гипотеза о треугольном распределении данного параметра принимается при уровне значимости 0,01.

Сравним полученные результаты эмпирических исследований с результатами теоретико-игровой модели конкуренции по качеству, описанной в предыдущем разделе. Равновесные оценки качеств систем QUIK и OTHER Интернет-трейдинга равны

$$\begin{cases} s_1^* = 0,6543\overline{s} = 91602, \\ \quad s_2^* = \overline{s} = 140000. \end{cases}$$

Заметим, что оба значения s_1^*, s_2^* попали в допустимый диапазон изменения качеств, т.е. $s_i^* \in [6664, 140000]$. Сравнивая эти значения с экспериментальными оценками $s_1 = 68068$ и $s_2 = 76300$, заключаем, что разработчикам обеих систем необходимо увеличивать качество, а также дифференциацию по качеству.

Для расчета ценовых стратегий вспомним, что $p = p_0 - s$ (см. (3.1)). Тогда равновесные цены разработчиков будут равны соответственно

$$\begin{cases} p_{01}^* = p_1^* + s_1^* = 95305, \\ p_{02}^* = p_2^* + s_2^* = 152424. \end{cases}$$

Данный результат говорит о том, что при большей дифференциации по качеству разработчики могут больше дифференцироваться по ценам. Разница в ценах на системы Интернет-трейдинга в настоящий момент составляет 21 000 руб., а в соответствии с результатами моделирования они могут отличаться более, чем на 57 000 руб. Равновесные доли рынков равны соответственно

$$\begin{cases} D_1^* = 0,247, \\ D_2^* = 0,740. \end{cases}$$

Данный результат отражает рыночную ситуацию в настоящее время, поскольку отношение количества потребителей систем OTHER и QUIK составляет 1 к 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А., Гладкова М.А. *Теоретико-игровая модель конкуренции "качество-цена"на отраслевом рынке* // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия Менеджмент. 2007. Вып. 4. С. 3–31.

2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр: Учебное пособие для университетов*. Москва: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998.

3. Хованов К.Н., Хованов Н.В. *Система поддержки принятия решений АСПИД-3W (Анализ и Синтез Показателей при Информационном Дефиците)*. Свидетельство об официальной ре-

гистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем. (РосАПО). М.: РосАПО, 1996.

4. Хованов Н.В. *Оценка сложных объектов в условиях дефицита информации* // Труды 7-й международной научной школы "Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах". СПб.: ИПМАШ РАН, 2008. С. 18–28.

5. Aoki R., Prusa T.J. *Sequential versus Simultaneous Choice with endogenous quality* // International Journal of Industrial Organization. 1996. V. 15. P. 103–121.

6. Benassi C., Chirco A., Colombo C. *Vertical differentiation and the distribution of income* // Bulletin of Economic Research. 2006. V. 58. N 4. P. 345–367.

7. Gladkova M., Zenkevich N. *Quality Competition: Uniform vs. Non-uniform Consumer Distribution* // Contributions to Game Theory and Management. Vol II. Collected papers presented on the Second International Conference "Game Theory and Management"(Eds. L.A. Petrosjan, N.A. Zenkevich). SPb: Graduate School of Management, SPbU, 2009. P. 111–124.

8. Hovanov N., Yudaeva M., Hovanov K. *Multicriteria estimation of probabilities on basis of expert non-numeric, non-exact and non-complete knowledge* // European Journal of Operational Research. 2009. V. 195. P. 857–863.

9. Motta M. *Endogenous quality choice: price vs. quantity competition* // The Journal of Industrial Economics. 1993. V. 41. N 2. P. 113–131.

10. Noh Y.-H., Moschini G. *Vertical product differentiation, entry-deterrence strategies, and entry qualities* // Review of Industrial Organization. 2006. V. 29. P. 227–252.

11. Tirole J. *The theory of Industrial Organization.* Cambridge, MA: MIT Press, 2000.

Приложение

Доказательство теоремы 2.1.

Функции выигрыша игроков имеют следующий вид

$$R_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_1(F(\theta_2) - F(\theta_1)),$$

$$R_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_2(1 - F(\theta_2)),$$

где $\theta_1 = \frac{p_1}{s_1}, \theta_2 = \frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}$.

Вычислим производную функции выигрыша R_2 по цене p_2 и приравняем ее к нулю

$$\frac{\partial R_2}{\partial p_2} = 1 - F(\theta_2) - \frac{p_2}{s_2 - s_1} f(\theta_2) = 0.$$

Откуда получаем уравнение

$$z(\theta_2) = 1 - F(\theta_2), \tag{3.2}$$

где $z\,(\theta_2) = (t + \theta_2)\, f\,(\theta_2)$, $t = \frac{p_1}{s_2 - s_1} > 0$.

Справедливо следующее неравенство:

$$z\left(\frac{b}{2}\right) = \left(t + \frac{b}{2}\right) f\left(\frac{b}{2}\right) > b \geq \frac{1}{2} = 1 - F\left(\frac{b}{2}\right).$$

Кроме того, $z(0) = tf(0) = 0 < 1 - F(0) = 1$. Поэтому

$$z\left(\frac{b}{2}\right) > 1 - F\left(\frac{b}{2}\right), \;\; z(0) < 1 - F(0).$$

Таким образом, решение уравнения (3.2) $\theta_2^* < \frac{b}{2}$.

Заметим, что на промежутке $[0, b/2]$ функция R_2 является строго вогнутой по p_2 (или θ_2). В частности, для треугольного распределения (рис. 1) имеем: $\frac{\partial^2 R_2}{\partial p_2^2} = -\frac{6}{b^2(s_2 - s_1)} < 0$.

Поэтому в стационарной точке θ_2^*, удовлетворяющей уравнению (3.2), достигается наибольшее значение функции R_2 на промежутке $[0, b/2]$.

Докажем теперь, что в точке θ_2^* достигается наибольшее значение функции R_2 на промежутке $[0, b]$, и эта точка единственна.

Проанализируем уравнение (3.2). Поскольку функция распределения $F(\theta)$ строго возрастает на $[0, b]$, то правая часть уравнения $1 - F(\theta_2)$ строго убывает на $[0, b]$.

Левая часть уравнения $z(\theta_2)$ строго возрастает до тех пор, пока $f^{'}(\theta_2) \geq 0$. Это является следствием вида производной $z^{'}(\theta_2) = f(\theta_2) + (t + \theta_2)f^{'}(\theta_2)$.

Функция $z(\theta_2)$ является непрерывной, причем $z(b) = z(0) = 0$. Тогда наибольшее значение функции $z(\theta_2)$ на $[0, b]$ достигается в некоторой внутренней точке $\theta_2 = \widehat{\theta}_2$. Неравенство $f^{'}(\theta_2) \geq 0$ выполняется при любом $\theta_2 < \dfrac{b}{2}$. При этом на данном промежутке $z^{'}(\theta_2) > 0$. Поэтому $\widehat{\theta}_2 > \dfrac{b}{2}$ и $\theta_2^* \in [0, \widehat{\theta}_2]$.

Рассмотрим теперь промежуток $\theta_2 \in [\widehat{\theta}_2, b]$ и покажем, что на этом промежутке не достигается наибольшее значение функции выигрыша R_2.

Для этого введем функцию $\varphi(\theta_2) = 1 - F(\theta_2) - z(\theta_2)$ и вычислим ее производную $\varphi^{'}(\theta_2) = -2f(\theta_2) - (t + \theta_2)f^{'}(\theta_2)$.

Поскольку функция плотности $f(\theta_2)$ убывает и вогнута на промежутке $[\widehat{\theta}_2, b]$, то $f^{'}(\theta_2)$ – убывающая или $\varphi^{'}(\theta_2)$ – возрастающая функции.

Вычислим значения производной функции $\varphi(\theta_2)$ в точках $\widehat{\theta}_2$ и b. Тогда $\varphi^{'}\left(\widehat{\theta}_2\right) = -2f\left(\widehat{\theta}_2\right) - \left(t + \widehat{\theta}_2\right) f^{'}\left(\widehat{\theta}_2\right) = -f\left(\widehat{\theta}_2\right) - z^{'}\left(\widehat{\theta}_2\right) = -f\left(\widehat{\theta}_2\right) < 0$, поскольку $z^{'}\left(\widehat{\theta}_2\right) = 0$.

Производная $\varphi^{'}(b) = -2f(b) - (t + b) f^{'}(b) = -(t + b) f^{'}(b) > 0$, поскольку $f(b) = 0$ и $f^{'}(b) < 0$.

Итак, $\varphi^{'}(\theta_2)$ возрастает, $\varphi^{'}(\widehat{\theta}_2) < 0$ и $\varphi^{'}(b) > 0$. Поэтому существует единственная точка $\theta_2 = \widetilde{\theta}_2$, в которой $\varphi^{'}(\widetilde{\theta}_2) = 0$, и в ней достигается минимум.

Поскольку $\varphi\left(\widehat{\theta}_2\right) < 0$, а $\varphi(b) = 0$, то на всем промежутке $[\widehat{\theta}_2, b]$ функция $\varphi(\theta_2) < 0$. Тогда $1 - F(\theta_2) < z(\theta_2)$ для любого $\theta_2 \in \left[\widehat{\theta}_2, b\right]$, и поэтому на промежутке $[\widehat{\theta}_2, b]$ нет точек, которые удовлетворяют уравнению (3.2).

Таким образом, существует единственное значение параметра θ_2^* в ценовом равновесии, при котором $\theta_2^* > \theta_1^*$ и $\theta_2^* < b/2$.

GAME-THEORETICAL MODEL OF QUALITY MANAGEMENT UNDER COMPETITION

Margarita A. Gladkova, Graduate School of Management, St. Petersburg University, post-graduate student (gladkova@gsom.pu.ru),
Nikolay A. Zenkevich, Graduate School of Management, St. Petersburg University, Cand. Sc., assoc. prof. (zenkevich@gsom.pu.ru).

Abstract: In the paper a game-theoretical model of quality management under competition is suggested. This model is presented as a two-stage game where production companies compete on an industrial market and consumer's taste to quality in non-uniformly distributed. The strong Nash equilibrium in the investigated game was obtained in explicit form which allowed us to evaluate prices, companies market shares and revenues in the equilibrium. A case study for Internet-trading systems was used to approve the suggested quality management mechanism.

Keywords: quality evaluation, quality measurement, consumer's taste to quality, quality management, two-stage game, Nash equilibrium, Stakelberg equilibrium, Pareto-optimal solution, optimal quality differentiation, index of consumers satisfaction.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 25–51

УДК 519.83
ББК 22.18

ДВУХУРОВНЕВЫЕ КОНФЛИКТНЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ СОВМЕСТНОЙ РАЗРАБОТКИ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Юрий М. Королев
Петр В. Голубцов
Физический факультет
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
e-mail: um.korolev@physics.msu.ru, golubtsov@physics.msu.ru

В работе исследуется конфликтная система, в которой взаимодействуют игроки двух принципиально разных типов – владельцы ресурса и разработчики. При этом владельцы устанавливают правила игры (налоги) для разработчиков. Проведено аналитическое исследование таких двухуровневых конфликтных систем для случая одного разработчика и многих владельцев ресурса. Решение игры найдено аналитически для функций выигрыша общего вида, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

Ключевые слова: теория игр, двухуровневая игра, оптимальное управление природными ресурсами, равновесие по Нэшу, игра Штакельберга со многими лидерами.

---

1. Введение

За последние десятилетия уровень технического оснащения добывающих компаний стал настолько высоким, что над многими видами природных ресурсов нависла реальная угроза исчерпания. Неадекватный учет эффектов соперничества приводит к катастрофическим последствиям в экономике и экологии. Поэтому возникает потребность в развитии моделей, позволяющих исследовать процесс совместной разработки природных ресурсов.

Типичным примером задачи совместной разработки природных ресурсов является промышленный лов рыбы. В классической постановке задачи несколько независимых разработчиков ведут добычу ресурса из общего бассейна. В ранних публикациях на эту тему ([5,9]) была показана важная особенность таких систем: при отсутствии ограничений на разработку в некооперативном случае происходит исчерпание ресурса до уровня, когда его разработка становится экономически нецелесообразной. В англоязычной литературе этот эффект получил название „tragedy of commons“.

Осознание того факта, что бесконтрольная добыча приводит к исчерпанию ресурса, привело к созданию различного рода регуляторов – организаций, в состав которых входят как государства-владельцы ресурса, так и государства-разработчики. Они призваны управлять процессом разработки природных ресурсов за счет введения различного рода ограничений и квот. Как показывает практика, не все из них оказываются эффективными.

Кроме того, во многих регионах были введены эксклюзивные экономические зоны, добыча ресурса в которых могла вестись только с разрешения государства – владельца эксклюзивного права на разработку ([15]). Владельцы этого права стали допускать других участников рынка к разработке ресурса, взимая с них определенный налог. Такое устройство системы «владельцы-разработчики ресурса» потребовало создания новых математических моделей ([11]).

Подавляющее большинство исследований в этой области базируются на численном моделировании. В этой связи стоит упомянуть работы [12] и [6], в которых рассмотрены задачи разработки природных ресурсов при неопределенности (в условиях непредсказуемых климатических изменений), а также при наличии у игроков асимметричной информации.

Конкуренция между разработчиками зачастую приводит к снижению эффективности разработки. Однако ситуация серьезно осложняется в случае, когда владельцы ресурса также являются активными участниками событий.

Такая ситуация может быть описана как двухуровневая игра, в которой принимают участие игроки двух принципиально разных типов. Игроки первого уровня (владельцы ресурса) устанавливают правила игры для игроков второго уровня (разработчиков). При этом игроки первого уровня сами находятся в конфликтной ситуации. Доходы всех игроков, как первого, так и второго уровня, зависят от стратегий игроков обоих уровней.

Предполагается, что игроки первого владеют совершенно однородным ресурсом, и разработчику безразлично, у кого из них купить право на добычу. Однако условия разработки в различных регионах (соответствующих различным игрокам первого уровня) различны, а следовательно, различны и затраты на добычу единицы ресурса. Кроме того, эти регионы отличаются друг от друга налогами, которые устанавливают владельцы. Обычно налоги пропорциональны усилиям по разработке (в примере с ловом рыбы – количеству судов). Эти налоги и являются стратегиями игроков первого уровня. Стратегиями игроков второго уровня является распределение их усилий по разработке между различными регионами. Стараясь привлечь к себе разработчиков, владельцы могут снижать налоги, тем самым уменьшая свой суммарный доход и провоцируя наращивание добычи ресурса.

В общем случае в игре участвуют N владельцев ресурса и M разработчиков. Игра разыгрывается в два этапа. Решением игры на втором уровне является равновесие по Нэшу между разработчиками, параметрически зависящее от стратегий игроков первого уровня – налогов. Зная эту зависимость, игроки первого уровня также приходят к равновесию по Нэшу. В работе [13] проведено аналитическое исследование игры 1×2, в которой участвуют два разработчика и один владелец (игра Штакельберга с одним лидером и двумя последователями). В настоящей работе изучаются эффекты, обусловленные конкуренцией между владельцами ресурса, поэтому рассматривается случай одного разработчика и многих владельцев (игра Штакельберга со многими лидерами и одним последователем).

Все рассуждения в настоящей работе проводятся для функций выигрыша общего вида. Они должны удовлетворять некоторым вполне естественным условиям, которые получаются, исходя из следующих соображений. Характерной особенностью рассматриваемых задач является зависимость удельных затрат на добычу ресурса от количества оставшегося ресурса. Интенсивность добычи в каждом регионе пропорциональна количеству оставшегося ресурса $R(t)$, а также приложенным усилиям E ([7]).

$$\frac{dR(t)}{dt} = -qER(t), \tag{1.1}$$

где $q = const > 0$ – коэффициент пропорциональности, определяющий эффективность добычи в каждом регионе.

Предположим, что время добычи ресурса равно T. Пусть $R(0) = R_0$. Тогда, с учетом (1.1), доход ω разработчика от продажи ресурса в зависимости от приложенных усилий есть разница между количеством ресурса на начало и конец сезона (предполагается, что цена на ресурс не изменяется в течение всего сезона).

$$\omega(E) = R_0(1 - e^{-qTE}). \tag{1.2}$$

Выигрыш разработчика складывается из доходов от продажи ресурса, добытого в различных регионах, за вычетом налоговых выплат, а также издержек добычи.

В разделе 3 рассмотрена простейшая игра, в которой участвует по одному игроку на каждом уровне. В разделе 4 рассмотрена игра, в которой участвуют два владельца ресурса. Уже в такой простой конфигурации проявляются интересные особенности рассматриваемых систем, например, неединственность равновесия по Нэшу в игре на первом уровне. В разделе 5 рассмотрена симметричная игра с произвольным числом игроков первого уровня, изучено влияние конкуренции (количества игроков) на решение игры.

Подобные двухуровневые игры могут возникать в задачах разработки различных биологических ресурсов, водных ресурсов (например, артезианских вод), лесных ресурсов, в сельском хозяйстве, а также в других задачах.

2. Постановка задачи

Мы формализуем задачу игрой $G_{N\times 1}=\{N, X_i, Y, u_i, v; i=1,\ldots,N\}$, где N – множество игроков первого уровня, X_i – множества их стратегий, Y – множество стратегий игрока второго уровня, u_i и v – функции выигрыша игроков первого уровня и игрока второго уровня, соответственно.

Вектор $\mathbf{x} \in X_1 \times \ldots \times X_N$ интерпретируется как вектор налогов, а вектор $\mathbf{y} \in Y$ определяет распределение усилий игрока второго уровня по разработке ресурса между различными регионами. Предполагается, что $y_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,N$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \leqslant y_0$. Последнее условие выражает тот факт, что разработчик ограничен в своих возможностях (например, имеет ограниченный флот).

Функция выигрыша разработчика $v(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в случае N владельцев ресурса имеет следующий вид:

$$v(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(y_i) - (c_i + x_i)y_i, \tag{2.1}$$

где $\omega_i(y_i)$ отражают доход от разработки ресурса в i-ом регионе, c_i – константы, характеризующие естественные затраты на разработку ресурса в i-ом регионе, а $x_i y_i$ – налоговые выплаты. Будем считать, что функции $\omega_i(y)$ удовлетворяют следующим вполне естественным условиям

$$\begin{aligned} &\omega_i(0) = 0, \\ &\varphi_i(y) = \omega_i'(y) > 0, \\ &\varphi_i'(y) = \omega_i''(y) < 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Условия (2.2) означают, что доход от разработки в каждом регионе монотонно возрастает с ростом затраченных усилий, однако эффективность разработки падает с увеличением ее интенсивности. Это обусловлено исчерпанием ресурса.

Кроме того, подчиним функцию φ на отрезке $[0, y_0]$ условию

$$2[\varphi'(y)]^2 > \varphi(y)\varphi''(y), \quad \varphi''(y) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Типичным примером функции $\omega_i(y)$ является зависимость (1.2), рассмотренная во введении. Легко убедиться в том, что она удовлетворяет условиями (2.2) и (2.3).

Множество стратегий игрока второго уровня – множество векторов $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $y_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{N} y_i \leqslant y_0$. Множества стратегий игроков первого уровня X_i – лучи $x_i \geqslant 0$.

Выигрыши игроков первого уровня – налоговые выплаты, пропорциональные усилиям по добыче ресурса:

$$u_i(\mathbf{x}) = x_i \tilde{y}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.4}$$

Рассматриваемая игра – игра Штакельберга, в которой игроки первого уровня являются лидерами, а разработчик – последователем. При фиксированных налогах он решает следующую оптимизационную задачу:

$$v(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = \max_{\mathbf{y} \in Y} v(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{2.5}$$

Зная опимальный отклик игрока второго уровня $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, каждый игрок первого уровня оптимизирует свой выигрыш. Оптимальным набором стратегий в такой ситуации обычно считают равновесие по Нэшу:

$$u_i(\mathbf{x}^{eq}) = \max_{x_i \geqslant 0} u_i(\mathbf{x}^{eq} | x_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{x}^{eq} | x_i$ обозначает вектор $\mathbf{x}^{eq}$, в котором i-я стратегия заменена на x_i.

3. Игра 1×1

Рассмотрим простейший случай, когда на каждом уровне находится по одному игроку (т.е. $N = 1$). В этом случае в игре участвуют один лидер и один последователь.

Игрок второго уровня максимизирует свою функцию выигрыша $v(x, y)$ при каждом фиксированном x, задавая функцию $\tilde{y}(x)$ – оптимальный отклик на стратегию игрока первого уровня. Зная $\tilde{y}(x)$, владелец ресурса максимизирует свою функцию выигрыша $u(x, \tilde{y}(x))$.

Оптимальные стратегии игроков являются решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v(x, \tilde{y}(x)) = \max\limits_{0 \leqslant y \leqslant y_0} v(x, y), \\ u(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt})) = \max\limits_{x \geqslant 0} u(x, \tilde{y}(x)). \end{cases} \tag{3.1}$$

Найдем $\tilde{y}(x)$. Для этого надо максимизировать $v(x, y)$ по y на отрезке $[0, y_0]$. Для удобства мы будем искать не максимум $v(x, y)$, а минимум $-v(x, y)$.
Запишем необходимые условия экстремума (условия Куна-Таккера):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial y} + \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ \mu_1(y - y_0) = 0, \\ \mu_2 y = 0, \\ \mu_1 \geqslant 0, \quad \mu_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Так как $\frac{\partial^2(-v)}{\partial y^2} = -\varphi'(y) > 0$, функция $-v(x, y)$ строго выпукла по y на отрезке $[0, y_0]$, и необходимые условия экстремума превращаются в достаточные условия глобального максимума функции v на $[0, y_0]$, причем точка максимума единственна.

Как видно из системы (3.2), достаточным условием достижения максимума на границе является положительность соответствующего множителя Лагранжа. Решая систему (3.2) при $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$, $y = y_0$ и при $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$, $y = 0$, получаем достаточные условия достижения максимума на границе. Во внутренних точках (при $\mu_i = 0$) система сводится к одному уравнению. Таким образом, решение системы (3.2) на отрезке $[0, y_0]$ есть функция

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y_0, & \text{если } x \leqslant \varphi(y_0) - c, \\ \varphi^{-1}(c + x), & \text{если } \varphi(y_0) - c < x < \varphi(0) - c, \\ 0, & \text{если } x \geqslant \varphi(0) - c. \end{cases} \tag{3.3}$$

Любопытно заметить, что при $x < \varphi(y_0) - c$ оптимальная стратегия разработчика $\tilde{y}(x)$ не изменяется несмотря на увеличение налога x. При этом соответствующий множитель Лагранжа $\mu_1 = \varphi(y_0) -$

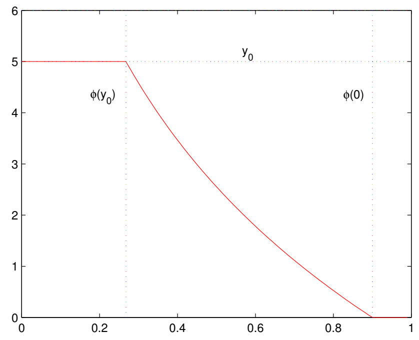

Рисунок 1. Оптимальный отклик игрока второго уровня $\tilde{y}(x)$

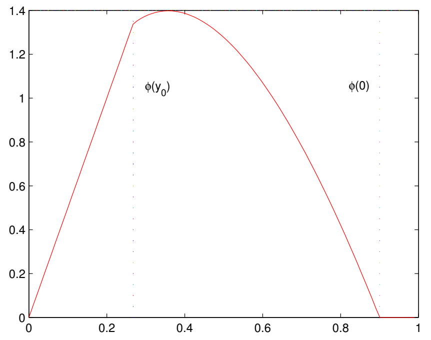

Рисунок 2. Функция выигрыша игрока первого уровня $u(x, \tilde{y}(x))$

$(c + x)$ уменьшается и при $x = \varphi(y_0) - c$ становится равным нулю. Это наблюдение позволяет интерпретировать множители Лагранжа в системе (3.2) как „виртуальные налоги“. Они оказывают такое же влияние на стратегию игрока второго уровня, как и реальные налоги, хотя и не выражаются в выплатах игроку первого уровня. В этой связи естественно ожидать, что игрок первого уровня будет стремиться выбирать свою стратегию таким образом, чтобы множитель Лагранжа μ_1 в системе (3.2) был равен нулю. При этом ограничение $y \leqslant y_0$ фактически перестает работать. В этом легко убедиться, так как $\frac{du(x,\tilde{y}(x))}{dx} = y_0 > 0$ при $x < \varphi(y_0) - c$. Типичной вид функции выигрыша $u(x, \tilde{y}(x))$ представлен на рис. 2.

Найдем x^{opt} – оптимальную стратегию игрока первого уровня. Для этого нужно найти максимум функции $u(x, \tilde{y}(x))$. Так как при $x < \varphi(y_0) - c$ функция $u(x, \tilde{y}(x)) = u(x, y_0) = xy_0$ возрастает, а при $x > \varphi(0) - c$ значение $u(x, \tilde{y}(x)) \equiv 0$, достаточно рассмотреть задачу максимизации $u(x, \tilde{y}(x))$ на отрезке $[\varphi(y_0) - c, \varphi(0) - c]$:

$$u(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt})) = \max_{\varphi(y_0)-c \leqslant x \leqslant \varphi(0)-c} u(x, \tilde{y}(x)). \tag{3.4}$$

Найдем производную $\frac{du(x,\tilde{y}(x))}{dx} = \frac{d}{dx}(x\varphi^{-1}(c + x))$ и запишем необходимые условия Куна-Такера:

$$\frac{du(x, \tilde{y}(x))}{dx} = \varphi^{-1}(c+x) + \frac{x}{\varphi'(\varphi^{-1}(c+x))}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} -\varphi^{-1}(c+x) - \dfrac{x}{\varphi'(\varphi^{-1}(c+x))} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1(x - (\varphi(y_0) - c)) = 0, \\ \lambda_2(x - (\varphi(0) - c)) = 0, \\ \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Запишем выражение для $\frac{d^2(-u)}{dx^2}$ на отрезке $[\varphi(y_0) - c, \varphi(0) - c]$:

$$\frac{d^2(-u)}{dx^2} = \frac{-1}{(\varphi'(y))^3}(2[\varphi'(y)]^2 - (\varphi(y) - c)\varphi''(y)) \left.\right|_{y=\varphi^{-1}(c+x)}. \tag{3.7}$$

Условия (2.3) гарантируют положительность $\frac{d^2(-u)}{dx^2}$ и, следовательно, строгую выпуклость $-u(x, \tilde{y}(x))$ на отрезке $[\varphi(y_0) - c, \varphi(0) - c]$.

Максимум на левой границе отрезка достигается при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. В этом случае $x^{opt} = \varphi(y_0) - c$. Выражая λ_1 из первого уравнения системы (3.6) и учитывая знак $\varphi'(y)$, получаем достаточные условия максимума на левой границе

$$\varphi(y_0) + y_0\varphi'(y_0) > c. \tag{3.8}$$

Аналогичные рассуждения для случая $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = 0$ показывают, что при $\varphi(0) < c$ $\tilde{y}(x) \equiv 0$ и x^{opt} – любое. В остальных случаях нужно решить первое уравнение системы (3.6) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и учесть тот факт, что $\varphi(y) = x + c$. Тогда для x^{opt} получаем уравнения

$$\begin{cases} \varphi(y^*) + y^*\varphi'(y^*) = c, \\ x^{opt} = \varphi(y^*) - c. \end{cases} \tag{3.9}$$

Таким образом, $x^{opt} = \varphi(y_0) - c$, если выполнено условие (3.8). Если $\varphi(y_0) \leqslant c$, то $x^{opt} = 0$. В остальных случаях x^{opt} находится из уравнений (3.9). Найденное значение x^{opt} позволяет вычислить отклик игрока второго уровня $\tilde{y}(x^{opt})$, а также значения функций выигрыша $u^{opt} = u(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt}))$ и $v^{opt} = v(x^{opt}, \tilde{y}(x^{opt}))$.

Для модельной функции (1.2) первое уравнение системы (3.9) выглядит особенно просто:

$$e^{-\xi}(1-\xi) = \tilde{c}, \tag{3.10}$$

где $\xi = qy$ и $\tilde{c} = c/(qR)$.

4. Игра 2×1

Теперь рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока первого уровня и один игрок второго уровня. В зависимости от установленных налогов разработчик может увеличить интенсивность разработки в том или ином регионе, тем самым перераспределяя налоговые выплаты. Таким образом, игроки первого уровня начинают влиять друг на друга через оптимальный отклик игрока второго уровня.

4.1. Оптимальный отклик игрока второго уровня

Оптимальный отклик разработчика $\tilde{\mathbf{y}}(x_1,x_2)=(\tilde{y_1}(x_1,x_2),\tilde{y_2}(x_1,x_2))$ является решением следующей оптимизационной задачи в треугольной области $Y = \{y_1, y_2 \colon y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_1 + y_2 \leqslant y_0\}$:

$$v(x_1, x_2, \tilde{y_1}(x_1, x_2), \tilde{y_2}(x_1, x_2)) = \max_{(y_1,y_2)\in Y} v(x_1, x_2, y_1, y_2). \tag{4.1}$$

Как и ранее, будем решать оптимизационную задачу (4.1) методом Куна-Такера. Запишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} -\varphi_1(y_1) + c_1 + x_1 - \lambda_1 + \lambda_0 = 0, \\ -\varphi_2(y_2) + c_2 + x_2 - \lambda_2 + \lambda_0 = 0, \\ \lambda_1 y_1 = 0, \\ \lambda_2 y_2 = 0, \\ \lambda_0(y_1 + y_2 - y_0) = 0, \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, 2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Нетрудно проверить, что матрица вторых производных функции $-v(x_1, x_2, y_1, y_2)$ (при фиксированных x_1 и x_2) положительно определена для любых y_1, y_2. Поэтому необходимые условия экстремума являются и достаточными условиями максимума $v(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Рассмотрим все возможные комбинации ненулевых и нулевых коэффициентов Лагранжа λ_i, $i = 0, 1, 2$. Ненулевое значение коэффициента Лагранжа означает достижение максимума на соответствующей

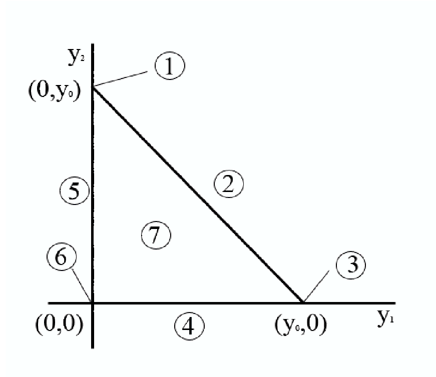

Рисунок 3. Область изменения y_1 и y_2 и характерные участки ее границы

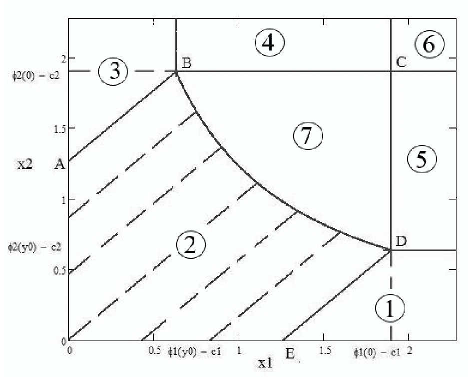

Рисунок 4. Разбиение плоскости (x_1, x_2) и область влияния игроков первого уровня

части границы области Y. На рис. 3 показана область Y и занумерованы характерные участки границы.

При $\lambda_0 = 0$ ограничение $y_1 + y_2 \leqslant y_0$ неактивно (оно выполняется со знаком «<»), y_1 и y_2 выбираются независимо и могут быть найдены по формулам раздела 3.

Значение $\lambda_0 \neq 0$ соответствует случаю, когда игроки «упираются» в ограничение $y_1 + y_2 = y_0$ (участки границы 1,2,3 на рис. 3). Максимум может достигаться как во внутренних точках отрезка 1-3, так и в крайних точках. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Если одно из λ_i, например, $\lambda_1 \neq 0$, то $y_1 = 0$, $y_2 = y_0$ (точка 1). Необходимым и достаточным условием для достижения максимума в точке $(0, y_0)$ является положительность коэффициентов Лагранжа λ_1 и λ_0

$$\begin{cases} \lambda_0 = \varphi_2(y_0) - (c_2 + x_2) > 0, \\ \lambda_1 = \lambda_0 - \varphi_1(0) + (c_1 + x_1) > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (максимум во внутренних точках отрезка), то

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = \varphi_1(y_1) - (c_1 + x_1) > 0, \\ &\lambda_0 = \varphi_2(y_2) - (c_2 + x_2) > 0, \\ &y_1 + y_2 = y_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для нахождения оптимального отклика $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ нужно решить относительно y следующее уравнение

$$\varphi_1(y_0 - y) - c_1 - x_1 - \varphi_2(y) + c_2 + x_2 = 0, \tag{4.5}$$

где y – оптимальный отклик $\tilde{y}_2$. Заметим, что решение y зависит только от разности $x_2 - x_1$

$$y = \psi(x_2 - x_1). \tag{4.6}$$

Рассмотренные выше достаточные условия максимума на границе области Y зависят от x_1 и x_2. При различных значениях x_1 и x_2 максимум достигается в различных точках треугольной области Y. Значения множителей Лагранжа также зависят от x_1 и x_2. Полагая равными нулю поочередно все множители Лагранжа, мы найдем некоторое разбиение плоскости (x_1, x_2). В каждой из получившихся областей $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ имеют различные аналитические выражения. Это разбиение показано на рис. 4. Кроме того, на этом рисунке показаны «образы» характерных участков границы области Y.

На кривой BD коэффициент Лагранжа λ_0, равный

$$\lambda_0 = \varphi_2(\psi(x_2 - x_1)) - (c_2 + x_2), \tag{4.7}$$

принимает нулевое значение. Отсюда можно найти уравнение кривой BD. Однако его можно найти и проще, если заметить, что на кривой BD оптимальные отклики, посчитанные по формулам области BCD, составляют в сумме y_0 (ограничение начинает работать). Тогда для кривой BD можно записать уравнение

$$\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) = y_0. \tag{4.8}$$

Для модельных функций (1.2) это уравнение задает гиперболу

$$\frac{c_1 + x_1}{q_1 R_1} \left(\frac{c_2 + x_2}{q_2 R_2} \right)^{q_1/q_2} = e^{-q_1 y_0}. \tag{4.9}$$

Обратимся к условиям (4.4). Граница областей 1 и 3, в которых максимум достигается в точках $(0, y_0)$ или $(y_0, 0)$, соответствует случаю $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, соответствено, а $\lambda_0 > 0$. Например,

$$\begin{cases} \lambda_0 = \varphi_2(y_0) - (c_2 + x_2) > 0, \\ \lambda_1 = \lambda_0 - \varphi_1(0) + (c_1 + x_1) = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Таким образом, границами этих областей являются прямые

$$\begin{aligned} AB: &\quad x_2 = x_1 + \varphi_2(0) - \varphi_1(y_0) + c_1 - c_2, \\ ED: &\quad x_2 = x_1 + \varphi_2(y_0) - \varphi_1(0) + c_1 - c_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Скажем еще пару слов о разбиении на рис. 4.

Замечание 4.1. При $x_i > \varphi_i(0) - c_i$ разработка в i-ом регионе не ведется, поэтому можно ограничить множества стратегий игроков первого уровня до квадрата $[0, \varphi_1(0) - c_1] \times [0, \varphi_2(0) - c_2]$.

Замечание 4.2. Ограничение y_0 активно только под кривой BD. Над этой кривой оптимальные отклики имеют такой же вид, как и в игре 1×1 (т.е. интенсивность разработки в каждом регионе зависит только от налога, установленного в данном регионе). Поэтому игроки первого уровня оказывают влияние друг на друга только в области, лежащей ниже кривой BD.

4.2. Равновесие по Нэшу между игроками первого уровня

Теперь, когда найден оптимальный отклик игрока второго уровня, можно построить функции выигрыша игроков первого уровня $u_1(x_1, x_2) = x_1\tilde{y}_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2) = x_2\tilde{y}_2(x_1, x_2)$. Они показаны на рис. 11. Исследуем их на выпуклость. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть в игре G с функциями выигрыша (2.4) и (2.1) выполнены условия (2.2) и (2.3). Тогда функции выигрыша $u_1(x_1, x_2) = x_1\tilde{y}_1(x_1,x_2)$ и $u_2(x_1, x_2) = x_2\tilde{y}_2(x_1,x_2)$ выпуклы вверх в области $OABCDE$ по x_1 и x_2, соответственно.*

Доказательство. Проведем доказательство для функции $u_2(x_1, x_2)$.

Рассмотрим сначала область $OABDE$. Запишем выражение для производной $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ внутри $OABDE$. В этой области ограничение y_0 активно, оптимальный отклик находится из условий (4.4):

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \psi(x_2 - x_1) + x_2\psi'(x_2 - x_1), \tag{4.12}$$

где ψ – решение (4.5).

Найдем $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$ внутри области $OABDE$.

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \psi' \left[2 - x_2 \frac{\varphi_2''(\psi) - \varphi_1''(y_0 - \psi)}{(\varphi_1'(y_0 - \psi) + \varphi_2'(\psi))^2}\right]. \tag{4.13}$$

Так как $\psi'(x) < 0$, требуется проверить выполнение неравенства

$$2(\varphi_1'(y_0 - \psi) + \varphi_2'(\psi))^2 - x_2(\varphi_2''(\psi) - \varphi_1''(y_0 - \psi)) > 0. \tag{4.14}$$

Неравенство (4.14) следует из условий (2.3) и (4.4) и уравнений (4.5), в этом несложно убедиться, перегруппировав слагаемые в (4.14).

Мы показали, что в области $OABDE$ производная $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} < 0$ и $u_2(x_1, x_2)$ строго выпукла вверх. Строгая выпуклость вверх функции $u_2(x_1, x_2)$ в области BCD доказана в разделе 3 (в этой области она совпадает с функцией выигрыша игры 1×1). Далее, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{BD-0} > \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{BD+0}. \tag{4.15}$$

Из всего вышесказанного следует, что $u_2(x_1, x_2)$ выпукла вверх в области $OABCDE$. Теорема доказана. □

Приступим к поиску равновесия по Нэшу. Покажем, что точка равновесия не может лежать вне области $OABCDE$. То, что она не может лежать вне квадрата $[0, \varphi_1(0) - c_1] \times [0, \varphi_2(0) - c_2]$, следует из замечания 4.2. Остается показать, что равновесных точек нет ниже прямой ED и выше прямой AB.

Действительно, пусть ниже прямой ED есть равновесие по Нэшу (x_1^n, x_2^n). Тогда должно выполняться

$$\begin{cases} u_1(x_1^n, x_2^n) \geqslant u_1(x_1, x_2^n) \quad \forall x_1, \\ u_2(x_1^n, x_2^n) \geqslant u_2(x_1^n, x_2) \quad \forall x_2. \end{cases} \tag{4.16}$$

Но в этой области оптимальный отклик разработчика равен $\tilde{y}_2(x_1, x_2) = y_0$, и производная

$$\frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = y_0 > 0, \tag{4.17}$$

что противоречит условиям (4.16).

Итак, мы показали, что если равновесие по Нэшу существует, то оно находится в области $OABCDE$. Выпуклость этой области очевидна, выпуклость вверх функций $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ есть утверждение теоремы 4.1. По теореме Нэша равновесие в игре G существует.

При различных значениях параметров задачи равновесие по Нэшу может лежать как внутри области $OABDE$, так и на ее границах, либо в области BCD. Первый случай показан на рис. 5. Точка (x_1^{opt}, x_2^{opt}) является решением следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = y_0 - \psi(x_2 - x_1) + x_1\psi'(x_2 - x_1) = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = \psi(x_2 - x_1) + x_2\psi'(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

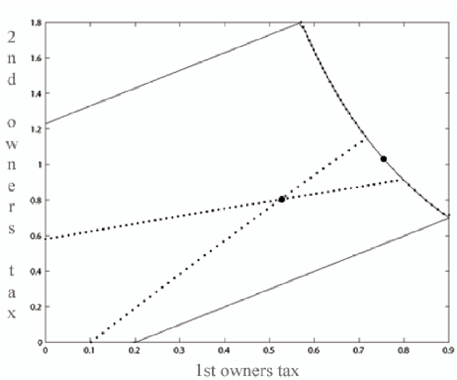

Рисунок 5. Равновесие по Нэшу внутри области влияния, пространство стратегий

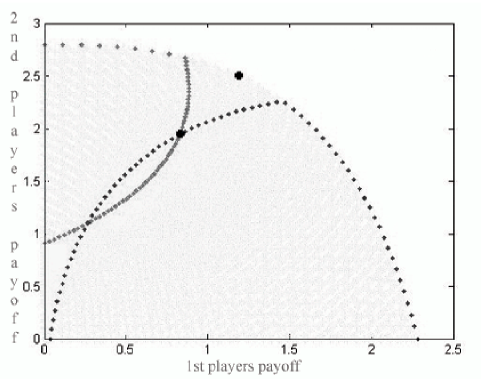

Рисунок 6. Равновесие по Нэшу внутри области влияния, пространство выигрышей

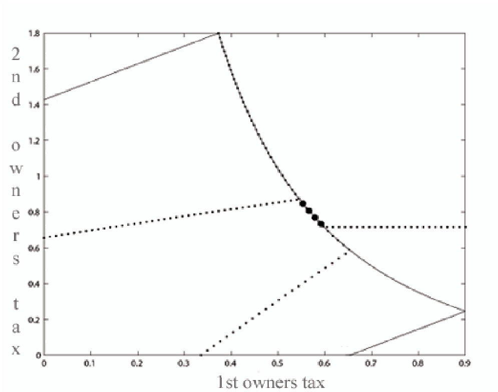

Рисунок 7. Равновесие по Нэшу на границе области влияния, пространство стратегий

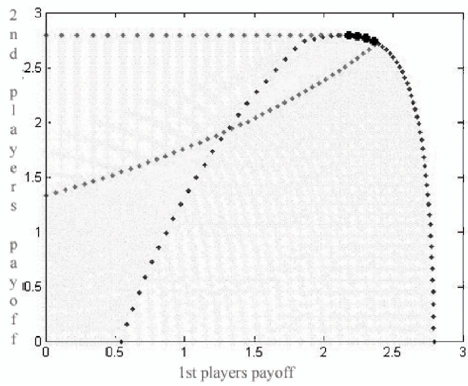

Рисунок 8. Равновесие по Нэшу на границе области влияния, пространство выигрышей

Переходя к новым переменным $\xi = x_1 + x_2$, $\eta = x_2 - x_1$, после несложных преобразований получаем систему

$$\begin{cases} \psi(\eta) + \dfrac{\eta}{2}\psi'(\eta) = \dfrac{y_0}{2}, \\ \xi = \dfrac{-y_0}{\psi'(\eta)}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Решение системы (4.18) (x_1^{opt}, x_2^{opt}) действительно будет равновесием по Нэшу, если эта точка является внутренней точкой области $OABDE$. Такое расположение равновесия проиллюстрировано на рис. 5. При помощи преобразования $(x_1, x_2) \to (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$ можно перейти в пространство выигрышей, как показано на рис. 6.

Наиболее интересным является случай, когда равновесные по Нэшу точки находятся на кривой BD. В этом случае равновесным является целый отрезок кривой BD. В пространстве выигрышей он представляет собой участок паретовской границы множества возможных исходов. Это показано на рис. 7 и рис. 8.

Границы этого отрезка можно найти следующим образом. Точка (x_1, x_2) кривой BD является равновесием тогда и только тогда, когда левые производные функций выигрыша в этой точке положительны,

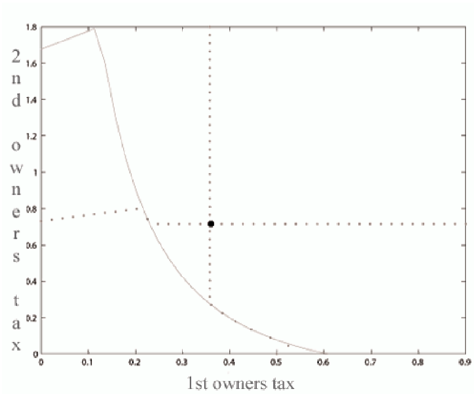

Рисунок 9. Равновесие по Нэшу вне области влияния, пространство стратегий

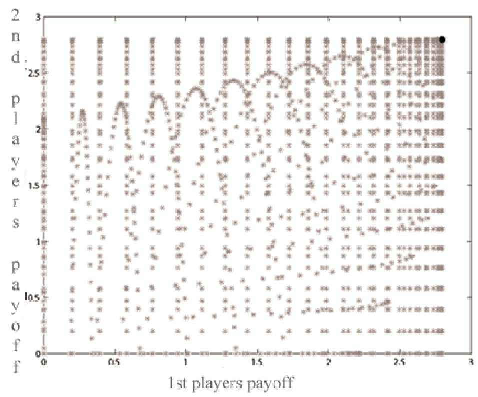

Рисунок 10. Равновесие по Нэшу вне области влияния, пространство выигрышей

а правые отрицательны.

$$
\begin{cases}
F_1(x_1) = \varphi_1^{-1}(c_1+x_1) + \dfrac{x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1+x_1)) + \varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2+x_2))}\Bigg|_{x_2=x_2(x_1)} > 0,\\
F_2(x_1) = \varphi_1^{-1}(c_1+x_1) + \dfrac{x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1+x_1))} < 0,\\
F_3(x_1) = \varphi_2^{-1}(c_2+x_2) + \dfrac{x_2}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1+x_1)) + \varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2+x_2))}\Bigg|_{x_2=x_2(x_1)} > 0,\\
F_4(x_1) = \varphi_2^{-1}(c_2+x_2) + \dfrac{x_2}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2+x_2))}\Bigg|_{x_2=x_2(x_1)} < 0,\\
\varphi_1^{-1}(c_1+x_1) + \varphi_2^{-1}(c_2+x_2) = y_0.
\end{cases}
\tag{4.20}
$$

Обозначим $t_1, \ldots, t_4$ корни уравнений $F_1 = 0, \ldots, F_4 = 0$, соответственно. Покажем, что каждая из функций $F_1, \ldots, F_4$ имеет не более одного корня на отрезке $[\varphi_1(y_0) - c_1, \varphi_1(0) - c_1]$, соответствующем части кривой BD, заключенной между точками B и D.

Рассмотрим, например, функцию $F_3(x_1)$. С учетом (2.3) и равенства $c_1 + x_1 = \varphi_1(y_1)$, можно показать, что производная

$$\frac{dF_3}{dx_1} < 0. \tag{4.21}$$

Аналогичный результат может быть получен для остальных функций. Из знакопостоянства производной следует единственность корня каждого из уравнений $F_1 = 0, \ldots, F_4 = 0$ (они могут и не лежать между точками $[\varphi_1(y_0) - c_1$ и $\varphi_1(0) - c_1])$.

Точка t_2 всегда расположена левее точки t_1, а точка t_3 – левее точки t_4. Таким образом, отрезок, целиком состоящий из равновесий по Нэшу (мы запишем выражения только для координат x_1), является пересечением следующих трех множеств:

$$[x_1^l, x_1^r] = [\varphi_1(y_0) - c_1, \varphi_1(0) - c_1] \cap [t_2, t_1] \cap [t_3, t_4]. \tag{4.22}$$

Рассмотрим, наконец, область BCD. В ней игроки первого уровня не оказывают влияния друг на друга, и равновесные стратегии находятся из уравнений типа (3.9). Если выполнено условие $y_1^* + y_2^* < y_0$, то найденная пара (x_1^*, x_2^*) действительно является равновесием и расположена внутри области BCD. Этот случай показан на рис. 9 и рис. 10.

Проиллюстрируем зависимость равновесия по Нэшу от параметров задачи. В случае, когда точки равновесия по Нэшу заполняют некоторый отрезок, мы будем изображать весь этот отрезок. Зависимость равновесия от начального количества ресурса (в симметричном случае) показана на рис. 12.

Замечание 4.3. В случае, когда множество равновесий по Нэшу – отрезок, игроки должны до начала игры договориться, какое именно равновесие они выберут. Рассматриваемый отрезок является в данном случае «переговорным множеством».

4.3. Кооперация игроков первого уровня

В случае сговора игроков первого уровня (в кооперативном случае) мы уже имеем дело не с двумя независимыми игроками первого уровня, а с одним игроком, стратегией которого является пара (x_1, x_2). Его выигрыш складывается из выигрышей 1-го и 2-го игроков. Он решает следующую оптимизационную задачу:

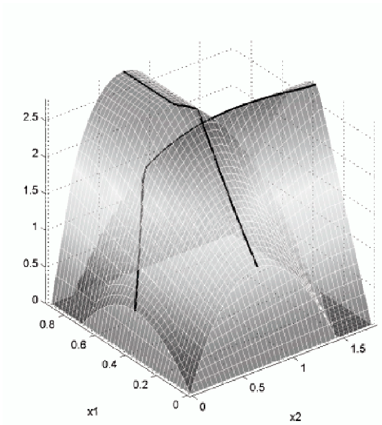

Рисунок 11. Функции выигрыша игроков первого уровня

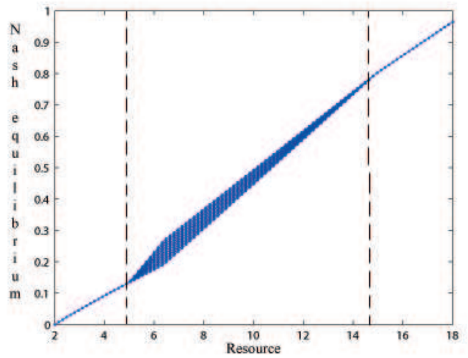

Рисунок 12. Зависимость равновесия по Нэшу от количества ресурса

$$u(x_1^{coop}, x_2^{coop}) = \max_{x_1, x_2 \geqslant 0} u(x_1, x_2) = \max_{x_1, x_2 \geqslant 0} (u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2)). \quad (4.23)$$

Заметим, что максимум в (4.23) не может достигаться ниже кривой BD, т.к. игроки могут сместить свои стратегии вдоль линий $x_1 - x_2 = const$ до линии BD, увеличивая свой выигрыш. При таком согласованном увеличении налогов отклик разработчика изменяться не будет, хотя его доходы будут падать. Значит, максимум достигается в области BCD.

Строгая выпуклость вверх функции u в области BCD следует из условия (2.3) (см. раздел 3). Покажем, что область BCD также выпукла. На кривой BD зависимость $x_2 = \gamma(x_1)$ задается уравнением (4.8). Покажем, что кривая BD лежит выше касательной к ней:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} = \left. \frac{\varphi_2''(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2)) + \varphi_1''(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)) \frac{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))}}{(\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)))^2} \right|_{x_2 = \gamma(x_1)} > 0. \quad (4.24)$$

Из всего вышесказанного следует существование и единственность решения задачи (4.23). Так как $u_1 = 0$ при $x_1 = \varphi_1(0) - c_1$, а $u_2 = 0$

при $x_2 = \varphi_2(0) - c_2$, мы можем учитывать только ограничение кривой BD и переформулировать задачу:

$$\begin{cases} -x_1\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) - x_2\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) \to \min, \\ f(x_1, x_2) = \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \varphi_1^{-1}(c_2 + x_2) \leqslant y_0. \end{cases} \tag{4.25}$$

Запишем необходимые и достаточные условия минимума:

$$\begin{cases} \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1) + \dfrac{\lambda - x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))} = 0, \\ \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2) + \dfrac{\lambda - x_2}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))} = 0, \\ \lambda f(x_1, x_2) = 0, \\ \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

При $\lambda \neq 0$ минимум достигается на BD и находится из следующих условий:

$$\begin{cases} \varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1)) + x_1 = \\ \quad = \varphi_2^{-1}(c_2 + x_2)\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2)) + x_2, \\ \left(\dfrac{x_1}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(c_1 + x_1))} + \dfrac{x_2}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(c_2 + x_2))}\right) + y_0 < 0, \\ x_2 = \gamma(x_1). \end{cases} \tag{4.27}$$

Если же система (4.27) неразрешима, то решением задачи (4.23) будет пара решений (3.9) игры 1×1 для первого и второго регионов. В этом случае решение задачи о кооперации совпадает с равновесием по Нэшу. Очевидно, при таких условиях кооперация не играет роли.

5. Игра $N \times 1$

Рассмотрим игру, в которой участвуют $N \geqslant 2$ игроков первого уровня и один игрок второго уровня (N лидеров и один последователь). Будем считать, что игроки первого уровня симметричны, и ограничимся поиском симметричного решения игры. Запишем функцию выигрыша разработчика:

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} [\omega(y_i) - (c + x_i)y_i]. \tag{5.1}$$

Рассмотрим необходимые условия экстремума (являющиеся и достаточными условиями максимума вследствие сильной выпуклости вверх функции v по $\mathbf{y}$) вблизи симметричного равновесия по Нэшу. Предположим, что все игроки выбрали симметричные стратегии x^{eq}, а один отклонился от нее на малую величину:

$$\begin{cases} -\varphi(y_i) + c + x^{eq} - \lambda_i + \lambda_0 = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ -\varphi(y_N) + c + x_N - \lambda_N + \lambda_0 = 0, \\ \lambda_i y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \\ \lambda_0 (\sum\limits_{i=1}^{N} y_i - y_0) = 0, \\ \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{5.2}$$

Найдем оптимальный отклик $\mathbf{y}^{opt}$ в этом случае. Рассмотрим все возможные комбинации нулевых и ненулевых коэффициентов Лагранжа λ_i. Если $\lambda_0 = 0$, то игроки не влияют друг на друга, и игра распадается на N игр 1×1. Необходимым и достаточным условием такого расположения максимума является выполнение следующего неравенства:

$$\varphi^{-1}(c + x^{eq}) < \frac{y_0}{N}. \tag{5.3}$$

Если же $\lambda_0 \neq 0$, то все $\lambda_i = 0, i = 1, \ldots, N$ в силу симметрии задачи и малости отклонения N-го игрока. В этом случае получается система уравнений

$$\begin{cases} \lambda_0 = \varphi(y_i) - (c + x^{eq}) > 0, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ \lambda_0 = \varphi(y_N) - (c + x_N) > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} y_i = y_0, \end{cases} \tag{5.4}$$

из которой получается следующее уравнение для y_N (учитывая симметрию поведения первых $N-1$ игроков):

$$\varphi\left(\frac{y_0 - y_N}{N-1}\right) - (c + x^{eq}) - \varphi(y_N) + (c + x_N) = 0. \tag{5.5}$$

Если все игроки кроме N-го придерживаются равновесных по Нэшу стратегий, то функция выигрыша N-го игрока $u_N(\mathbf{x}) = x_N y_N$

имеет максимум по x_N в равновесной точке. Найдем оптимальную стратегию N-го игрока при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий x^{eq}. Равновесие по Нэшу мы найдем из условия $x_N^{opt} = x^{eq}$.

Если масимум $u_N(\mathbf{x})$ достигается в области, где игроки не влияют друг на друга, то x_N^{opt} и x^{eq} находятся по формулам раздела 3. Если же максимум достигается при активном ограничении, то его можно найти из следующего условия:

$$\frac{du_N}{dx_N} = y_N + x_N \frac{dy_N}{dx_N} = y_N + \frac{x_N}{\frac{1}{N-1}\varphi'(\frac{y_0 - y_N}{N-1}) + \varphi'(y_N)} = 0. \tag{5.6}$$

Учитывая, что $y_N = \frac{y_0}{N}$ при $x_N^{opt} = x^{eq}$, получаем уравнение

$$x_N^{opt} = x^{eq} = -\frac{y_0 \varphi'\left(\frac{y_0}{N}\right)}{N-1}. \tag{5.7}$$

Если же максимум достигается на изломе, то, как мы видели в разделе 4.2, равновесие по Нэшу неединственно. В симметричном случае эту проблему легко решить, выбрав симметричную точку

$$\mathbf{x}^{eq} = (\varphi\left(\frac{y_0}{N}\right) - c, \ldots, \varphi\left(\frac{y_0}{N}\right) - c). \tag{5.8}$$

Запишем уравнения (5.5) и (5.7) для модельной функции (1.2):

$$\begin{aligned} &qRe^{-q\frac{y_0 - y_N}{N-1}} - (c + x^{eq}) = qRe^{-qy_N} - (c + x_N), \\ &x_N^{opt} = x^{eq} = \frac{q^2 R y_0 e^{-qy0/N}}{N-1}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Отметим следующий парадокс. В случае, когда равновесие по Нэшу достигается при активном ограничении, оптимальный отклик разработчика не зависит от количества ресурса R при симметричных налогах. Можно было бы ожидать, что и равновесие по Нэшу не зависит от R. Однако мы видим, что это не так. Дело в том, что количество ресурса влияет на устойчивость симметричного набора стратегий $\mathbf{x}^{eq} = (x, \ldots, x)$ относительно малых отклонений одного игрока, поскольку при несимметричных налогах оптимальный отклик разработчика зависит от R. Таким неявным образом R оказывает влияние на равновесие по Нэшу.

Обсудим теперь влияние конкуренции на выигрыши игроков обоих уровней. Рассмотрим некий регион с количесвом ресурса R_0 и коэффициентом плотности ресурса q_0. Разделим его на n частей. При этом на каждую часть будет приходиться $R_n = R_0/n$ ресурса. Чтобы плотность ресурса $q_n R_n$ была одинаковой при любых n, нужно формально положить $q_n = q_0 n$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_n(y) &= \frac{R_0}{n}(1 - e^{-q_0 n y}), \\ \varphi_n(y) &= q_0 R_0 e^{-q_0 n y}, \\ \varphi_n'(y) &= -n q_0^2 R_0 e^{-q_0 n y}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Исследуем зависимость от n выигрыша игрока второго уровня, а также суммарного выигрыша игроков первого уровня. Если равновесие по Нэшу достигается при пассивном ограничении, то зависимости от n нет, т.к. игроки в этом случае не оказывают влияния друг на друга. Поэтому сосредоточимся на случае, когда равновесие по Нэшу достигается при активном ограничении y_0. В этом случае

$$x^{eq}(n) = \frac{n q_0^2 R_0 y_0 e^{-q_0 y 0}}{n-1}, \tag{5.11}$$

если выполнено

$$c + x^{eq}(n) < \varphi(\frac{y_0}{n}) = q_0 R_0 e^{-q_0 y_0}. \tag{5.12}$$

В этом случае суммарный выигрыш разработчиков равен

$$U_n = n x^{eq} \frac{y_0}{n} = q_0^2 R_0 y_0^2 e^{-q_0 y_0} \frac{n}{n-1} = q_0^2 R_0 y_0^2 e^{-q_0 y_0} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right). \tag{5.13}$$

В пределе при $n \to \infty$ выигрыш разработчиков падает до уровня

$$U_\infty = q_0^2 R_0 y_0^2 e^{-q_0 y_0}. \tag{5.14}$$

На рис. 13 показана зависимость суммарного выигрыша игроков первого уровня от налога x (несложно показать, что она одинаковая для всех n). На графике отмечены выигрыши в точках равновесия по Нэшу, которые выбирают игроки в условиях конкуренции при различных n. На рис. 14 то же показано для игрока второго уровня. Его выигрыш с ростом n увеличивается до предельного значения

$$v_\infty = R_0(1 - e^{-q_0 y_0}) - (c + q_0^2 R_0 y_0 e^{-q_0 y_0}) y_0. \tag{5.15}$$

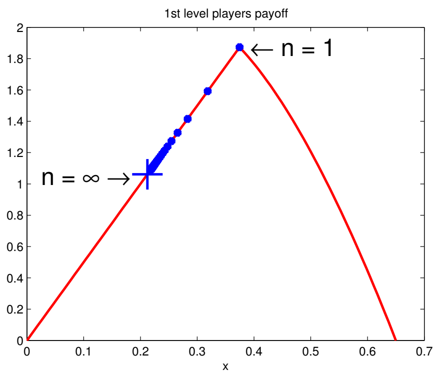

Рисунок 13. Суммарный выигрыш игроков первого уровня в точке равновесия по Нэшу в зависимости от количества игроков

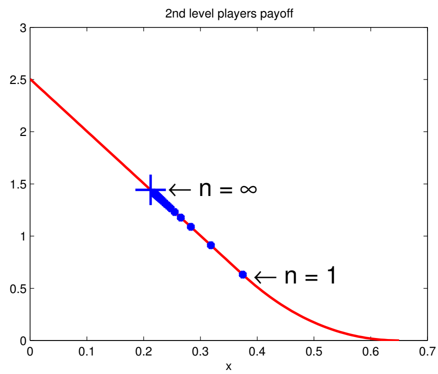

Рисунок 14. Суммарный выигрыш игрока второго уровня в точке равновесия по Нэшу в зависимости от количества игроков

Замечание 5.1. Заметим, что ситуация, когда при маленьких n равновесие достигается при пассивном ограничении, а при больших n – при активном, невозможна. Это следует из того, что в условие (5.3), как легко проверить, не входит n.

6. Заключение

В настоящей работе исследованы двухуровневые конфликтные системы, возникающие в задачах совместной разработки природных ресурсов. В этих системах игроки первого уровня устанавливают правила игры для игроков второго уровня. В одношаговой двухступенчатой игре (игре внутри сезона) между несколькими владельцами ресурса и разработчиком решена задача распределения усилий разработки по регионам при произвольных налогах, исследованы вопросы существования и единственности точки равновесия по Нэшу. Показано, что при определенных условиях точка равновесия по Нэшу будет неединственна и получено полное описание множества таких точек. Получено аналитическое решение игры для случая 2-х владельцев и для N симметричных владельцев. Все рассуждения проведены для функций выигрыша из довольно общего класса. Кроме того, исследованы эффекты кооперации владельцев, а также поведение решения при увеличении числа независимых владельцев. Показано, что увеличение числа владельцев приводит к перераспределению доходов между владельцами и разработчиком (в пользу разработчика), однако на объеме разработки это не сказывается.

Рассмотренная здесь задача допускает ряд обобщений. Во-первых, большой интерес представляют задачи с произвольным количеством как владельцев, так и разработчиков. Полное аналитическое исследование таких задач чрезвычайно громоздко и практически невозможно. При численном моделировании следует считаться с такой особенностью задачи, как неединственность равновесия по Нэшу. Другим важным обобщением задачи является рассмотрение игры в динамике, особенно интересное для возобновляемых природных ресурсов. Для решения таких задач, в которых происходит частичное восстановление ресурса в межсезонье, применяется метод динамического программирования. Отдельный интерес представляют задачи нахождения стационарных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Королев Ю.М., Голубцов П.В. *Моделирование задач совместной разработки природных ресурсов* // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция физики. 2009. С. 173–176.

2. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* Москва: Мир, 1985.

3. *Новости телеканала «Евроновости». В ЕС утверждают квоты на рыбную ловлю.* http://ru.euronews.net/2009/12/14/ fewer-fish-hard-times-and-norway-factor-affect-quota-talks/

4. Оуэн Г. *Теория игр.* Москва: Мир, 1971.

5. Clark C. *Restricted Access to Common-Property Fishery Resources: a Game-Theoretic Analysis* // Dynamic Optimization and Mathematical Economics (Eds. P.-T. Liu, Plenum). 1980. P. 117–132.

6. Golubtsov P.V., McKelvey R. *The Incomplete-Information Split-Stream FishWar: Examining the Implications of Competing Risks* // Natural Resource Modeling. 2007. V. 20. N 2. P. 263–300.

7. Homans F.R., Wilen J.E. *A Model of Regulated Open Access Resource Use* // Journal of Environmental Economics and Management. 1997. V. 32. P. 1–21.

8. Korolev Y.M., Golubtsov P.V. *Two Level Games in Natural Resource Management* // 14-th International Symposium on Dynamic Games and Applications. 2010.

9. Levhari D., Mirman L.J. *The Great Fish War: an Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution* // Bell Journal of Economics. 1980. V. 11. P. 322–344.

10. Luenberger D. G. *Linear and Nonlinear Programming.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1984.

11. McKelvey R. *Game-Theoretic Insights into the International Management of Fisheries* // Natural Resource Modeling. 1997. V. 10, N 2.

12. McKelvey R., Golubtsov P. *The Effects of Incomplete Information in Stochastic Common-Stock Harvesting Games* // Advances in Dynamic Games, AISDG. 2006. V. 8. P. 253–292.

13. McKelvey R., Golubtsov P. *A Regional Fisheries Strategic Management Game* // Natural Resource Modeling. 2010. (submitted)

14. McKelvey R., Golubtsov P., Miller K. and Cripe G. *Binational Management of a Transboundary Marine Fishery: Modeling the Destabilizing Impacts of Erratic Climatic Shifts* // Climate Change and the Economics of the World's Fisheries: Examples of Small Pelagic Stocks (Eds. R. Hannesson, M. Barange and S. Herrick Jr.). Edgar Elgar Press. 2006. P. 236–261.

15. Miller K., Golubtsov P., McKelvey R. *Fleets, Sites and Conservation Goals: Game Theoretic Insights on Management Options for Multinational Tuna Fisheries* // World Fisheries: a

social-ecological analysis (Eds. R. Ommer, I. Perry, P. Cury, K. Cochrane). Wiley-Blackwell, 2010. (in publication)

TWO LEVEL COMPETITIVE STRUCTURES IN COMMON RESOURCE DEVELOPMENT

Yury M. Korolev, Moscow State University, Moscow, post-graduate student (um.korolev@physics.msu.ru),
Peter V. Golubtsov, Moscow State University, Moscow, Dr.Sc., professor (pgolubtsov@gmail.com).

Abstract: The paper studies effects of owner-developer interaction in resources development. The resources are supposed to be allocated between several proprietors and several companies are permitted to develop them. Perhaps the most interesting example is marine fishery. We study such game in the context of multinational management of a transboundary marine fishery. It is well known that unconstrained harvesting often leads to resource depletion. This effect is often called "tragedy of commons". The situation becomes more complex when we take into account competition between the resource proprietors. Such interaction can be described as a game with players of two different types: proprietors and developers, called first and second level players, respectively. The first-level players establish rules (taxes on development efforts) for the second-level players, who in their turn optimize their strategies reasoning from these rules. Every developer receives a profit from resource selling and returns a part of it to the owner as a tax. The systems described here appear in management problems for energy resources, mineral resources, biological resources, water resources, etc.

Keywords: optimal resource management, common natural resources, tragedy of commons, two level games, Nash equilibrium, Stackelberg game with multiple leaders, mathematical modeling.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 52–73

УДК 517.977 + 519.63
ББК 22.18

УЧЁТ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ *

Николай Б. Мельников
Центральный экономико-математический институт РАН
117418, Москва, Нахимовский пр., 47
Московский государственный университет
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й уч. корпус
e-mail: melnikov@cs.msu.su

Браэн К. О'Нилл
Национальный центр исследований атмосферы
Боулдер, США
e-mail: boneill@ucar.edu

Михаель Г. Дальтон
Национальная администрация по океану и атмосфере
Сиэтл, США
e-mail: michael.dalton@noaa.gov

Учёт демографической неоднородности населения в рамках модели общего экономического равновесия приводит к необходимости рассматривать несколько различных групп потребителей, каждая из которых решает свою оптимизационную

* Настоящая работа выполнена в рамках совместного проекта в Международном институте прикладного системного анализа – IIASA (Австрия). Первый автор частично поддержан РФФИ (грант № 08–01–00685) и Минобразования РФ (грант № 2.1.1/2000).

задачу. В настоящей работе предложен метод усреднения потребительских характеристик, который позволяет учесть изменение во времени коэффициентов предпочтения и производительности труда. Рассмотрены приложения к конкретному типу моделей, которые используются для количественных оценок спроса на энергоносители. Показано, что спрос одной группы с усреднёнными характеристиками находится в хорошем согласии с совокупным спросом нескольких различных групп потребителей. Таким образом, наш метод позволяет расширить область применимости репрезентативного агента на широкий классе динамических многосекторных моделей с меняющимися во времени неоднородными характеристиками потребителей.

Ключевые слова: модели экономического роста, демографическая неоднородность, потребительские предпочтения, производительность труда, усреднение, спрос на энергоносители .

1. Введение

Модели общего экономического равновесия используются для описания замкнутой экономической системы, состоящей, в простейшем варианте, из агентов двух типов: производителей и потребителей. Каждый производитель j обладает технологией, позволяющей ему произвести $X_j(P)$ единиц продукции при заданных ценах P. Каждый потребитель i наделён набором ресурсов W_i и имеет набор предпочтений, представляемый его функцией спроса $Y_i(P)$.

В основе модели лежат два основных предположения. Первое состоит в том, что потребители и производители имеют полную информацию о ценах и принимают свои оптимальные решения, считая цены заданными. Оптимальное поведение означает, что потребители могут проводить сравнение наборов потребляемых товаров, максимизируя функцию полезности $U_i(Y_i)$ в рамках бюджетного ограничения, а каждый производитель определяет $X_j(P)$, максимизируя прибыль. Второе предположение заключается в том, что цены обеспечивают равновесие на рынках, т. е. спрос равен предложению:

$$\sum_i (Y_i(P) + W_i) = \sum_j X_j(P). \tag{1.1}$$

Конкурентным равновесием называется совокупность величин спроса $Y_i(P)$, предложения $X_j(P)$ и цен P, которая является решением системы уравнений, состоящей из условий оптимальности для $Y_i(P)$, условий оптимальности для $X_j(P)$ и соотношений баланса (1.1). Запасы ресурсов W_i являются задаваемым параметрами модели (подробнее см., напр., [6]).

Прикладные модели общего экономического равновесия – *computable general equilibrium models* (CGE модели) – могут иметь различную степень детализации по количеству регионов, секторов производства, типов ресурсов и пр., и содержать множество обобщений первоначальных предположений: включать торговлю, налоги, субсидии и пр. Эти обобщения диктуются теми характеристиками, которые необходимо вычислить с помощью данной модели. Так, объём выбросов углерода и спрос на энергоносители зависят от демографических факторов: рост населения, старение, урбанизация и пр. (см., напр., [5, 11]). Поэтому соответствующие динамические CGE модели должны учитывать связанную с этим потребительскую неоднородность и её зависимость от времени.

Неоднородность потребителей можно учесть, рассматривая несколько групп потребителей с различными характеристиками U_i и W_i. При этом каждой группе отвечает отдельная динамическая оптимизационная задача. Достоинство такого метода состоит в возможности явно учесть рыночные эффекты за счёт равновесных цен, а также динамику потребительских предпочтений [5].

Для практического использования наиболее удобными являются модели с репрезентативным агентом, в которых все потребители объединяются в одну группу с усредненными характеристиками U и W. Такой подход имеет очевидные преимущества благодаря простоте модели и быстроте вычислений, однако его использование оправдано лишь в том случае, если спрос в модели с репрезентативным агентом Y равен совокупному спросу $\sum_i Y_i$ в модели с несколькими группами потребителей и не зависит от числа групп N. (Вопрос применимости репрезентативного агента для двух популярных классов *односекторных* моделей исследован в [1].)

Задать функцию полезности репрезентативного агента аналитическим выражением $U = f(U_1, \ldots, U_N)$ можно лишь при довольно ограничительных предположениях на U_i и W_i (см., напр., [6] и ссылки там). В общем случае метод Негиши позволяет записать функцию полезности репрезентативного агента в виде суммы $U = \sum\limits_i \alpha_i U_i$ с некоторыми весами $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_i \alpha_i = 1$, которые необходимо рассматривать как дополнительные переменные задачи о конкурентном равновесии при N дополнительных условиях типа равенства (см., напр., [6]). В модели с функциями полезности и производственными функциями типа Кобба-Дугласа, при некоторых дополнительных предположениях, формулы для весов α_i удаётся получить в явном виде [10]. Однако уже в моделях с функциями постоянной эластичности замещения – *constant elasticity of substitution functions* (CES-функциями) – конкурентное равновесие можно найти только численно.

В прикладных моделях выражение функции полезности репрезентативного агента вида $U = f(U_1, \ldots, U_N)$ не даёт существенных преимуществ, так как сами функции U_i необходимо каким-то образом определять на основе имеющихся данных. Это приводит к необходимости использовать приближенные методы определения параметров функции полезности U произвольной группы потребителей.

Широко используемым классом функций полезности в динамических CGE-моделях является класс CES-функций на бесконечном промежутке времени:

$$U(\mathbf{c}) = \frac{1}{\psi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t n_t \left(\sum_j \left(\mu_j c_{jt} \right)^{\rho} \right)^{\frac{\psi}{\rho}}, \tag{1.2}$$

где c_{jt} – объем потребления j-го товара на душу населения в момент времени t, а n_t – число людей в группе в момент t, являющееся заданной функцией времени. Коэффициент дисконтирования $\beta \in (0,1)$, межвременной коэффициент замещения $\psi \in (-\infty, 1)$, $\psi \neq 0$, коэффициент замещения между товарами $\rho \in (-\infty, 1)$, $\rho \neq 0$, и коэффициент предпочтения j-го товара $\mu_j \in (0,1)$ являются параметрами, значения которых часто определяют на основе данных в начальный момент ($t = 0$) несмотря на то, что доли потребления различных товаров могут меняться со временем.

В настоящей работе предложен метод определения коэффициентов предпочтения μ_{it} функции (1.2) и производительности труда l_t, позволяющий явно учесть зависимость от времени на основе имеющихся данных (см. также обсуждение в [2]). Поскольку многосекторные CGE-модели не допускают аналитического решения, проверка эффективности предложенного нами метода также может быть проведена только численно. В разделе 2 метод изложен применительно к описанному в разделе 1 варианту модели Population-Environment-Technology – PET [5, 3, 4]. В разделе 3 на примере модели PET показано, что при использовании данного метода совокупные характеристики нескольких различных групп потребителей и репрезентативного агента находятся в хорошем согласии друг с другом, и этот результат устойчив к изменению параметров модели (подробнее см. [9]). Иной метод учёта зависимости от времени коэффициента предпочтения μ_{it}, предполагающий его линейно-логарифмическую зависимость от ВВП на душу населения, был использован в [11] (сравнение результатов см. в разделе 3).

2. Структура модели PET

Модель PET представляет собой динамическую модель общего экономического равновесия. В этом параграфе приведено описание модели PET для случая одного региона и нескольких групп потребителей с различными характеристиками (см. также [5, 4]). В [3] описан случай нескольких регионов и одной группы потребителей (модель с репрезентативным агентом).

В соответствии с общей идеологией моделей общего экономического равновесия каждая группа потребителей максимизирует функцию полезности на бесконечном промежутке времени, считая цены заданными (раздел 1.1). Производители максимизируют прибыль в каждый момент времени, также считая цены известными (раздел 1.2). Правительство играет нейтральную роль, осуществляя трансферты между производителями и потребителями в соответствии с заранее определёнными правилами (раздел 1.3). Наконец, условие сбалансированности рынков обеспечивает обратную связь цен со спросом и предложением (раздел 1.4). Получающаяся нелинейная система уравнений решается с помощью итерационной процедуры (раздел 1.5). Параметры модели определяются по исходным данным (раздел 1.6).

2.1. Потребители

Потребители объединены в N групп; i-ая группа решает задачу вида

$$\frac{1}{\psi}\sum_t \beta^t n_{it}\left(\sum_j (\mu_{ijt}c_{ijt})^\rho\right)^{\frac{\psi}{\rho}} \to \max, \tag{2.1}$$

$$\sum_j p_{jt}c_{ijt} + q_t x_{it} = (1-\theta_{it})w_t l_{it} + (1-\phi_{it})r_t k_{it} + g_{it}, \tag{2.2}$$

$$(1+\nu_{it})k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{it} + x_{it}, \qquad k_{i0} > 0, \tag{2.3}$$

где индекс j нумерует N_C потребительских товаров, а $t = 0, 1, \ldots$ – время. Переменными, относительно которых проводится максимизация, являются потребление c_{ijt}, инвестиции x_{it} и капитал k_{it} (на душу населения). Двойственные переменные: цены потребительских товаров p_{jt}, стоимость инвестиций q_t, стоимость капитала r_t, заработная плата w_t и трансферты правительства g_{it} (субсидии, если положительны, и платежи, если отрицательны) здесь предполагаются известными[1].

Заданными функциями являются объем населения n_{it}, производительность труда l_{it}, коэффициенты предпочтения μ_{ijt}, налоги на труд θ_{it} и капитал ϕ_{it}. Коэффициент роста населения в (2.3) равен $1 + \nu_{it} = n_{i,t+1}/n_{it}$, где ν_{it} – относительная скорость роста населения. Наконец, не зависящими от времени параметрами модели являются коэффициент дисконтирования $\beta \in (0,1)$, коэффициент замещения по времени $\psi \in (-\infty, 1)$, коэффициент замещения среди потребительских товаров $\rho \in (-\infty, 1)$ и коэффициент амортизации капитала $\delta \in (0,1)$.

Задача (2.1)–(2.3) решается в два этапа. Сначала решаем статическую задачу максимизации функции полезности для произвольного момента времени t, которая эквивалентна задаче минимизации расходов

$$\sum_j p_{jt}c_{ijt} \to \min, \qquad \left(\sum_j (\mu_{ijt}c_{ijt})^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = \bar{c}_{it} \tag{2.4}$$

---

[1] Модель также содержит трансферты между потребителями, которые мы для краткости не пишем.

при заданных ценах p_{jt} и заданном значении функции полезности $\bar{c}_{it}$. Применяя к (2.4) условия оптимальности первого порядка, находим функцию расходов

$$\min\left\{\sum_j p_{jt}c_{ijt}\right\} = \bar{p}_{it}\bar{c}_{it}, \tag{2.5}$$

где

$$\bar{p}_{it} = \left(\sum_j \left(\frac{p_{jt}}{\mu_{ijt}}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \tag{2.6}$$

– двойственный индекс цен.

Далее, пользуясь (2.4)–(2.6), переписываем задачу (2.1)–(2.3) в виде

$$\frac{1}{\psi}\sum_t \beta^t n_{it}\bar{c}_{it}^{\psi} \to \max, \tag{2.7}$$

$$\bar{p}_{it}\bar{c}_{it} + q_t x_{it} = (1-\theta_{it})w_t l_{it} + (1-\phi_{it})r_t k_{it} + g_{it}, \tag{2.8}$$

$$(1+\nu_{it})k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{it} + x_{it}, \quad k_{i0} > 0. \tag{2.9}$$

Исключая x_{it} из (2.8) и (2.9), приходим к одному ограничению

$$(1+\nu_{it})k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{it} + \frac{1}{q_t}\left[(1-\theta_{it})w_t l_{it} + (1-\phi_{it})r_t k_{it} + g_{it} - \bar{p}_{it}\bar{c}_{it}\right]. \tag{2.10}$$

Условия оптимальности первого порядка относительно агрегированного потребления $\bar{c}_{it}$ в задаче (2.7) и (2.10) дают

$$\frac{q_t}{\bar{p}_{it}}\bar{c}_{it}^{\psi-1} = \beta\left(\frac{(1-\delta)q_{t+1} + (1-\phi_{i,t+1})r_{t+1}}{\bar{p}_{i,t+1}}\right)\bar{c}_{i,t+1}^{\psi-1}. \tag{2.11}$$

Уравнение Эйлера (2.11) и уравнение потока капитала (2.10) вместе с условиями трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{it}k_{it} = 0, \tag{2.12}$$

где λ_{it} – множитель Лагранжа, являются достаточными условиями оптимальности в задаче (2.7)–(2.9). Более того, траектория единственна [12].

Для лучшего сравнения со случаем однородных потребителей, предполагается, что траектории всех групп потребителей выходят на общую траекторию сбалансированного роста при $t \to \infty$. Это означает, что асимптотически величины x_{it}, k_{it}, l_{it}, g_{it}, а значит и $\bar{c}_{it}$, растут с общей не зависящей от времени скоростью технологического роста ξ. Тогда при $t \to \infty$ уравнение (2.11) даёт[2]

$$(1+\xi)^{1-\psi} = \beta\left(1-\delta+\frac{(1-\phi)r}{q}\right), \tag{2.13}$$

где r, ϕ и q – долгосрочные стоимость капитала, налоги на доходы и стоимость инвестиций, соответственно.

2.2. Производители

Фирмы сгруппированы в секторы по типу производимого товара: N_C+1 секторов, производящих конечные продукты (N_C потребительских товаров и инвестиционный «товар») и N_E+1 секторов, производящих вспомогательные товары (N_E типов энергоресурсов и совокупную категорию вспомогательных товаров, называемую «материалами»). Для удобства общее количество секторов обозначено через $N_X = N_E+1+N_C+1$, и индекс товара всегда пробегает N_X категорий в указанном порядке (то есть, сначала энергоресурсы, затем материалы, потребительские товары и, наконец, инвестиции). Для простоты производственная функция в каждом секторе предполагается однородной первой степени (то есть предполагается постоянная отдача от масштаба).

В момент времени t каждый товар производится с помощью капитала K, труда L, агрегированного энергоресурса $\bar{E}$ и материалов M. Капитал и труд являются факторами производства. Производственная функция имеет вложенную CES-структуру (всюду, где речь идёт о фиксированном моменте времени, индекс t для краткости опускаем):

$$\begin{aligned} X = \gamma_X\,&\big(\alpha_K(G_K K)^{\rho_X} + \alpha_L(G_L L)^{\rho_X} + \\ &+\alpha_{\bar{E}}(G_{\bar{E}}\bar{E})^{\rho_X} + \alpha_M(G_M M)^{\rho_X}\big)^{1/\rho_X}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

[2]Из условий трансверсальности (2.12), пользуясь $\lambda_{it} = q_t\beta^t n_{it}\bar{c}_{it}^{\psi-1}/\bar{p}_{it}$, мы получаем верхнюю оценку на скорость технологического роста, которая допустима в модели: $1+\xi < (1/\beta)^{1/\psi}$ (предполагается, что $n_{it} \to n_i$ при $t \to \infty$).

с постоянной эластичностью замещения $\sigma_X = 1/(1-\rho_X)$. Здесь G_I – параметр производительности для $I = K, L, \bar{E}, M$. Параметр γ_X масштабирует производственные коэффициенты α_I так, чтобы их сумма равнялась единице. Значения α_I и G_I могут меняться от сектора к сектору и зависеть от времени.

Агрегированный энергоресурс $\bar{E}$ производится из N_E энергоресурсов E_i при помощи производственной функции

$$\bar{E} = \gamma_E \left(\sum_i \alpha_{E_i} (G_{E_i} E_i)^{\rho_E} \right)^{1/\rho_E}. \tag{2.15}$$

Для удобства сравнения с результатами [5] мы не вводим отдельной вложенной производственной функции для материалов.

Все коэффициенты производительности в (2.14) и (2.15), кроме G_L, обращаются в нуль при $t \to \infty$. Коэффициент производительности труда G_L во всех секторах стремится к $G = 1 + \xi$ на бесконечности, то есть предполагается, что в пределе производительность труда растёт с постоянной скоростью ξ.

Пусть τ_{E_i} обозначает налог на использование i-го энергоресурса, а τ_M – налог на использование материалов (зависимость от сектора производства для краткости опускаем). При помощи теории двойственности находим предельные затраты на энергию после уплаты налога:

$$P_{\bar{E}} = \frac{1}{\gamma_E} \left(\sum_i \alpha_{E_i}^{\frac{1}{1-\rho_E}} \left(\frac{(1+\tau_{E_i}) P_{E_i}}{G_{E_i}} \right)^{\frac{\rho_E}{\rho_E - 1}} \right)^{\frac{\rho_E - 1}{\rho_E}}. \tag{2.16}$$

Предельные затраты в секторе X равны

$$P_X = \frac{1}{\gamma_X} \left(\alpha_K^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{P_K}{G_K} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} + \alpha_L^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{P_L}{G_L} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} \right.$$
$$\left. + \alpha_{\bar{E}}^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{P_{\bar{E}}}{G_{\bar{E}}} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} + \alpha_M^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{(1+\tau_M) P_M}{G_M} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} \right)^{\frac{\rho_X - 1}{\rho_X}}. \tag{2.17}$$

Отметим, что функция предельных затрат в каждом производственном секторе включает налоги на использование энергоресурсов и материалов.

Пусть τ_X – налог на единицу выпущенной продукции в секторе X. Предположение о постоянной отдаче от масштаба и конкурентных рынках подразумевает, что равновесная прибыль равна нулю, и $P_{X_j} + \tau_{X_j}$ – цена, включающая налоги. Тогда, используя лемму Шеппарда, мы находим отношение объема затраченного ресурса к объёму выпуска, которое минимизирует затраты:

$$A_I = \left(\frac{1}{\alpha_I (\gamma_X G_I)^{\rho_X}} \cdot \frac{P_I}{P_X} \right)^{\frac{1}{\rho_X - 1}}, \tag{2.18}$$

для $I = K, L, \bar{E}$ и для $I = M$:

$$A_M = \left(\frac{1}{\alpha_M (\gamma_X G_M)^{\rho_X}} \cdot \frac{(1+\tau_M) P_M}{P_X} \right)^{\frac{1}{\rho_X - 1}}. \tag{2.19}$$

Аналогично, минимизирующее затраты отношение объема затраченного энергоресурса к объёму выпуска $A_{E_i} = E_i / \bar{E}$ равно

$$A_{E_i} = \left(\frac{1}{\alpha_{E_i} (\gamma_E G_{E_i})^{\rho_E}} \cdot \frac{(1+\tau_{E_i}) P_{E_i}}{P_{\bar{E}}} \right)^{\frac{1}{\rho_E - 1}}. \tag{2.20}$$

2.3. Правительство

В фиксированный момент t правительственные налоговые сборы $GREV$ равны сумме налогов на капитал и заработную плату, собранных со всех групп потребителей, и сумме налогов на прибыль по всем секторам производства:

$$\begin{gathered} GREV = \sum_{i=1}^{N_d} n_i(\phi_i r k_i + \theta_i w l_i) + \sum_{j=1}^{N_X} \left(\tau_{X_j} X_j + \sum_{s=1}^{N_E} \tau_{E_{s_j}} P_{E_{s_j}} E_{s_j} + \tau_{M_j} M_j \right) \\ = \sum_{i=1}^{N_d} (\phi_i P_K K_i + \theta_i P_L L_i) + \sum_{j=1}^{N_X} \left(\tau_{X_j} + \sum_{s=1}^{N_E} \tau_{E_{s_j}} P_{E_{s_j}} A_{E_{s_j}} A_{\bar{E}_j} + \tau_{M_j} A_{M_j} \right) X_j. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Нейтральность правительства достигается за счёт того, что закупки GP_t равны начальному значению GP_0 в реальном выражении:

$$GP_t = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0} (1+\xi)^t GP_0, \tag{2.22}$$

где $\bar{p}_t = N_d^{-1} \sum\limits_i \bar{p}_{it}$ – потребительский индекс цен. Правительственные трансферты состоят из суммы трансфертов потребителям в начальный момент и корректирующих трансфертов (LSA_t), которые призваны сбалансировать бюджет правительства в момент t. В результате трансферты i-ой группе (на душу населения) равны

$$g_{it} = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0}(1+\xi)^t g_{i0} + \frac{LSA_t}{n_t}, \tag{2.23}$$

где g_{i0} – трансферты i-ой группе потребителей в начальный момент и $n_t = \sum\limits_i n_{it}$ – общий объем населения. Тогда правительственные расходы складываются из закупок и суммарных трасфертов:

$$GEXP_t = GP_t + GT_t, \qquad GT_t = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0}(1+\xi)^t \sum_{i=1}^{N_d} n_{it} g_{i0} + LSA_t. \tag{2.24}$$

Отметим, что $LSA_0 = 0$, поскольку значения в начальный момент берутся из таблицы межотраслевого баланса.

Для вычисления спроса правительства его закупки определяются функцией типа Кобба-Дугласа от переменных K, L, E_i, M:

$$GP = K^{\alpha_K} L^{\alpha_L} \cdots E_i^{\alpha_{E_i}} \cdots M^{\alpha_M}.$$

Следовательно, отношение $A_I^{GP} = I/GP$ используемого ресурса I к общему объёму закупок GP равно $A_K^{GP} = \alpha_K/P_K$ для капитала, $A_L^{GP} = \alpha_L/P_L$ для труда, $A_{E_i}^{GP} = \alpha_{E_i}/P_{E_i}$ для энергии и $A_M^{GP} = \alpha_M/P_M$ для материалов.

2.4. Рынки

В конкурентном равновесии рынки сбалансированы. Другими словами, в каждый момент t, совокупное предложение равно совокупному спросу для факторов производства:

$$K^{AD} = K^{AS}, \qquad L^{AD} = L^{AS}, \tag{2.25}$$

и каждого производимого продукта:

$$X_j^{AD} = X_j^{AS}, \quad j = \overline{1, N_X}. \tag{2.26}$$

Совокупное предложение j-го товара $X_j^{AS} = X_j$ определено производственной функцией (2.14). Совокупный спрос на j-ый конечный продукт (потребление или инвестиции) имеет вид

$$X_{N_E+1+j}^{AD} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i c_{ij}, \quad j = \overline{1, N_C}, \qquad X_{N_X}^{AD} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i x_i. \tag{2.27}$$

Спрос на каждый конечный продукт определяется на основе последовательности значений капитала (см. далее описание вычислительной процедуры). А именно, инвестиции определяются из уравнения, описывающего динамику капитала (2.3), после чего потребление вычисляется с помощью бюджетного ограничения (2.2).

Совокупный спрос на капитал и труд имеют вид

$$K^{AD} = \sum_{j=1}^{N_X} A_K^j X_j + A_K^{GP} GP, \qquad L^{AD} = \sum_{j=1}^{N_X} A_L^j X_j + A_L^{GP} GP. \tag{2.28}$$

Совокупное предложение капитала и труда является суммой предложений всех потребительских групп:

$$K^{AS} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i k_i, \qquad L^{AS} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i l_i. \tag{2.29}$$

Совокупный спрос на энергоресурсы E_i и материалы M есть сумма спросов секторов, производящих конечные продукты и вспомогательные продукты (то есть сами энергоресурсы и материалы):

$$X_i^{AD} = \sum_{j=1}^{N_E+1} A_i^j X_j^{AD} + Y_i, \qquad i = \overline{1, N_E+1}, \tag{2.30}$$

где $Y_i = \sum\limits_{j>N_E+1} A_i^j X_j + A_i^{GP} GP$. Используя векторные обозначения $x = (X_1^{AD}, \ldots, X_{N_E+1}^{AD})'$ и $y = (Y_1, \ldots, Y_{N_E+1})'$, можем переписать (2.30) в виде

$$x = Ax + y \quad \text{или} \quad x = (\mathbf{1} - A)^{-1} y. \tag{2.31}$$

Здесь $A = (A_i^j)$ – квадратная $(N_E+1) \times (N_E+1)$-матрица отношений затрат к выпускам, а $\mathbf{1}$ – единичная матрица такого же размера.

Наконец, соотношение, регулирующее правительственный бюджет имеет вид

$$GREV = GEXP, \tag{2.32}$$

где доходы и расходы определены формулами (2.21) и (2.24).

Таким образом, конкурентное равновесие определяется как решение системы уравнений, состоящей из условий оптимальности для потребителей, условий оптимальности для производителей и уравнений баланса (2.25), (2.26) и (2.32). Эта система уравнений решается относительно величин потребления c_{ij}, инвестиций x_i, капитала k_i и цен P_{X_j}, P_K, P_L и LSA, при всех t. Потребительские цены на товары и стоимость инвестиций включают налоги:

$$p_j = P_{N_E+1+j} + \tau_{N_E+1+j}, \qquad q = P_{N_X} + \tau_{X_{N_X}},$$

где $j = \overline{1, N_C}$. Стоимость капитала и труда одинаковы для потребителей и производителей: $r = P_K$ и $w = P_L$. Вследствие закона Вальраса одна из цен может быть выбрана в качестве единицы измерения. В модели PET такой ценой является зарплата, которая нормирована на единицу: $w = 1$. При этом балансовое соотношение для труда отбрасывается.

2.5. Вычислительная процедура

Динамика потребительских характеристик может рассматриваться как переход из одного равновесного состояния в другое. Поскольку нас интересует сам переходный процесс, а не асимптотическое поведение, мы заменяем бесконечный интервал достаточно большим конечным отрезком $[0, T]$. Предполагается, что с момента $t = T$ динамика определяется траекторией сбалансированного роста (2.13). Таким образом, задача об определении конкурентного равновесия сведена к системе конечного числа нелинейных уравнений.

Алгоритм решения стартует с начального приближения для последовательности значений капитала k_{it}, $i = \overline{1, N_d}$ и $t = 0, 1, \ldots, T$, которая определяет последовательность инвестиций x_{it} в соответствии с (2.9). После того, как определены инвестиции, потребление $\bar{c}_{it}$ вычисляется при помощи бюджетного ограничения (2.8). Правительственные закупки GP_t определяются по формуле (2.22). Как только конечный спрос Y_j (потребление плюс инвестиции плюс правительственные закупки) определены, уровень производства X_j вспомогательных продуктов (энергоресурсов и материалов) вычисляются по формуле (2.30), что в свою очередь даёт величины произведённых конечных продуктов. Цены P_{X_j} и P_K вычисляются при помощи метода Ньютона на основе полученных величин. Отсюда находим новое приближение для последовательности значений капитала k_{it}.

Описанная процедура итерируется до тех пор пока не выполнится уравнение Эйлера (2.11). Для этого используется модификация алгоритма Гаусса-Зейделя (подробнее см. [5, 4]).

2.6. Начальные данные и параметры

Калибровка функции полезности описана в разделе 2. Производственные коэффициенты α_{X_j} и масштабные множители γ_{X_j} калибруются по данным таблицы межотраслевого баланса в начальный момент. Значения коэффициентов замещения ρ_{X_j} определяются величинами налога на выбросы углерода. Производительности G_j являются свободными параметрами, которые определяются величинами валового национального продукта, выбросов углерода и спроса на энергоносители на определённом отрезке времени. Параметры правительства калибруются по величинам налогов и закупок из таблицы межотраслевого баланса в начальный момент.

Величина инвестиций в таблице межотраслевого баланса в начальный момент масштабируется так, чтобы выполнялось соотношение

$$[(1+\nu_0)-(1-\delta)]k_0 = x_0,$$

где $k_0 = \sum\limits_i k_{i0}$ и $x_0 = \sum\limits_i x_{i0}$. Значение коэффициента амортизации капитала полагается равным $\delta = 0.1$. Для того, чтобы сохранить условия баланса в начальный момент, вектор потребления масштабируется так, чтобы выполнялось условие равенства совокупного спроса и совокупной добавленной стоимости. После этого используется метод RAS [7], обеспечивающий равенство совокупного предложения и спроса в начальный момент для каждого ресурса в производстве.

По известному значению ставки процента R коэффициент дисконтирования β вычисляется по формуле

$$1/\beta = (1+R)(1+\xi)^{\psi-1}. \tag{2.33}$$

Это соотношение следует из предельного уравнения Эйлера (2.13). Действительно, по определению

$$1 + R_t = \frac{(1-\delta)q_t + (1+\psi_t)r_t}{q_{t-1}}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим $R = -\delta + (1-\phi)r/q$. Подставляя это выражение в (2.13), приходим к (2.33). Вместе с оценкой $(1+\xi)^{\psi} < 1/\beta$ (см. сноску перед формулой (2.13)), выражение (2.33) даёт $\xi < R$. В частности, при $\xi = 0$ и $R = 0.05$, получаем значение $\beta \approx 0.95$, используемое в расчётах.

3. Усреднение характеристик потребителей

3.1. Калибровка функций CES по начальным данным

Традиционный способ калибровки CES-функции полезности вида (2.1) следующий. Рассматривается задача максимизации функции полезности в начальный момент (номер группы i здесь для краткости опускаем)

$$\left(\sum_j \left(\mu_j c_{j0}\right)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \to \max \tag{3.1}$$

при бюджетных ограничениях

$$\sum_j p_{j0} c_{j0} = m_0, \tag{3.2}$$

где p_{j0} и m_0 – цены и расходы в начальный момент. Тогда при $\rho \neq 0$ потребительский спрос в задаче (3.1) и (3.2) даётся формулой

$$c_{j0} = \frac{\left(\frac{\mu_j^{\rho}}{p_{j0}}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}{\sum_{j'} \mu_{j'}^{\rho} \left(\frac{\mu_{j'}^{\rho}}{p_{j'0}}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}}} m_0. \tag{3.3}$$

Пусть дополнительно цены в начальный момент p_{j0} взяты за единицу и коэффициенты предпочтения нормированы соотношением

$$\sum_j \mu_j^{\frac{1}{1-\rho}} = 1.$$

Тогда в силу (3.2) и (3.3) коэффициент предпочтения j-го товара вычисляется по формуле

$$\mu_j = \left(\frac{c_{j0}}{\sum\limits_{j'} c_{j'0}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{3.4}$$

Соответственно коэффициент предпочтения j-го товара в i-ой группе потребителей вычисляется по формуле

$$\mu_{ij} = \left(\frac{c_{ij0}}{\sum\limits_{j'} c_{ij'0}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{3.5}$$

Доли потребления в начальный момент в формулах (3.4) и (3.5) определяются по исходным данным.

В предельном случае $\rho \to 0$ формула (3.1) даёт функцию полезности Кобба-Дугласа, которая эквивалентна функции $u(\mathbf{c}_t) = \sum\limits_j \mu_j \log c_{jt}$. Вместо формул (3.4) и (3.5) имеем

$$\mu_j = \frac{c_{j0}}{\sum\limits_{j'} c_{j'0}}, \qquad \mu_{ij} = \frac{c_{ij0}}{\sum\limits_{j'} c_{ij'0}}.$$

Непосредственно видно, что в этом случае

$$\mu_j = \sum_i \nu_i \mu_{ij}, \quad \text{где} \quad \nu_i = \frac{\sum\limits_j c_{ij0}}{\sum\limits_j c_{j0}}.$$

Тем не менее равновесие в модели с несколькими группами потребителей и в модели с репрезентативным агентом даёт разный совокупный спрос, если только производственный сектор не описывается функциями Кобба-Дугласа (подробности см. в [10]).

Количественные различия совокупного спроса $\sum\limits_j c_{ijt}$ нескольких групп потребителей и репрезентативного агента c_{jt} мы исследуем на примере модели PET в разделе 3 (анализ статического случая см. в [8]).

3.2. Коэффициенты предпочтения, зависящие от времени

Как хорошо известно, использование постоянной отдачи от масштаба, т.е. CES-функции полезности, не достаточно хорошо подтверждается эконометрическим анализом. Поэтому мы вводим зависящие от времени коэффициенты предпочтения, переписывая функцию полезности (2.1) в виде

$$U(\mathbf{c}) = \frac{1}{\psi} \sum_t \beta^t n_t \left(\sum_j \big(\mu_{jt} c_{jt}\big)^\rho \right)^{\frac{\psi}{\rho}}.$$

Здесь в качестве коэффициентов предпочтения мы используем *прогнозируемые* доли потребления:

$$\mu_{jt} = \left(\frac{c^*_{jt}}{\sum\limits_{j'} c^*_{j't}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{3.6}$$

Считаем, что изменение потребления во времени в основном связано с изменением численности населения. Поэтому

$$c^*_{jt} = \frac{1}{n_t} \sum_i \theta_{ij0} n_{it} c_{i0}, \tag{3.7}$$

где θ_{ij0} – доля j-го товара в общем потреблении i-ой группы и c_{i0} – потребление на душу в начальный момент; n_{it} – прогнозируемая численность населения в i-ой группе и $n_t = \sum\limits_i n_{it}$ – общая прогнозируемая численность населения.

3.3. Усреднение труда и капитала

Из-за ограниченного объёма данных ресурсы труда и капитала обычно вычисляются на основе среднего объёма сбережений k_0 на душу и средней заработной платы l_0 в начальный момент. Далее k_0 служит начальным значением для последовательности значений k_t, которая определяется уравнениями модели. Труд полагается равным $\tilde{L}^{AS}_t = n_t l_0$. В этом случае, труд зависит лишь от роста населения, но не от изменения состава населения.

Предположим, что в начальный момент известны производительности l_{i0} различных групп потребителей. Тогда производительность репрезентативного агента вычисляется по формуле

$$l_0 = \frac{\sum\limits_i n_{i0} l_{i0}}{\sum\limits_i n_{i0}}.$$

Если мы игнорируем изменение производительности во времени, то объем трудового ресурса записывается как и ранее формулой

$$\tilde{L}_t^{AS} = n_t l_0 = \frac{n_t}{n_0} L_0^{AS}.$$

С другой стороны, мы можем учесть изменение состава населения, вводя зависящую от времени производительность:

$$l_t = \frac{\sum\limits_i n_{it} l_{i0}}{\sum\limits_i n_{it}}. \tag{3.8}$$

Тогда мы приходим к выражению

$$L_t^{AS} = n_t l_t = \sum_i n_{it} l_{i0}.$$

В модели с несколькими группами потребителей совокупное предложение труда полагается равным $L_{it}^{AS} = n_{it} l_{i0}$, а значения средних сбережений на душу населения k_{i0} используются для вычисления предложения капитала.

4. Результаты и обсуждение

Эффективность метода усреднения определяется зависимостью результатов от степени усреднения (т.е. от числа рассматриваемых в модели групп потребителей). Нами проведено сравнение значений совокупных характеристик, вычисленных в модели РЕТ с репрезентативным агентом (одна группа с усредненными характеристиками) и с несколькими группами, которые обладают разными характеристиками.

Данные указывают, что наибольшая неоднородность потребителей наблюдается в развивающихся странах [13], поэтому расчёты проводились по реальным данным для Индии (подробности см. в [10]). В случае с независящими от времени производительностью и коэффициентами предпочтения, калиброванными по начальным данным (μ_0 и l_0), величины совокупного спроса на потребительские товары и энергоносители в модели с репрезентативным агентом и несколькими группами могут иметь значительные различия (1.5–2 раза). В случае с независящим от времени коэффициентами предпочтения, но зависящей от времени производительностью (μ_0 и l_t) различия существенно уменьшаются, но тем не менее могут достигать 25%. Наконец, в случае, когда и производительность, и коэффициенты предпочтения учитывают зависимость от времени (μ_t и l_t), различия становятся незначительными (в пределах 1%). Таким образом, рыночные эффекты в последнем случае становятся несущественными.

Полученные результаты позволяют заключить, что предложенный нами метод усреднения хорошо отражает динамику в модели с неоднородными потребителями. Тот факт, что зависимость от времени коэффициентов предпочтения слабо влияет на результаты, согласуется с расчётами [11]. Отметим, что предложенный метод построения репрезентативного агента не использует специфики модели PET и может быть использован в широком классе динамических многосекторных CGE-моделей.

Результаты получены в классе функций полезности однородных (первой степени) относительно потребления и имеющих зависящие от времени коэффициенты предпочтения. Это подразумевает, что относительная ценность каждого товара может меняться, но степень взаимозаменяемости товаров остаётся постоянной. В настоящий момент ведётся работа по обобщению теории репрезентативного агента на класс неоднородных функций, а также над возможностью усреднения величин замещения между товарами. В будущем мы планируем исследовать эти же вопросы относительно коэффициента замещения по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caselli F., and Ventura J. *A representative consumer theory of distribution* // American Economic Review. 2000. V. 90. P. 909–926.

2. Creedy J., and Guest R. *Population ageing and intertemporal consumption: representative agent versus social planner* // Economic Modelling. 2008. V. 25. P. 485–498.

3. Dalton M., and Goulder L. *An intertemporal general equilibrium model for analyzing global interactions between population, the environment and technology: PET model structure and data.* Unpublished document, California State University Monterey Bay, 2001, 26 pp.

4. Dalton M., Jiang L., Pachauri S., and O'Neill B. *Demographic Change and Future Carbon Emissions in China and India.* Population Association of America, Annual Meeting, NY, 2007. 31 pp.

5. Dalton M., O'Neill B., Prskawetz A., Jiang L., and Pitkin J. *Population aging and future carbon emissions in the United States* // Energy economics. 2008. V. 30. P. 642–675.

6. Kehoe T. *Computation and multiplicity of equilibria.* Ch. 38. In: Hildenbrand, W., Sonnenschein, H. (Eds.), Handbook of Mathematical Economics. V. IV. North-Holland, Amsterdam. 1991. P. 2049–2144.

7. Lahr M., and L. de Mesnard *Biproportional Techniques in Input-Output Analysis: Table Updating and Structural Analysis* // Economic Systems Research. 2004. V. 16. P. 115–134.

8. Melnikov N.B., O'Neill B.C. and Dalton M.G. *Accounting for the household heterogeneity in general equilibrium models.* IIASA Interim Report IR–09–051, 2009, Laxenburg, Austria: IIASA.

9. Melnikov N.B., O'Neill B.C. and Dalton M.G. *Accounting for household heterogeneity in dynamic general equilibrium economic*

growth models // Journal Economic Dynamics and Control. 2010 (submitted).

10. Melnikov N.B., O'Neill B.C. and Dalton M.G. *Consumer aggregation in dynamic general equilibrium models with CES utility functions* // Proceedings of Intstitute of Mathematics and Mechanics. 2010. V. 16. N 5 (in press).

11. Paltsev S., Reilly J.M., Jacoby H.D., Eckaus R.S., McFarland J., Sarofim M., Asadoorian M., and Babiker M. *The MIT Emissions Prediction and Policy Analysis (EPPA) Model: Version 4, MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change.* Report 125, Cambridge, MA.

12. Stokey N.L., Lucas R., and Prescott E.C. *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1989.

13. Zigova K., Fuchs R., Jiang L., O'Neill B.C., and Pachauri S. *Household survey data used in calibrating the Population-Environment-Technology model.* IIASA Interim Report IR–09–046, 2009, Laxenburg, Austria: IIASA.

ACCOUNTING FOR HOUSEHOLD HETEROGENEITY IN DYNAMIC GENERAL EQUILIBRIUM MODELS

Nickolay B. Melnikov, Central Economics and Mathematics Institute of RAS; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, Cand.Sc., docent (melnikov@cs.msu.su)
Brian C. O'Neill, Climate and Global Dynamics Division & Integrated Science Program, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, USA (boneill@ucar.edu)
Michael G. Dalton, U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration, Seattle, WA, USA (michael.dalton@noaa.gov)

Abstract: Accounting for demographic heterogeneity in the general equilibrium framework leads to solving separate optimization problem for several consumer groups with different characteristics. In the present paper, an aggregation method of consumer characteristics is proposed that allows to take into account time variations in the preference coefficients and labor productivity. The method is applied to a particular type of models that are used to assess energy demand. We show that demand of the single population group that has averaged characteristics of the whole population is in good agreement with total demand of several different consumer groups. Thus, our method allows to extend the scope of application for the representative consumer approach to a wide class of multisector models with heterogeneous consumer characteristics that can change over time.

Keywords: economic growth, computable general equilibrium, demographic heterogeneity, consumer preferences, labor productivity, aggregation, energy demand.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 74–83

УДК 517.977
ББК 22.18

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Николай Н. Петров*
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: npetrov@udmnet.ru

Рассматриваются две линейные нестационарные задачи уклонения одного убегающего от группы преследователей при условии, что игроки обладают равными динамическими возможностями и убегающий не покидает пределы некоторого множества. Доказывается, что если число преследователей меньше размерности пространства, то убегающий уклоняется от встречи на интервале $[t_0, \infty)$.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, задача уклонения.

1. Введение

Важное направление современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов. При этом представляет интерес получение как необходимых, так и достаточных условий разрешимости задач уклонения и преследования по начальным данным и параметрам игры. В данной работе рассматриваются две нестационарные линейные дифференциальные игры с простой матрицей.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления»

2. Нестационарная задача с простым движением

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geq 2)$ рассматривается следующая дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = b(t)u_i, \ \|u_i\| \leq 1. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = b(t)v, \ \|v\| \leq 1. \tag{2.2}$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает выпуклого множества D $(D \subset \mathbb{R}^k)$ с непустой внутренностью.

При $b(t) \equiv 1$ и отсутствии фазовых ограничений задача рассматривалась в [7,8], при $b(t) \equiv 1$ с фазовыми ограничениями задача рассматривалась в [2,3,6,10]. Нестационарный случай при условии $n \geq k$ рассматривался в [1].

Пусть σ – некоторое разбиение $t_0 < t_1 < \ldots < t_s \ldots$ интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

Определение 2.1. *Кусочно-программной стратегией V игрока E, заданной на $[0, \infty)$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений $\{c^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие величинам*

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v = v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $||v_l(t)|| \leq 1, \ y(t) \in D, \ t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру через Γ.

Определение 2.2. *Будем говорить, что в игре Γ происходит уклонение от встречи, если существуют разбиение σ интервала $[t_0, \infty)$ не имеющее конечных точек сгущения, стратегия V убегающего E,* *соответствующая разбиению σ такие, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ имеет место*

$$x_i(t) \neq y(t), \ t \geq t_0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $y(t)$ – реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E.

Теорема 2.1. *Пусть $y^0 \in \mathrm{Int} D$, b – функция, ограниченная на любом компакте и $n < k$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Так как $y^0 \in \mathrm{Int} D$, то существует $D_r(q)$ – шар радиуса r с центром в точке q такой, что $y^0 \in \mathrm{Int} D_r(q) \subset D$. Пусть далее ε – расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$, $I_l = [t_0 + l - 1, t_0 + l], b_l > 0$ такое, что $|b(t)| \leq b_l$ для всех $t \in I_l$,

$$\Omega_j(\tau) = \left\{ t > \tau \ : \ \int\limits_{\tau}^{t} |b(s)| ds = \frac{\varepsilon}{j+1} \right\}.$$

Отметим, что если $t \in \Omega(\tau)$ и $\tau, t \in I_l$ при некотором l, то

$$\frac{\varepsilon}{j+1} = \int\limits_{\tau}^{t} |b(s)| ds \leq b_l (t - \tau).$$

Поэтому

$$t - \tau \geq \frac{\varepsilon}{b_l (j+1)}. \tag{2.3}$$

Для каждого отрезка I_l определим разбиение σ_l данного отрезка и число m_l следующим образом. Рассмотрим отрезок I_1. Пусть $\tau_0^1 = t_0$, $j = 1, 2 \ldots$

$$\tau_j^1 = \begin{cases} \inf\{t > \tau_{j-1}^1, \ t \in \Omega_j(\tau_{j-1}^1)\}, \ \text{если } \tau_j^1 < t_0 + 1 \text{ и } \Omega_j(\tau_{j-1}^1) \neq \emptyset, \\ t_0 + 1 \text{ иначе} \end{cases}$$

Далее полагаем $m_1 = \min\{j : \tau_j^1 = t_0 + 1\}, \sigma_1 = \{\tau_0^1, \ldots, \tau_{m_1}^1\}$. Рассмотрим теперь отрезок I_2. Пусть $\tau_0^2 = t_0 + 1$. Для всех $j = 1, 2 \ldots$

$$\tau_j^2 = \inf\{t > \tau_{j-1}^2, \ t \in \Omega_{j+m_1}(\tau_{j-1}^2)\},$$

если

$$\tau_j^2 < t_0 + 2 \text{ и } \Omega_{j+m_1}(\tau_{j-1}^2) \neq \emptyset$$

и $\tau_j^2 = t_0 + 2$, если соответствующие условия не выполняются.

Далее полагаем

$$m_2 = m_1 + \min\{j : \tau_j^2 = t_0 + 2\},\ \sigma_2 = \{\tau_0^2, \ldots, \tau_{m_2-m_1}^2\}.$$

Предположим, что уже определены разбиение σ_{l-1} отрезка I_{l-1} и число m_{l-1}. Рассмотрим отрезок I_l. Пусть $\tau_0^l = t_0 + l - 1$. Для всех $j = 1, 2 \ldots$

$$\tau_j^l = \inf\{t > \tau_{j-1}^2,\ t \in \Omega_{j+m_{l-1}}(\tau_{j-1}^l)\},$$

если

$$\tau_j^l < t_0 + l \text{ и } \Omega_{j+m_{l-1}}(\tau_{j-1}^l) \neq \emptyset$$

и $\tau_j^l = t_0 + l$, если соответствующие условия не выполняются.

Далее полагаем

$$m_l = m_{l-1} + \min\{j : \tau_j^l = t_0 + l\},\ \sigma_l = \{\tau_0^l, \ldots, \tau_{m_l-m_{l-1}}^2\}.$$

Отметим, что в силу (2.3) числа m_l существуют для всех l. В качестве разбиения σ промежутка $[t_0, \infty)$ возьмем такое разбиение, что сужение σ на любой отрезок I_l совпадает с σ_l. Пусть $\sigma = \{\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r < \ldots\}$. Задаем стратегию V убегающего следующим образом: $v(t) = v_j \mathrm{sign} b(t), t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, где v_j определяется из условий

$$(v_j, x_i(\tau_j) - y(\tau_j)) = 0, i = 1, \ldots, n, (v_j, y(\tau_j) - q) \leq 0, \|v_j\| = 1.$$

Так как $n < k$, то система имеет решение.

Покажем, что V является стратегией уклонения. Рассмотрим отрезок $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Тогда из систем (2.1), (2.2) имеем

$$y(t) = y(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} |b(s)| ds \cdot v_j,$$

$$x_i(t) = x_i(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} b(s) u_i(s) ds.$$

Следовательно

$$\|x_i(t)-y(t)\| = \|x_i(\tau_j)-y(\tau_j)-M_j(t)v_j+M_j(t)\hat{u}_i(t)\| \geq$$
$$\geq \|x_i(\tau_j)-y(\tau_j)-M_j(t)v_j\| - M_j(t) =$$
$$= \sqrt{\|a_i(\tau_j)\|^2 - 2M_j(t)(a_i(\tau_j),v_j)+M_j^2(t)} - M_j(t) =$$
$$= \sqrt{\|a_i(\tau_j)\|^2 + M_j^2(t)} - M_j(t), \tag{2.4}$$

где $a_i(\tau_j) = x_i(\tau_j)-y(\tau_j)$, $M_j(t) = \int\limits_{\tau_j}^{t} |b(s)|ds$,

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{M_j(t)} \int\limits_{\tau_j}^{t} b(s)u_i(s)ds, \text{ если } M_j(t)\neq 0 \\ 0, \text{ если } M_j(t)=0 \end{cases},$$

причем $\|\hat{u}_i(t)\| \leq 1$ для всех $t\in[\tau_j,\tau_{j+1}]$. Из (2.4) следует, что если $x_i(\tau_j)\neq y(\tau_j)$, то $x_i(t)\neq y(t)$ для всех $t\in[\tau_j,\tau_{j+1}]$. Это означает, что если поимка не произошла до момента τ_j, то она не произойдет и отрезке $[\tau_j,\tau_{j+1}]$. Так как $x_i^0\neq y^0$ для всех i, то $y(t)\neq x_i(t)$ для всех $i, t\geq t_0$.

Докажем теперь, что $y(t)\in D$ для всех $t\geq t_0$. Рассмотрим отрезок $[\tau_0,\tau_1]$. Тогда

$$\|y(t)-q\| = \|y^0+M_1(t)v_1-q\| =$$
$$= \sqrt{\|y^0-q\|^2+2(y^0-q,v_1)M_1(t)+M_1^2(t)} \leq \sqrt{(r-\varepsilon)^2+M_1^2(t)}.$$

Так как $M_1(t)\leq \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t\in[\tau_0,\tau_1]$, то

$$\|y(t)-q\| \leq \sqrt{(r-\varepsilon)^2+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq r-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым доказано, что $y(t)\in D$ для всех $t\in[\tau_0,\tau_1]$.

Предположим, что неравенство $\|y(t)-q\|\leq r-\frac{\varepsilon}{j+1}$ доказано для всех $t\in[\tau_{j-1},\tau_j], j\leq l-1$. Докажем, что для всех $t\in[\tau_{l-1},\tau_l]$ справедливо неравенство $\|y(t)-q\|\leq r-\frac{\varepsilon}{l+1}$.

$$\|y(t)-q\| = \|y(t_{l-1})+M_l(t)v_l-q\| =$$
$$= \sqrt{\|y(t_{l-1})-q\|^2+2(y(t_{l-1})-q,v_l)M_l(t)+M_l^2(t)} \leq$$
$$\leq \sqrt{(r-\frac{\varepsilon}{l})^2+M_l^2(t)}.$$

Так как $M_l(t) \le \frac{\varepsilon}{l+1}$ для всех $t \in [\tau_{l-1}, \tau_l]$ то

$$\|y(t) - q\| \le \sqrt{(r - \frac{\varepsilon}{l})^2 + \left(\frac{\varepsilon}{l+1}\right)^2} \le r - \frac{\varepsilon}{l+1}.$$

Тем самым доказано, что V является стратегией уклонения. □

3. Линейная нестационарная задача уклонения в конусе

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \ge 2)$ рассматривается следующая дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + u_i, \ \|u_i\| \le 1. \tag{3.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = a(t)y + v, \ \|v\| \le 1. \tag{3.2}$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \ne y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого конуса

$$D = \{y : \ y \in \mathbb{R}^k, \ \ (p_j, y) \le 0, j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ – единичные векторы $\mathbb{R}^k$ такие, что $\mathrm{Int}D \ne \emptyset$.

Убегающий использует кусочно-программные стратегии.

При $a(t) \equiv a, a < 0$ и отсутствии фазовых ограничений задача рассматривалась в [9], при $a(t) \equiv a, a < 0, n \ge k$ с фазовыми ограничениями задача рассматривалась в [4]. Случай $a(t) \equiv a, a < 0, n < k$ с фазовыми ограничениями рассматривался в [5], а случай $a(t) \equiv a, a > 0, n < k$ с фазовыми ограничениями рассматривался в [11].

Теорема 3.1. *Пусть $y^0 \in \mathrm{Int}D$, a – функция, ограниченная на любом компакте и $n < k$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Рассмотрим отрезок $I_l, t_l = t_0 + l$. В системах (3.1), (3.2) сделаем замену переменных

$$x_i = e^{\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} w_i^l,\ y = e^{\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} z^l.$$

Получим системы

$$\dot{w}_i^l = e^{-\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} u_i,\ \dot{z}^l = e^{-\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} v. \qquad (3.3)$$

Отметим, что $x_i(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $i, \tau \in I_l$ тогда и только тогда, когда $w_i^l(\tau) = z^l(\tau)$. Кроме того $y(t) \in D$ тогда и только тогда, когда $z^l(t) \in D$. Пусть далее

$$b_l(t) = e^{-\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds}, K_l = e^{-\int\limits_{t_l}^{t_{l-1}} a(s)ds},$$

$D_r(q)$ – шар радиуса r с центром в точке q такой, что $y^0 \subset D_r(q) \subset D$, ε – расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$, $q_1 = K_1 q, r_1 = K_1 r, \varepsilon_1 = K_1\varepsilon$, $q_l = K_l q_{l-1},\ r_l = K_l r_{l-1},\ l \geq 2$. Отметим, что $b_l(t) > 0$ для всех $t \in I_l$.

Для отрезка I_1 по ε_1, и функции b_1 определим число m_1 и разбиение σ_1 по схеме предыдущего раздела. Для отрезка I_2 по $\varepsilon_2 = \frac{K_2\varepsilon_1}{m_1+2}$ и функции b_2 определим число m_2 и разбиение σ_2 и так далее. Для отрезка I_l по $\varepsilon_l = \frac{K_l\varepsilon_{l-1}}{m_{l-1}+2}$ и функции b_l определим число m_l и разбиение σ_l. В качестве разбиения σ промежутка $[t_0, \infty)$ возьмем такое разбиение, сужение которого на любой отрезок I_l совпадает с σ_l.

Пусть $\tau_j, \tau_{j+1} \in \sigma_l$. Задаем стратегию V убегающего E на $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ полагая $v(t) = v_j^l$, где v_j^l определяется из следующей системы

$$(v_j^l, z^l(\tau_j) - w_i^l(\tau_j)) = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ (v_j^l, q_l - z^l(\tau_j)) \geq 0,\ \|v_j^l\| = 1.$$

Так как $n < k$, то v_j^l всегда существует. Покажем, что стратегия V гарантирует уклонение от встречи.

1. Покажем, что $z^l(t) \neq w_i^l(t)$ для всех $i, t \in I_l$. Пусть $\tau_j, \tau_{j+1} \in \sigma_l$. Из систем (3.3) имеем

$$z^l(t) = z^l(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} b_l(s)ds \cdot v_j^l,$$

$$w_i^l(t) = w_i^l(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} b_l(s)u_i(s)ds.$$

Поэтому для всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$

$$\|z^l(t) - w_i^l(t)\| \geq \|z^l(\tau_j) + M_j^l(t)v_j^l - w_i^l(\tau_j)\| - M_j^l(t) =$$
$$= \sqrt{(a_i^l(\tau_j))^2 + 2M_j^l(t)(v_j^l, a_i^l(\tau_j)) + (M_j^l(t))^2} - M_j^l(t) =$$
$$= \sqrt{(a_i^l(\tau_j))^2 - (M_j^l(t))^2} - M_j^l(t) > 0 \text{ если } a_i^l(\tau_j) \neq 0.$$

Здесь

$$M_j^l(t) = \int\limits_{\tau_j}^{t} b_l(s)ds, \;\; a_i^l(\tau_j) = z^l(\tau_j) - w_i^l(\tau_j).$$

Поэтому, если поимка не произошла до момента τ_j, то она не произойдет и на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Так как $z^0 - w_i^0 \neq 0$ для всех i, то доказано, что $z^l(t) \neq w_i^l(t)$ для всех $i, l, t \in I_l$.

2. Покажем, что для всех натуральных $l, t \in I_l$ справедливы неравенства

$$\|z^l(t) - q_l\| \leq r_l - \frac{\varepsilon_l}{j+1}, \; t \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \; (\tau_j, \tau_{j+1} \in \sigma_l). \tag{3.4}$$

Рассмотрим отрезок $I_1 = [t_0, t_1]$ и разбиение σ_1 данного отрезка.

$$\|z^1(t_0) - q_1\| = \|K_1 y^0 - K_1 q\| = K_1(r - \varepsilon) = r_1 - \varepsilon_1.$$

Пусть $t \in [\tau_0^1, \tau_1^1]$. Тогда

$$\|z^1(t) - q_1\| = \|z^1(t_0) + M_0^1(t)v_1^1 - q_1\| =$$
$$\sqrt{\|z^1(t_0) - q_1\|^2 + 2M_0^1(t)(z^1(t_0) - q_1, v_1^1) + (M_0^1(t))^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{(r_1 - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq r_1 - \frac{\varepsilon_1}{2},$$

так как $M_0^1(t) \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$ для всех $t \in [\tau_0^1, \tau_1^1]$ в силу выбора τ_1^1. Дальнейшее доказательство неравенства (3.4) для I_1 проводится аналогично доказательству соответствующего неравенства из предыдущего раздела.

Предположим, что неравенство (3.4) доказано для всех $I_l, l \leq s$. Докажем неравенство для I_{s+1}. В силу предположения справедливо неравенство

$$\|z^s(t_s) - q_s\| \leq r_s - \frac{\varepsilon_s}{m_s + 2}.$$

Тогда

$$\|z^{s+1}(t_s) - q_{s+1}\| = \|K_{s+1}(y(t_s) - q_s)\| =$$
$$= K_{s+1}\|z^s(t_s) - q_s\| \leq K_{s+1}(r_s - \frac{\varepsilon_s}{m_s + 2}) = r_{s+1} - \varepsilon_{s+1}.$$

Поэтому доказательство неравенства (3.4) для I_{s+1} аналогично доказательству (3.4) для I_1. Следовательно

$$z^l(t) \subset D_{r_l}(q_l) \subset D$$

для всех $t \in I_l$ и всех l. Поэтому $y(t) \in D$ для всех $t \geq t_0$. Значит построенная стратегия V является стратегией уклонения. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А.С., Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

2. Иванов Р.П. *Простое преследование на компакте* // ДАН СССР. 1978. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.

3. Ковшов А.М. *Стратегия параллельного сближения в игре простого преследования на сфере. Геодезическое сближение* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 4. С. 41–62.

4. Петров Н.Н. *Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями*// Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1060–1063.

5. Петров Н.Н. *Одна задача уклонения от многих преследователей*// Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 41–43.

6. Петров Н.Н. *Простое преследование при наличии фазовых ограничений.* Л., 1984. 16с. - Деп. в ВИНИТИ 27.03.84, № 1684-84.

7. Петросян Л.А. *Игры преследования со многими участниками* // Известия АН Арм. ССР. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.

8. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами*// Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

9. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. *Об одной задаче группового преследования*// Кибернетика. 1979. № 6. С. 145–146.

10. Сатимов Н.Ю., Кучкаров А.Ш. *Уклонение от встречи со многими преследователями на поверхности*// Узбекский математический журнал. 2001. № 1. С. 51–55.

11. Шуравина И.Н. *Об одной задаче уклонения в конусе* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып.2. С. 13–16.

TO THE NON-STATIONARY PROBLEM OF THE GROUP PURSUIT WITH PHASE RESTRICTIONS.

Nikolay N. Petrov, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Izhevsk, Dr. Sc., professor (npetrov@udmnet.ru).

Abstract: In this article two linear non-stationary pursuit-evasion problems with one evader and the group of pursuers under condition of equivalent dynamic possibilities and that the evader can not leave the certain set are considered. It's proved that if the number of pursuers is less than the dimension of the space, then the evader can avoid meeting on the interval $[t_0, \infty)$.

Keywords: differential game, group pursuit, evasion problem.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 84–105

УДК 519.83
ББК 22.173

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДВУХШАГОВАЯ ИГРА ε-НАИЛУЧШИХ ОТВЕТОВ РАЗМЕРНОСТИ 2×2

Анастасия В. Райгородская
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й уч. корпус
e-mail: asik.vmk@gmail.com

Изучается повторяющаяся 2×2 игра ε-наилучших ответов, в которой каждый игрок в каждом последующем раунде назначает свою чистую стратегию, основываясь на результате случайного эксперимента; последний генерируется произвольной смешанной стратегией игрока, которая с большой, но, вообще говоря, отличной от 1 вероятностью предписывает этому игроку выбор его наилучшего ответа на чистую стратегию партнера, реализованную в предшествующем раунде. Описанные способы принятия решений (называемые в работе функциями ε-наилучшего ответа) интерпретируются как поведенческие стратегии игроков. Данные стратегии определяют стохастическую игру, в которой выигрышами игроков выступают их ожидаемые средние выигрыши, получаемые на протяжении всех раундов. Игра анализируется для случая двух раундов: дается классификация равновесий по Нэшу и проводится сравнение равновесных значений со средними выигрышами, получаемыми игроками в ходе детерминированного применения чистых стратегий наилучшего ответа в каждом раунде.

Ключевые слова: повторяющиеся игры, биматричные игры, наилучший ответ.

1. Введение

В теории повторяющихся (эволюционных) игр, изучающей модели принятия рациональных решений в процессах многократного взаимодействия игроков (см., напр., [3-6, 9-11]), сравнение различных режимов взаимодействия производится, как правило, с позиции динамических систем: оценивается, каким образом столкновение различных поведенческих стратегий влияет на последовательность принимаемых решений. Основы теоретико-игрового подхода к анализу альтернативных способов принятия решений были заложены в [8], где введены в рассмотрение игры на классах ограниченно рациональных поведенческих стратегий игроков и определено понятие равновесных наборов поведенческих стратегий. Подход к оптимизации траекторий повторяющихся игр на классах поведенческих стратегий игроков, основанный на методах математической теории управления, был предложен в [7].

Данная работа следует в русле подхода [8]. Рассматривается повторяющаяся биматричная игра размерности 2×2, в которой выбор стратегии каждым игроком в каждом последующем раунде диктуется желанием данного игрока наилучшим для себя образом ответить на последнее действие партнера. Отправной моделью служит, таким образом, повторяющаяся игра наилучших ответов, в которой данное правило принятия решений применяется без каких-либо отклонений. Затем классы поведенческих стратегий игроков расширяются: каждому игроку разрешается принимать решение о выборе своей чистой стратегии на следующем раунде, основываясь на результате случайного эксперимента. Последний генерируется произвольной смешанной стратегией игрока, которая предписывает большую, но, вообще говоря, отличную от 1, вероятность наилучшему ответу на чистую стратегию партнера, реализованную в предшествующем раунде; при этом в каждом последующем раунде допускается, вообще говоря, ненулевая вероятность выбора игроком своего наихудшего ответа на последнюю из реализованных чистых стратегий партнера. Такие поведенческие стратегии игроков названы в работе функциями ε-наилучшего ответа.

В разделе 2 вводится в рассмотрение стохастическая игра на классах функций ε-наилучшего ответа (игра ε-наилучших ответов), выигрышами игроков выступают математические ожидания их средних выигрышей, получаемых на протяжении всех раундов.

В разделе 3 игра ε-наилучших ответов исследуется для случая двух раундов. Дается классификация равновесий по Нэшу и проводится сравнение равновесных значений со средними выигрышами, получаемыми игроками в исходной детерминированной игре наилучших ответов.

Раздел 4 содержит доказательства основных утверждений.

2. Определения. Постановка задачи

Расмотрим биматричную игру размерности 2×2 с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$, соответственно, первого и второго игроков. Как обычно, строки матриц выигрыша соответствуют номерам чистых стратегий первого игрока, столбцы – номерам стратегий второго игрока. Под смешанной стратегией первого игрока понимаем, как обычно, произвольное вероятностное распределение $(\alpha, 1-\alpha)$ на множестве стратегий этого игрока; здесь α – вероятность выбора игроком своей чистой стратегии 1, а $1-\alpha$ – вероятность выбора игроком своей чистой стратегии 2. В соответствии с принятым стандартом, смешанную стратегию $(\alpha, 1-\alpha)$ первого игрока отождествляем с ее первой компонентой $\alpha \in [0,1]$. Аналогично, смешанную стратегию второго игрока отождествляем с числом $\beta \in [0,1]$, имеющим смысл вероятности выбора вторым игроком своей чистой стратегии 1; при этом $1-\beta$ есть вероятность выбора им своей чистой стратегии 2. Всякая пара (α, β), где α и β – смешанные стратегии первого и второго игроков, соответственно, естественным образом превращает множество всех пар чистых стратегий игроков в вероятностное пространство, а выигрыши первого и второго игроков – в случайные величины на этом вероятностном пространстве; математические ожидания данных случайных величин трактуются как выигрыши игроков, отвечающие паре (α, β).

Будем предполагать, что в рассматриваемой биматричной игре не существует точек равновесия по Нэшу с компонентами в чистых стратегиях. Тогда, в соответствии с известной классификацией 2×2-игр (см. [1]), в данной биматричной игре существует единственная точка равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях; при этом, согласно [1], не нарушая общности (при необходимости изменяя нумерацию игроков), можно считать, что

$$b_{12} > b_{11}, \quad b_{21} > b_{22}, \quad a_{11} > a_{21}, \quad a_{22} > a_{12}. \tag{2.1}$$

Далее предполагаем, что неравенства (2.1) имеют место. Тогда, обозначая через i_j^+ наилучший ответ первого игрока в классе чистых стратегий этого игрока на чистую стратегию j второго игрока и через j_i^+ наилучший ответ второго игрока в классе чистых стратегий этого игрока на чистую стратегию i первого игрока, имеем

$$i_1^+ = 1, \quad i_2^+ = 2 \quad j_1^+ = 2, \quad j_2^+ = 1. \tag{2.2}$$

Зафиксируем какую-либо пару (i_0, j_0) чистых стратегий игроков.

Под *повторяющейся игрой наилучших ответов* длины n понимаем процесс повторения биматричной игры, состоящий из раундов $0, 1, \ldots, n$, такой, что в каждом последующем раунде $k+1$ каждый игрок выбирает чистую стратегию наилучшего ответа на чистую стратегию партнера, реализованную в раунде k; априорно заданная пара (i_0, j_0) чистых стратегий реализуется в раунде 0. По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель «близорукого» поведения неоднократно взаимодействующих игроков, в котором каждый из них стремится максимизировать свой выигрыш в каждом последующем взаимодействии, исходя из гипотезы о том, что в этом взаимодействии партнер повторит свой предшествующий выбор. Повторяющаяся игра наилучших ответов описывается дискретной динамической системой вида

$$(i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_{j_k}^+, j_{i_k}^+) \quad (k = 0, \ldots, n-1) \tag{2.3}$$

в произведении

$$X = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \tag{2.4}$$

множеств чистых стратегий первого и второго игроков. Для средних выигрышей первого и второго игроков в повторяющейся игре наилучших ответов (нулевой раунд из подсчета исключаем) имеем, соответственно, выражения

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i_k,j_k}, \quad \bar{b}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i_k,j_k}. \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение процесс, аналогичный повторяющейся игре наилучших ответов, в котором, однако, игроки назначают свои действия на последующих раундах не детерминированным образом, отдавая вероятностные предпочтения своим чистым стратегиям наилучшего ответа. В этом процессе для каждого игрока инструментом генерирования решений выступает та или иная функция ε-наилучшего ответа. Приведем соответствующее определение.

Фиксируем $\varepsilon \in [0, 1/2)$. *Функцией ε-наилучшего ответа первого игрока* назовем любую пару (α_1, α_2) смешанных стратегий первого игрока такую, что

$$1 \geq \alpha_1 \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \varepsilon. \tag{2.6}$$

Ввиду (2.2) данное определение подразумевает, что первый игрок, выбирая смешанную стратегию α_j в ответ на реализацию вторым игроком его чистой стратегии $(j = 1, 2)$ задает большую вероятность своей чистой стратегии наилучшего ответа на эту чистую стратегию второго игрока. Аналогично, *функцией ε-наилучшего ответа второго игрока* назовем любую пару (β_1, β_2) смешанных стратегий вторго игрока такую, что

$$0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon, \quad 1 \geq \beta_2 \geq 1 - \varepsilon. \tag{2.7}$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ для указанных выше смешанных стратегий игроков имеем $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$; таким образом, 0-наилучшие стратегии первого и второго игроков предписывают каждому из них, при реализации той или иной чистой стратегии партнера, с вероятностью 1 применять соответствующую чистую стратегию наилучшего ответа.

Каждую пару

$$S = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)), \tag{2.8}$$

где (α_1, α_2) — функция ε-наилучшего ответа первого игрока и (β_1, β_2) — функция ε-наилучшего ответа второго игрока, будем называть *парой функций ε-наилучших ответов* игроков.

Для произвольной пары S (2.8) функций ε-наилучших ответов игроков рассмотрим случайный процесс, который назовем *повторяющейся игрой ε-наилучших ответов* длины n, соответствующей S. Процесс состоит из раундов $0, 1, \dots, n$, в каждом из которых игроки разыгрывают биматричную игру. Процесс развивается по следующей схеме. В раунде 0 реализуется начальная пара (i_0, j_0) чистых стратегий игроков. Если в раунде k реализуется пара (i_k, j_k) чистых стратегий игроков, то первый игрок для выбора своей чистой стратегии i_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию α_{j_k}; аналогично, второй игрок для выбора своей чистой стратегии j_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию β_{i_k}. По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель «близорукого» поведения взаимодействующих игроков, которая, однако, в случае $\varepsilon > 0$, допускает большую гибкость в выборе действий по сравнению с повторяющейся игрой наилучших ответов: в каждом последующем раунде каждый игрок выбирает свою будущую чистую стратегию из условия вероятностного предпочтения своей чистой стратегии наилучшего ответа на реализующуюся чистую стратегию противника. При $\varepsilon = 0$ повторяющаяся игра ε-наилучших ответов, очевидно, переходит в (детерминированную) повторяющуюся игру наилучших ответов.

Далее считаем $\varepsilon > 0$. Уточним определение обозначенного выше случайного процесса. Пространством его состояний служит произведение X (2.4) множеств чистых стратегий первого и второго игроков, его временной шкалой – индесы $0, 1, \dots, n$ раундов повторяющейся игры. Пространство X понимаем как измеримое пространство, снабженное алгеброй всех его подмножеств. Для каждого момента $k = 0, 1, \dots, n-1$ функция на X вида

$$p_S(\cdot|(i_k, j_k)) = \alpha_{j_k} \times \beta_{i_k} = (\alpha_{j_k}, 1 - \alpha_{j_k}) \times (\beta_{i_k}, 1 - \beta_{i_k})$$

(см. (2.8)) задает переходную вероятность между двумя экземплярами измеримого пространства X, отвечающим моментам времени k и

$k+1$. Очевидно,

$$p_S((i_k,j_k)|(i_{k-1},j_{k-1}))=\begin{cases}\alpha_{j_{k-1}}\beta_{i_{k-1}}, & \text{если } (i_k,j_k)=(1,1);\\ (1-\alpha_{j_{k-1}})\beta_{i_{k-1}}, & \text{если } (i_k,j_k)=(2,1);\\ \alpha_{j_{k-1}}(1-\beta_{i_{k-1}}), & \text{если } (i_k,j_k)=(1,2);\\ (1-\alpha_{j_{k-1}})(1-\beta_{i_{k-1}}), & \text{если } (i_k,j_k)=(2,2).\end{cases} \tag{2.9}$$

В соответствии со стандартным определением случайного процесса (см., например, теорему Ионеску-Тулча [2]), указанные переходные вероятности и начальное состояние (i_0,j_0) определяют случайный процесс, траекториями которого выступают последовательности

$$t=((i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n))\in X^n. \tag{2.10}$$

Множество X^{n+1} всех траекторий данного случайного процесса имеет структуру вероятностного пространства с вероятностью p_S, определенной на множестве всех подмножеств X^{n+1}. Последняя вероятность характеризуется своими значениями на всех одноэлементных подмножествах X^{n+1}, которые мы далее отождествляем с траекториями. Именно, для всякой траектории t (2.10)

$$p_{n,S}(t)=p_S((i_n,j_n)|(i_{n-1},j_{n-1}))\ldots p_S((i_1,j_1)|(i_0,j_0)). \tag{2.11}$$

Так определенный случайный процесс будем рассматривать как формальную модель повторяющейся игры ε-наилучших ответов длины n, соответствующей паре S (2.8) функций ε-наилучшего ответа игроков.

Для каждой траектории t (2.10) введем значения средних выигрышей, соответственно, первого и второго игроков, реализуемых на данной траектории:

$$a_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i_k,j_k},\quad b(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_{i_k,j_k}. \tag{2.12}$$

Для каждой пары S функций ε-наилучших ответов игроков функции $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ представляют собой случайные величины на вероятностном пространстве (X^{n+1},p_S). Математические ожидания случайных величин (2.12), задаваемые выражениями

$$a_n[S]=\int\limits_{X^n}a_n(t)p_{n,S}(dt),\quad b_n[S]=\int\limits_{X^n}b_n(t)p_{n,S}(dt), \tag{2.13}$$

назовем *ожидаемыми средними выигрышами*, соответственно, первого и второго игроков в повторяющейся игре ε-наилучшего ответа длины n, соответствующей паре S функций ε-наилучших ответов игроков.

Пару $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$ функций ε-наилучших ответов игроков назовем *равновесной* (по Нэшу) в повторяющейся игре ε-наилучших ответов длины n, если для любого ε-наилучшего ответа (α_1, α_2) первого игрока верно $a_n[S_1^*] \leq a_n[S^*]$, где $S_1^* = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, и для любого ε-наилучшего ответа (β_1, β_2) второго игрока верно $b_n[S_2^*] \leq b_n[S^*]$, где $S_2^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2))$. Пару $(a_n[S^*], b_n[S^*])$ ожидаемых средних выигрышей первого и второго игроков, соответствующую паре S^* функций ε-наилучших ответов игроков в повторяющейся игре ε-наилучшего ответа длины n, будем называть *равновесной* в данной повторяющейся игре.

Возникает вопрос о существовании равновесной пары функций ε-наилучших ответов игроков. При условии существования такой пары представляет интерес выяснение ее структуры и сравнение равновесной пары ожидаемых средних выигрышей в (стохастической) повторяющейся игре ε-наилучших ответов с парой $(\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ (2.5), (2.3) средних выигрышей в детерминированной повторяющейся игре наилучших ответов. Цель данной работы – дать ответы на указанные вопросы для простейшего случая двухшаговой повторяющейся игры, т.е. для случая $n = 2$, при достаточно малом ε. Отметим, что случай $n = 1$ тривиален: в этом случае равновесная пара функций ε-наилучших ответов игроков с очевидностью состоит из детерминированных функций наилучшего ответа (см. (2.2)), т.е имеет вид $((1, 0)(0, 1))$.

3. Формулировки результатов

Ниже $n = 2$.

Две приводимые ниже леммы составляют основу исследования. Их содержательный смысл состоит в следующем. В двухшаговой повторяющейся игре ε-наилучших ответов при достаточно малом ε каждый игрок имеет оптимальную функцию ε-наилучшего ответа, которая максимизирует его ожидаемый средний выигрыш вне зависимости от выбора партнером своей функции ε-наилучшего ответа.

Структура оптимальной функции ε-наилучшего ответа игрока зависит от некоторых соотношений между элементами матрицы выигрышей этого игрока и не зависит от матрицы выигрышей его партнера. В ряде случаев оптимальная функция (α_1^*, α_2^*) ε-наилучшего ответа первого игрока имеет вид $(1, 0)$, т.е. определяет детерминированную реакцию наилучшего ответа первого игрока на выбор чистой стратегии второго игрока; в этих случаях для первого игрока малая рандомизация его ответного выбора нецелесообразна. В остальных типичных случаях пара (α_1^*, α_2^*) имеет вид $(1-\varepsilon, 0)$ либо $(1, \varepsilon)$, т.е. одна из ее компонент остается чистой стратегией наилучшего ответа, другая же максимально рандомизируется. В этих случаях для первого игрока малая рандомизация его ответного выбора является целесообразной. Аналогичные наблюдения справедливы в отношении оптимальной функции (β_1^*, β_2^*) ε-наилучшего ответа второго игрока.

Через $U(\varepsilon)$ и $V(\varepsilon)$ будем обозначать множества всех функций ε-наилучшего ответа первого и второго игроков, соответственно; также введем множества

$$U^1(\varepsilon)=\{(\alpha_1,\alpha_2)\in U(\varepsilon)\colon \alpha_1<1\}, U^2(\varepsilon)=\{(\alpha_1,\alpha_2)\in U(\varepsilon)\colon \alpha_2>0\}, \tag{3.1}$$

$$V^1(\varepsilon)=\{(\beta_1,\beta_2)\in V(\varepsilon)\colon \beta_1>0\},\ V^2(\varepsilon)=\{(\beta_1,\beta_2)\in V(\varepsilon)\colon \beta_2<1\}. \tag{3.2}$$

Положим

$$U_{i_0,j_0}(\varepsilon) = \begin{cases} U(\varepsilon) & \text{при} \quad (i_0,j_0)\in\{(1,2),(2,1)\}, \\ U^1(\varepsilon) & \text{при} \quad (i_0,j_0)=(1,1), \\ U^2(\varepsilon) & \text{при} \quad (i_0,j_0)=(2,2), \end{cases} \tag{3.3}$$

$$V_{i_0,j_0}(\varepsilon) = \begin{cases} V(\varepsilon) & \text{при} \quad (i_0,j_0)\in\{(1,1),(2,2)\}, \\ V^1(\varepsilon) & \text{при} \quad (i_0,j_0)=(1,2), \\ V^2(\varepsilon) & \text{при} \quad (i_0,j_0)=(2,1). \end{cases} \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Существует $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ такое, что при $\varepsilon \le \varepsilon_1$ справедливы следующие утверждения.*

1) Существует единственная функция (α_1^*, α_2^*) ε-наилучшего ответа первого игрока такая, что

(i) для всяких $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) \setminus \{(\alpha_1^*, \alpha_2^*)\}$ и $(\beta_1, \beta_2) \in V_{i_0,j_0}(\varepsilon)$ выполняется

$$a_2[((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2))] > a_2[((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))], \tag{3.5}$$

(ii) в случае $(i_0, j_0) = (1, 2)$ *при всяком* $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) \setminus V_{i_0,j_0}(\varepsilon)$ *для любого* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ *такого, что* $\alpha_2 \neq \alpha_2^*$, *выполняется* (3.5), *а для любого* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ *такого, что* $\alpha_2 = \alpha_2^*$, *выполняется*

$$a_2[((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2))] = a_2[((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))], \tag{3.6}$$

(iii) в случае $(i_0, j_0) = (2, 1)$ *при всяком* $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) \setminus V_{i_0,j_0}(\varepsilon)$ *для любого* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ *такого, что* $\alpha_1 \neq \alpha_1^*$, *выполняется* (3.5), *а для любого* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon)$ *такого, что* $\alpha_1 = \alpha_1^*$, *выполняется* (3.6).

2) Значения α_1^* *и* α_2^* *задаются следующей табл. 1.*

Таблица 1.

случай	(i_0, j_0)	*условие*	(α_1^*, α_2^*)
1.1	$(1,1)$	$a_{12} > a_{21}$	$(1,0)$
1.2	$(1,1)$	$a_{12} < a_{21}$	$(1-\varepsilon,0)$
1.3	$(2,2)$	$a_{12} > a_{21}$	$(1,\varepsilon)$
1.4	$(2,2)$	$a_{12} < a_{21}$	$(1,0)$
1.5	$(1,2)$	$a_{12} > a_{21}$	$(1,\varepsilon)$
1.6	$(1,2)$	$a_{12} < a_{21},\ a_{21} < (a_{11}+a_{12})/2$	$(1,\varepsilon)$
1.7	$(1,2)$	$a_{12} < a_{21},\ a_{21} > (a_{11}+a_{12})/2$	$(1,0)$
1.8	$(2,1)$	$a_{12} < a_{21}$	$(1-\varepsilon,0)$
1.9	$(2,1)$	$a_{12} > a_{21},\ a_{12} < (a_{22}+a_{21})/2$	$(1-\varepsilon,0)$
1.10	$(2,1)$	$a_{12} > a_{21},\ a_{12} > (a_{22}+a_{21})/2$	$(1,0)$

Лемма 3.2. *Существует* $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ *такое, что при* $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ *справедливы следующие утверждения.*

1) Существует единственная функция (β_1^*, β_2^*) ε*-наилучшего ответа второго игрока такая, что*

(i) для всяких $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon) \setminus \{(\beta_1^*, \beta_2^*)\}$ *и* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U_{i_0,j_0}(\varepsilon)$ *выполняется*

$$b_2[((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*))] > b_2[((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))], \tag{3.7}$$

(ii) в случае $(i_0, j_0) = (1, 1)$ *при всяком* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) \setminus U_{i_0,j_0}(\varepsilon)$ *для любого* $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ *такого, что* $\beta_1 \neq \beta_1^*$, *выполняется* (3.7), *а для любого* $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ *такого, что* $\beta_1 = \beta_1^*$, *выполняется*

$$b_2[((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*))] = b_2[((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))], \tag{3.8}$$

(iii) в случае $(i_0, j_0) = (2,2)$ *при всяком* $(\alpha_1, \alpha_2) \in U(\varepsilon) \setminus U_{i_0,j_0}(\varepsilon)$ *для любого* $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ *такого, что* $\beta_2 \neq \beta_2^*$, *выполняется* (3.7), *а для любого* $(\beta_1, \beta_2) \in V(\varepsilon)$ *такого, что* $\beta_2 = \beta_2^*$, *выполняется* (3.8).

2) Значения β_1^* *и* β_2^* *задаются следующей табл. 2.*

Таблица 2.

случай	(i_0, j_0)	*условие*	(β_1^*, β_2^*)
2.1	$(1,2)$	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
2.2	$(1,2)$	$b_{11} < b_{22}$	$(0,1)$
2.3	$(2,1)$	$b_{11} > b_{22}$	$(0,1)$
2.4	$(2,1)$	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1-\varepsilon)$
2.5	$(1,1)$	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
2.6	$(1,1)$	$b_{11} < b_{22}$, $b_{22} < (b_{11} + b_{21})/2$	$(\varepsilon, 1)$
2.7	$(1,1)$	$b_{11} < b_{22}$, $b_{22} > (b_{11} + b_{21})/2$	$(0,1)$
2.8	$(2,2)$	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1-\varepsilon)$
2.9	$(2,2)$	$b_{11} > b_{22}$, $b_{11} < (b_{12} + b_{22})/2$	$(0, 1-\varepsilon)$
2.10	$(2,2)$	$b_{11} > b_{22}$, $b_{11} > (b_{12} + b_{22})/2$	$(0,1)$

Из лемм 3.1 и 3.2 с очевидностью вытекает утверждение о существовании и структуре равновесной пары функций ε-наилучшего ответа.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *определены согласно леммам* 3.1 *и* 3.2, $\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, *функции* (α_1^*, α_2^*) *и* (β_1^*, β_2^*) ε*-наилучшего ответа, соответственно, первого и второго игроков заданы табл. 1 и 2, и* $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$. *Тогда*

1) S^* *есть равновесная пара функций* ε*-наилучшего ответа в двухшаговой повторяющейся игре* ε*-наилучших ответов.*

2) Равновесная пара S^* *единственна во всех случаях кроме 1.1 и 1.4 из табл. 1 и 2.2 и 2.3 из табл. 2.*

3) В случае 1.1 из табл. 1 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, *где* $\beta_2^* \in [1-\varepsilon, 1]$, *а* α_1^*, α_2^* *и* β_1^* *заданы табл. 1 и 2.*

4) В случае 1.4 из табл. 1 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, *где* $\beta_1^* \in [0, \varepsilon]$, *а* α_1^*, α_2^* *и* β_2^* *заданы табл. 1 и 2.*

5) В случае 2.2 из табл. 2 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, *где* $\alpha_1^* \in [1-\varepsilon, 1]$, *а* α_2^*, β_1^* *и* β_2^* *заданы табл. 1 и 2.*

6) В случае 2.3 из табл. 2 равновесной является всякая пара $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, *где* $\alpha_2^* \in [0, \varepsilon]$, α_1^*, *а* β_1^* *и* β_2^* *заданы табл. 1 и 2.*

Следующая теорема утверждает, что, в условиях теоремы 3.1, в тех случаях, когда оптимальная функция ε-наилучшего ответа игрока (см. табл. 1 и 2) имеет компоненту, не являющуюся чистой стратегией, ожидаемый равновесный выигрыш этого игрока в двухшаговой игре ε-наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детерминированной) игре наилучших ответов. Таким образом, в этих случаях для рассматриваемого игрока малая рандомизация при выборе стратегии выгодна с точки зрения его ожидаемого среднего выигрыша.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1.

1) В случаях 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9 из табл. 1 ожидаемый равновесный выигрыш первого игрока в двухшаговой игре ε-наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детерминированной) двухшаговой игре наилучших ответов: $a_2[S^*] > \bar{a}_2$ *(см.* (2.13), (2.5)).

2) В случаях 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 из табл. 2 ожидаемый равновесный выигрыш второго игрока в двухшаговой игре ε-наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детерминированной) двухшаговой игре наилучших ответов: $b_2[S^*] > \bar{b}_2$ *(см.* (2.13), (2.5)).

Теорема 3.2 с очевидностью следует из лемм 3.1 и 3.2 и теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Если одновременно имеют место какой-либо из случаев 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 1.9 из табл. 1 и какой-либо из случаев 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 из табл. 2, то для каждого из игроков его ожидаемый равновесный выигрыш в двухшаговой игре ε-наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детерминированной) двухшаговой игре наилучших ответов, т.е. имеют место неравенства* $a_2[S^*] > \bar{a}_2$ *и* $b_2[S^*] > \bar{b}_2$.

4. Доказательства лемм

Доказательство леммы 3.1.

Пусть S – произвольная пара функций ε-наилучших ответов игроков вида (2.8). Согласно (2.11) для любой траектории $t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2)) \in X^2$ двухшаговой игры ε-наилучших ответов, соответствующих паре S, имеем

$$p_{2,S}(t) = p_S((i_2, j_2)|(i_1, j_1))p_S((i_1, j_1)|(i_0, j_0)).$$

Для ожидаемого среднего выигрыша первого игрока, в соответствии с (2.12), (2.13), имеем

$$\begin{aligned}
a_2[S] &= \int\limits_{X^2} a_2(t)p_{2,S}(dt) = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{X^2} (a_{i_1,j_1} + a_{i_2,j_2})p_{2,S}(d((i_1, j_1), (i_2, j_2))) = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{X} a_{i_1,j_1} p_S(d(i_1, j_1)|(i_0, j_0)) + \\
& \frac{1}{2}\int\limits_{X} p_S(d(i_1, j_1)|(i_0, j_0)) \int\limits_{X} a_{i_2,j_2} p_S(d(i_2, j_2)|(i_1, j_1)).
\end{aligned}$$

Обозначая

$$a_{1,0}(i_*, j_*) = \int\limits_X a_{i,j} p_S(d(i, j)|(i_*, j_*)),\ a_{2,0}(i_*, j_*) = \int\limits_X a_1(i, j)p_S(d(i, j)|(i_*, j_*)),$$

получаем

$$a_2[S] = a_2[S](i_0, j_0) = \frac{a_{1,0}(i_0, j_0) + a_{2,0}(i_0, j_0)}{2}. \tag{4.1}$$

В силу (2.9)

$$\begin{aligned}
a_{1,0}(i_0, j_0) &= (a_{11} - a_{12})\alpha_{j_0}\beta_{i_0} + \\
& (a_{21} - a_{22})(1 - \alpha_{j_0})\beta_{i_0} + \alpha_{j_0} a_{12} + (1 - \alpha_{j_0})a_{22}, \quad (4.2)\\
a_{2,0}(i_0, j_0) &= [a_{1,0}(1, 1) - a_{1,0}(1, 2))]\alpha_{j_0}\beta_{i_0} + \\
& [a_{1,0}(2, 1) - a_{1,0}(2, 2))](1 - \alpha_{j_0})\beta_{i_0} + \\
& \alpha_{j_0} a_{1,0}(1, 2) + (1 - \alpha_{j_0})a_{1,0}(2, 2). \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Из (4.2) имеем

$$
\begin{aligned}
a_{1,0}(1,1) - a_{1,0}(1,2) &= [(a_{11} - a_{12}) - (a_{21} - a_{22})](\alpha_1 - \alpha_2)\beta_1 + \\
&\quad (\alpha_1 - \alpha_2)(a_{12} - a_{22}), \\
a_{1,0}(2,1) - a_{1,0}(2,2) &= [(a_{11} - a_{12}) - (a_{21} - a_{22})](\alpha_1 - \alpha_2)\beta_2 + \\
&\quad (\alpha_1 - \alpha_2)(a_{12} - a_{22}), \\
a_{1,0}(1,2) &= (a_{11} - a_{12})\alpha_2\beta_1 + (a_{21} - a_{22})(1 - \alpha_2)\beta_1 + \\
&\quad \alpha_2 a_{12} + (1 - \alpha_2)a_{22}, \\
a_{1,0}(2,2) &= (a_{11} - a_{12})\alpha_2\beta_2 + (a_{21} - a_{22})(1 - \alpha_2)\beta_2 + \\
&\quad \alpha_2 a_{12} + (1 - \alpha_2)a_{22}.
\end{aligned}
$$

Подставляя в (4.3) и перегруппировывая слагаемые, получаем:

$$
a_{2,0}(i_0, j_0) = c_1^{i_0}\alpha_1\alpha_{j_0} + c_2^{i_0}\alpha_2\alpha_{j_0} + c_3\alpha_{j_0} + c_4^{i_0}\alpha_1 + c_5^{i_0}\alpha_2 + c_6, \tag{4.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_1^{i_0} &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(\beta_1 - \beta_2)\beta_{i_0}, && (4.5)\\
c_2^{i_0} &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_{i_0}), && (4.6)\\
c_3 &= (a_{21} - a_{22})(\beta_1 - \beta_2), && (4.7)\\
c_4^{i_0} &= [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta_2 + a_{12} - a_{22}]\beta_{i_0}, && (4.8)\\
c_5^{i_0} &= [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\beta_2 + a_{12} - a_{22}](1 - \beta_{i_0}), && (4.9)\\
c_6 &= (a_{21} - a_{22})\beta_2 + a_{22}. && (4.10)
\end{aligned}
$$

Придавая начальной паре (i_0, j_0) все возможные значения в пределах множества X и применяя (4.2), запишем:

$$
\begin{aligned}
a_{1,0}(1,1) &= \alpha_1\beta_1 a_{11} + \alpha_1(1 - \beta_1)a_{12} + (1 - \alpha_1)\beta_1 a_{21} + (1 - \alpha_1)(1 - \beta_1)a_{22}, \\
a_{1,0}(1,2) &= \alpha_2\beta_1 a_{11} + \alpha_2(1 - \beta_1)a_{12} + (1 - \alpha_2)\beta_1 a_{21} + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_1)a_{22}, \\
a_{1,0}(2,1) &= \alpha_1\beta_2 a_{11} + \alpha_1(1 - \beta_2)a_{12} + (1 - \alpha_1)\beta_2 a_{21} + (1 - \alpha_1)(1 - \beta_2)a_{22}, \\
a_{1,0}(2,2) &= \alpha_2\beta_2 a_{11} + \alpha_2(1 - \beta_2)a_{12} + (1 - \alpha_2)\beta_2 a_{21} + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_2)a_{22}.
\end{aligned}
$$

Расфиксируем пару S (2.8) и рассмотрим указанные выше значения как функции от переменных α_1, α_2, β_1, β_2, меняющихся в пределах ограничений (2.6), (2.7); для краткости обозначения аргументов будем опускать. Имеем:

$$
\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(1,1) = \beta_1 a_{11} + (1 - \beta_1)a_{12} - \beta_1 a_{21} - (1 - \beta_1)a_{22}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(1,1) = 0,
$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(1,2)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(1,2)=\beta_1a_{11}+(1-\beta_1)a_{12}-\beta_1a_{21}-(1-\beta_1)a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(2,1)=\beta_2a_{11}+(1-\beta_2)a_{12}-\beta_2a_{21}-(1-\beta_2)a_{22},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(2,1)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(2,2)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(2,2)=\beta_2a_{11}+(1-\beta_2)a_{12}-\beta_2a_{21}-(1-\beta_2)a_{22}.$$

Для значений $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, отвечающих чистым стратегиям наилучшего ответа второго игрока, с учетом (2.1) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(1,1) = a_{12} - a_{22} < 0,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(1,1) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(1,2) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(1,2) = a_{12} - a_{22} < 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(2,1) = a_{11} - a_{21} > 0,\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(2,1) = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{1,0}(2,2) = 0, \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{1,0}(2,2) = a_{11} - a_{21} > 0. \tag{4.14}$$

Далее, из (4.4)

$$\begin{aligned} a_{2,0}(i_0,1) &= c_1^{i_{k-2}}\alpha_1^2 + c_2^{i_{k-2}}\alpha_2\alpha_1 + (c_3 + c_4^{i_{k-2}})\alpha_1 + c_5^{i_{k-2}}\alpha_2 + c_6,\\ a_{2,0}(i_0,2) &= c_1^{i_{k-2}}\alpha_1\alpha_2 + c_2^{i_{k-2}}\alpha_2^2 + c_4^{i_{k-2}}\alpha_1 + (c_3 + c_5^{i_{k-2}})\alpha_2 + c_6. \end{aligned}$$

Рассматривая указанные выше значения как функции от переменных α_1, α_2, β_1, β_2, меняющихся в пределах ограничений (2.6), (2.7) и опуская для краткости обозначения аргументов, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{2,0}(i_0,1)=c_1^{i_{k-2}}\alpha_1+c_2^{i_{k-2}}\alpha_2+c_3+c_4^{i_{k-2}},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{2,0}(i_0,1)=c_2^{i_{k-2}}\alpha_1+c_5^{i_{k-2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{2,0}(i_0,2)=c_1^{i_{k-2}}\alpha_2+c_4^{i_{k-2}},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{2,0}(i_0,2)=c_1^{i_{k-2}}\alpha_1+c_2^{i_{k-2}}\alpha_2+c_3+c_5^{i_{k-2}}.$$

Подстановляя в эти выражения и в (4.5)–(4.10) значения

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 0,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = 1, \tag{4.15}$$

отвечающих чистым стратегиям наилучшего ответа первого и второго игроков, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{2,0}(1,1)=a_{22}-a_{21}=(a_{12}-a_{22})+(a_{21}-a_{22}),\ \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{2,0}(1,1)=a_{12}-a_{22},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{2,0}(1,2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{2,0}(1,2) = a_{11} - 2a_{21} + a_{22},$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{2,0}(2,1) = a_{12} - a_{21}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{2,0}(2,1) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_{2,0}(2,2) = a_{11} - a_{21}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_{2,0}(2,2) = a_{12} - a_{11}.$$

Объединяя с (4.11)–(4.14), при всех значениях начальной пары (i_0, j_0) чистых стратегий для удвоенных частных производных ожидаемого среднего выигрыша (4.1) как функции от α_1, α_2, β_1, β_2, вычисленных в точке (4.15), получаем следующие выражения (обозначения аргументов для краткости опускаем):

$$2\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_2[S](1,1) = a_{12} - a_{21}, \quad 2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_2[S](1,1) = a_{12} - a_{22} < 0, \tag{4.16}$$

$$2\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_2[S](1,2) = 0, \quad 2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_2[S](1,2) = (a_{11}-a_{21})+(a_{12}-a_{21}), \tag{4.17}$$

$$2\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_2[S](2,1) = (a_{12}-a_{21})+(a_{12}-a_{22}), \quad 2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_2[S](2,1) = 0, \tag{4.18}$$

$$2\frac{\partial}{\partial\alpha_1}a_2[S](2,2) = a_{11} - a_{21} > 0, \quad 2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}a_2[S](2,2) = a_{12} - a_{21}. \tag{4.19}$$

Пусть $(i_0, j_0) = (1,1)$. Поскольку в точке (4.15) имеет место (4.16), то в окрестности точки (4.15) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](1,1)$ (а) возрастает по α_1 при $a_{12} > a_{21}$, (б) убывает по α_1 при $a_{12} < a_{21}$, (в) убывает по α_2. Поэтому при достаточно малом ε ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](1,1)$ как функция от (α_1, α_2), независимо от выбора пары (β_1, β_2), удовлетворяющей (2.7), достигает в пределах ограничений (2.6) максимума в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1,0)$ при $a_{12} > a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1-\varepsilon, 0)$ при $a_{12} < a_{21}$. Этим закончено доказательство утверждения 1 леммы для случая $(i_0, j_0) = (1,1)$ (см. пункт (i) и случаи 1.1 и 1.2 из табл. 1).

Пусть $(i_0, j_0) = (1,2)$. Поскольку в точке (4.15) имеет место (4.17), то в окрестности точки (4.15) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](1,2)$ (а) возрастает по α_2 при $a_{12} > a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} < a_{11} + a_{12}$, (б) убывает по α_2 при одновременном выполнении $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} > a_{11} + a_{12}$.

Рассмотрим зависимость $a_2[S](1,2)$ от α_1 при ограничениях (2.6), (2.7) (в соответствии с (4.17) в точке (4.15) $\partial a_2[S](1,2)/\partial\alpha_1 = 0$).

Согласно (4.4) (4.7), (4.9), (2.1) и (2.7) для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (2.6), (2.7), имеем

$$2\frac{\partial a_2[S](1,2)}{\partial \alpha_1} = [r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_2 + (r_1\beta_2 - r_2)]\beta_1, \qquad (4.20)$$

где

$$r_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} > 0, \quad r_2 = a_{22} - a_{12} > 0,$$

при этом функция $a_2[S](1,2)$, очевидно, линейна по α_1. В силу (2.1) и (2.7) $r_2/r_1 < 1$. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_*$, где $\varepsilon_* > 0$ таково, что

$$\frac{r_2}{r_1} < 1 - \varepsilon_*, \quad r_1\varepsilon_* < (1-\varepsilon_*)r_1 - r_2.$$

Тогда для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (2.6), (2.7), выполняется

$$r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_2 + (r_1\beta_2 - r_2) > -r_1\varepsilon + (1-\varepsilon)r_1 - r_2 > 0.$$

Следовательно, в соответствии с (4.20), в области (2.6), (2.7) функция $a_2[S](1,2)$ строго возрастает по α_1 при $\beta_1 > 0$ и постоянна по α_1 при $\beta_1 = 0$.

Принимая во внимание установленные выше свойства монотонности функции $a_2[S](1,2)$ по переменным α_1 и α_2, заключаем, что, при достаточно малом ε, независимо от выбора пары (β_1, β_2), удовлетворяющей (2.7), $a_2[S](1,2)$ достигает, в пределах ограничений (2.6), максимума в следующих точках: (а) в случае $\beta_1 > 0$ – в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \varepsilon)$ при $a_{12} > a_{21}$ и при одновременном выполнении неравенств $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} < a_{11} + a_{12}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, 0)$ при одновременном выполнении неравенств $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} > a_{11} + a_{12}$; (б) в случае $\beta_1 = 0$ – во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (\alpha_1^*, \varepsilon)$, где $\alpha_1^* \in [1-\varepsilon, 1]$, при $a_{12} > a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} < a_{11} + a_{12}$ и во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (\alpha_1^*, 0)$, где $\alpha_1^* \in [1-\varepsilon, 1]$, при одновременном выполнении неравенств $a_{12} < a_{21}$ и $2a_{21} > a_{11} + a_{12}$. Этим закончено рассмотрение случаев 1.5, 1.6 и 1.7 из табл. 1.

Пусть $(i_0, j_0) = (2, 1)$. Поскольку в точке (4.15) имеет место (4.18), то в окрестности точки (4.15) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](2,1)$ (а) убывает по α_1 при $a_{12} < a_{21}$ и при одновременном выполнении

$a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} < a_{22} + a_{21}$, (б) возрастает по α_1 при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} > a_{22} + a_{21}$.

Рассмотрим зависимость $a_2[S](2,1)$ от α_2 при ограничениях (2.6), (2.7) (в соответствии с (4.18) в точке (4.15) $\partial a_2[S](2,1)/\partial\alpha_2 = 0$). Согласно (4.4) (4.7), (4.10), (2.1) и (2.7) для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (2.6), (2.7), имеем

$$2\frac{\partial a_2[S](2,1)}{\partial\alpha_2} = [r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 + (r_1\beta_2 - r_2)](1 - \beta_2), \tag{4.21}$$

где

$$r_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} > 0, \quad r_2 = a_{22} - a_{12} > 0,$$

при этом функция $a_2[S](2,1)$, очевидно, линейна по α_2. В силу (2.1) и (2.7) $r_2/r_1 > 0$. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_*$, где $\varepsilon_* > 0$ таково, что

$$\frac{r_2}{r_1} > \varepsilon_*, \quad 3r_1\varepsilon_* < r_1 + r_2.$$

Тогда для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих (2.6), (2.7), выполняется

$$r_1(\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 + (r_1\beta_2 - r_2) < 3r_1\varepsilon - r_1 - r_2 < 0.$$

Следовательно, в соответствии с (4.21), в области (2.6), (2.7) функция $a_2[S](2,1)$ строго убывает по α_2 при $\beta_2 < 1$ и постоянна по α_2 при $\beta_2 = 1$.

Принимая во внимание установленные выше свойства монотонности функции $a_2[S](2,1)$ по переменным α_1 и α_2, заключаем, что, при достаточно малом ε, независимо от выбора пары (β_1, β_2), удовлетворяющей (2.7), $a_2[S](2,1)$ достигает, в пределах ограничений (2.6), максимума в следующих точках: (а) в случае $\beta_2 < 1$ – в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1-\varepsilon, 0)$ при $a_{12} < a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} < a_{22}+a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, 0)$ при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} > a_{22}+a_{21}$, (б) в случае $\beta_2 = 1$ – во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1-\varepsilon, \alpha_2^*)$, где $\alpha_2^* \in [0, \varepsilon]$, при $a_{12} < a_{21}$ и при одновременном выполнении $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} < a_{22} + a_{21}$ и во всех точках вида $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \alpha_2^*)$, где $\alpha_2^* \in [0, \varepsilon]$, при одновременном выполнении неравенств $a_{12} > a_{21}$ и $2a_{12} > a_{22} + a_{21}$. Этим закончено рассмотрение случаев 1.8, 1.9 и 1.10 из табл. 1.

Пусть $(i_0, j_0) = (2,2)$. Поскольку в точке (4.15) имеет место (4.19), то в окрестности точки (4.15) ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](2,2)$ (а) возрастает по α_1, (б) убывает по α_2 при $a_{12} > a_{21}$, (в) возрастает по α_2 при $a_{12} < a_{21}$. Поэтому при достаточно малом ε ожидаемый средний выигрыш $a_2[S](2,2)$ как функция от (α_1, α_2), независимо от выбора пары (β_1, β_2), удовлетворяющей (2.7), достигает в пределах ограничений (2.6) максимума в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1,0)$ при $a_{12} > a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \varepsilon)$ при $a_{12} < a_{21}$. Этим закончено рассмотрение случаев 1.3 и 1.4 из табл. 1.

Лемма 3.1 доказана.

Доказательство леммы 3.2.

Проведем преобразование игры. Имея исходные матрицы выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

введем новые матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$, поменяв игроков местами и перенумеровав элементы матриц следующим образом:

$$\begin{aligned} (i,j) \to (\bar{i}, \bar{j}) \quad : \qquad & (2,1) \to (1,1), \quad (1,1) \to (1,2), \\ & (2,2) \to (2,1), \quad (1,2) \to (2,2). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Получаем

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \\ b_{22} & b_{12} \end{pmatrix}, \ \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Используя соотношения (2.1) между элементами исходных матриц A и B, приходим к следующим соотношениям между элементами матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$:

$$\bar{b}_{12} > \bar{b}_{11}, \quad \bar{b}_{21} > \bar{b}_{22}, \quad \bar{a}_{11} > \bar{a}_{21}, \quad \bar{a}_{22} > \bar{a}_{12}.$$

Эти соотношения имеют вид (2.1). Рассмотрим повторяющуюся игру ε-наилучших ответов с заменой матриц выигрышей A и B на $\bar{A}$ и $\bar{B}$, сответственно. Обозначим через $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = (\beta_2, \beta_1)$ и $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) = (\alpha_2, \alpha_1)$ функции ε-наилучшего ответа первого и второго игроков в новой игре. По доказанной выше лемме 3.1 существует $\bar{\varepsilon}_1 \in (0, 1/2)$ такое, что при $\varepsilon \le \bar{\varepsilon}_1$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция $(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$ ε-наилучшего ответа первого игрока такая, что

(i) для всяких $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon) \setminus \{(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)\}$ и $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \bar{V}_{i_0, j_0}(\varepsilon)$ выполняется

$$\bar{a}_2[((\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2))] > \bar{a}_2[((\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2))], \tag{4.24}$$

(ii) в случае $(\bar{i}_0, \bar{j}_0) = (1, 2)$ при всяком $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \bar{V}(\varepsilon) \setminus \bar{V}_{\bar{i}_0, \bar{j}_0}(\varepsilon)$ для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_2 \neq \bar{\alpha}_2^*$, выполняется (4.24), а для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2^*$, выполняется

$$\bar{a}_2[((\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2))] = \bar{a}_2[((\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2))], \tag{4.25}$$

(iii) в случае $(\bar{i}_0, \bar{j}_0) = (2, 1)$ при всяком $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) \in \bar{V}(\varepsilon) \setminus \bar{V}_{\bar{i}_0, \bar{j}_0}(\varepsilon)$ для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_1^*$, выполняется (4.24), а для любого $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in \bar{U}(\varepsilon)$ такого, что $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1^*$, выполняется (4.25).

2) При этом значения $\bar{\alpha}_1^*$ и $\bar{\alpha}_2^*$ задаются следующей табл. 3.

Таблица 3.

$(\bar{i}_0, \bar{j}_0)$	условие	$(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$
$(1,1)$	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	$(1,0)$
$(1,1)$	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	$(1-\varepsilon,0)$
$(2,2)$	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	$(1,\varepsilon)$
$(2,2)$	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	$(1,0)$
$(1,2)$	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	$(1,\varepsilon)$
$(1,2)$	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$, $\bar{a}_{21} < (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{12})/2$	$(1,\varepsilon)$
$(1,2)$	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$, $\bar{a}_{21} > (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{12})/2$	$(1,0)$
$(2,1)$	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	$(1-\varepsilon,0)$
$(2,1)$	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$, $\bar{a}_{12} < (\bar{a}_{22} + \bar{a}_{21})/2$	$(1-\varepsilon,0)$
$(2,1)$	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$, $\bar{a}_{12} > (\bar{a}_{22} + \bar{a}_{21})/2$	$(1,0)$

Переходя обратно к старым обозначениям и используя (4.22), (4.23), получаем следующую табл. 4.

Таблица 4.

(i_0, j_0)	условие	(β_1^*, β_2^*)
$(2,1)$	$b_{11} > b_{22}$	$(0,1)$
$(2,1)$	$b_{11} < b_{22}$	$(0,1-\varepsilon)$
$(1,2)$	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon,1)$
$(1,2)$	$b_{11} < b_{22}$	$(0,1)$
$(1,1)$	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon,1)$
$(1,1)$	$b_{11} < b_{22},\ b_{22} < (b_{11}+b_{21})/2$	$(\varepsilon,1)$
$(1,1)$	$b_{11} < b_{22},\ b_{22} > (b_{11}+b_{21})/2$	$(0,1)$
$(2,2)$	$b_{11} < b_{22}$	$(0,1-\varepsilon)$
$(2,2)$	$b_{11} > b_{22},\ b_{11} < (b_{12}+b_{22})/2$	$(0,1-\varepsilon)$
$(2,2)$	$b_{11} > b_{22},\ b_{11} > (b_{12}+b_{22})/2$	$(0,1)$

Табл. 4 совпадает с табл. 2, что завершает доказательство леммы 3.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* Москва: Наука, 1985.

2. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* Москва: Мир, 1969.

3. Axelrod R. *The Evolution of Cooperation.* Basic Books, 1984, ISBN 0-465-02122-2.

4. Fudenberg D., Kreps D.M. *Learning mixed equilibria* // Games and Econ. Behavior. 1993. V. 5. P. 320–367.

5. Hofbauer J., Sigmund K. *The Theory of Evolution and Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

6. Kaniovski Yu.M., Kryazhimskiy A.V., Young H.P. *Learning equilibria in games played by heterogeneous populations* // Games and Economic Behavior. 2000. V. 31. P. 50–96.

7. Kleimenov A.F., Kryazhimskiy A.V. *Minimum-noncooperative trajectories in repeated games, Complex Dynamical Systems with Incomplete Information* // (E. Reithmeier and G. Leitmann, eds.), Shaker Verlag, Aachen. 1999. P. 94–107.

8. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. *On evolutionary- differential games* // Proc. of Steklov Math. Inst. 1995. V. 211. P. 257–287.

9. Nowak M., Sigmund K. *The Alternating Prisoner's Dilemma* // J. Theor. Biol. 1994. V. 168. P. 219-226.

10. Van der Laan G., Tieman X. *Evolutionary Game Theory and the Modeling of Economic Behavior* // De Economist. 1998. V. 146. № 1. P. 59–89.

11. Weibull J. *Evolutionary Game Theory.* The M.I.T. Press, Cambridge, 1995.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает признательность своему научному руководителю акад. А.В. Кряжимскому за постановку задачи и руководство в процессе её решения.

A 2×2 ε-BEST RESPONSE STOCHASTIC TWO-STEP GAME

Anastasia V. Raygorodskaya, Lomonosov Moscow State University, post-graduate student (asik.vmk@gmail.com).

Abstract: A 2×2 ε-best response repeated game, in which each player in each subsequent round chooses a pure strategy based on the result of a random test, is analyzed. The random test is generated by the player's arbitrary mixed strategy prescribing the player to choose his/her best response to his/her partner's previously chosen pure strategy with a high probability. The so defined decision making patterns (called ε-best response functions) are interpreted as the players' behavioral strategies. These strategies define a stochastic game, in which the expected benefits averaged over all the rounds act as the players' benefits. The game is analyzed in the two-step case. A classification of the Nash equilibrium points is provided, and the equilibrium values are compared with the average benefits gained through the deterministic usage of the players' best response pure strategies.

Keywords: repeated games, bimatrix games, best response.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 106–119

УДК 517.7+330.46
ББК 65.050.2

УСТОЙЧИВОЕ РАЗВИТИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ КОРРУПЦИИ

Геннадий А. Угольницкий
Анатолий Б. Усов
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Южный федеральный университет
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а
e-mail: ougoln@mail.ru, usov@math.rsu.ru

Дана теоретико-игровая формализация явления коррупции в трехуровневых системах управления веерной структуры. Рассмотрение проведено на примере системы контроля качества поверхностных вод. Предложена статическая модель, в которой в качестве условий устойчивого развития речных систем взяты предельно допустимые концентрации загрязняющих веществ в сточных водах. Решение построено методом имитационного моделирования. Приведены характерные примеры. Предложена методика учета возможности коррупции в иерархических системах.

Ключевые слова: система управления, коррупция, иерархические игры, информационно-моделирующая система, метод побуждения.

1. Введение

Развитие производства продуктов и услуг сопровождается ростом численности бюрократического аппарата, укреплением базы и предпосылок для оппортунистического поведения различных субъектов управления. Вопросы установления причин возникновения, обуздания и искоренения оппортунистического поведения в экономической и политической сферах имеют государственное значение, контролируются органами власти и управления. В результате математическому моделированию явления коррупции, как главной разновидности оппортунистического поведения в системах управления различной структуры и природы, уделяется определенное внимание. Под коррупцией понимается получение должностными лицами взяток в обмен на предоставление различных привилегий и льгот.

Несмотря на достаточное количество работ, посвященных исследованию явления коррупции, например [1,2,6,7], до сих пор не выработана комплексная методика исследования явления коррупции, не сформулированы практические рекомендации для органов государственной власти различных уровней, направленные на борьбу с коррупцией.

Предлагаемая работа близка к [3], где дана математическая формализация явления коррупции в трехуровневых динамических системах управления веерной структуры. В этой работе рассмотрение проведено на примере системы контроля качества поверхностных вод, построена динамическая модель с учетом возможности коррупционных отношений. Использование предлагаемой в ней методики контроля, управления коррупцией органами государственной власти различных уровней затруднено необходимостью учета в предложенной математической модели гидродинамических, гидрохимических данных, относящихся к различным участкам руслового потока. Предлагается упрощенная статическая модель коррупции, позволяющая проводить моделирование поведения реальных систем управления в условиях коррупции, давать практические рекомендации относительно поведения различных субъектов управления в условиях коррупции для органов государственной власти разных уровней.

2. Модель

Трехуровневая система управления веерной структуры состоит из источников воздействия верхнего (федеральный центр или ФЦ), среднего (местный орган управления или ОУ), нижнего (промышленное предприятие или ПП) уровней и управляемой динамической системы (УДС или водоток) [3]. Взаимоотношения между элементами такой системы устроены следующим образом: ФЦ воздействует на ОУ, ОУ – на ПП, ПП – на УДС. В системе имеется обратная связь и предусмотрена возможность непосредственного воздействия ФЦ и ОУ на УДС.

Пусть ПП стремится к максимизации получаемой в результате производства прибыли. В процессе производства в УДС сбрасываются загрязняющие вещества (ЗВ). ОУ определяет размеры платы за сверхлимитный и сверхнормативный сброс загрязнений в водоток и стремится к максимизации находящихся в его распоряжении средств. ФЦ определяет, какая доля средств, поступающих от ПП в виде платы за сброс загрязнений, остается в его распоряжении, а какая отдается ОУ. ФЦ должен поддерживать УДС в устойчивом состоянии. Пусть УДС находится в устойчивом состоянии, если выполнены законодательно установленные предельно допустимые концентрации (ПДК) загрязняющих веществ в сточных водах предприятия.

Интересы ФЦ и ОУ различны, порой противоположны, поэтому ОУ может быть заинтересован в получении взяток от ПП, в обмен на которые они занижают размер платы за сброс загрязнений в водоток. Если ОУ отказывается от взятки, то она изымается ФЦ, штрафу подвергаются только ПП. Величина штрафа зависит от «масштабных» коэффициентов, в которых учитывается вероятность обнаружения взятки. С ростом «масштабных» коэффициентов вероятность обнаружения взятки увеличивается, но увеличиваются и затраты со стороны ФЦ на контроль за деятельностью ОУ и ПП.

3. Математическая постановка задачи

В предлагаемой модели не учитываются платежи за водозабор и водосброс, в рассмотрение принимаются только платежи за сброс загрязнений. Аналогично [4] ниже исследуется случай одного вида загрязнений.

ФЦ помимо выполнения условий устойчивого развития системы стремится к максимизации целевой функции вида

$$J_\Phi = -C_\Phi(y) + \nu(R(\Phi) - VK(\Phi) - H(\Phi) - VS(W,P) - FN) + \\ + G(FN + FP^0 + FS^0) + (1-P)W(-h(L) + L\delta(f_1(b) + f_2(b))) + \\ + (1-\delta)(b + f_3(b)) \to \max\{G, L\}\ ; \quad (3.1)$$

$$y = (1-P)W;$$

$$FN = \begin{cases} s(1-P)W, & \text{если} \quad (1-P)W \le W_1, \\ sW_1, & \text{если} \quad (1-P)W > W_1; \end{cases}$$

$$FP^0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (1-P)W \le W_1, \\ sKN^0((1-P)W - W_1), & \text{если} \quad W_1 < (1-P)W \le W_2, \\ sKN^0(W_2 - W_1), & \text{если} \quad W_2 < (1-P)W; \end{cases}$$

$$FS^0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (1-P)W \le W_2, \\ sKS^0((1-P)W - W_2), & \text{если} \quad (1-P)W > W_2. \end{cases}$$

Здесь $W((1-P)W)$ – количество загрязнений, сбрасываемых в реку до (после) очистки сточных вод; P – доля загрязнений, удаляемых на предприятии в процессе очистки сточных вод; FS^0, FN, FP^0 – функции платежей в условиях коррупции, которые платит ПП за сброс загрязнений в пределах установленного норматива, а также за сверхнормативный и сверхлимитный сбросы соответственно, эти функции зависят от общего количества загрязнений, сбрасываемых в реку после очистки сточных вод и от величины полученной взятки; KN^0, KS^0 – размеры платы в условиях коррупции за единицу сброшенных загрязнений на ПП при сверхнормативном и сверхлимитном сбросах; $KN^0 = \max(KN - \delta a_1(b), 0); KS^0 = \max(KS - \delta a_2(b), 0)$; s, KN, KS – размеры платы без учета коррупции за единицу сброшенных загрязнений на ПП при сбросе в установленных пределах, сверхнормативном и сверхлимитном сбросах соответственно; δ – коэффициенты, равные нулю, если взятка не давалась, и единице в противном случае; b – размер взятки на единицу сброшенных загрязнений, даваемой предприятием ОУ; $a_1(z)(a_2(z))$ – функции «эффективности» взяток, характеризующие, насколько взятки уменьшают размер платы за сверхнормативный и сверхлимитный сброс загрязнений, соответственно; W_1, W_2 – постоянные величины, которые представляют собой установленные законодательством нормативы сброса загрязнений; $C_\Phi(y)$ – функция, в которой отражены материальные потери общества из-за загрязненной воды; y – общее количество сброшенных в реку загрязнений; ν – ставка налога на прибыль; $R(\Phi)$ – доход ПП от реализации произведенной продукции при величине производственных фондов Φ; $VK(\Phi)$ – включаемые в себестоимость издержки основного производства; $H(\Phi)$ – суммарная заработная плата основного и природоохранного производств; $VS(W,P)$ – издержки природоохранной деятельности, зависящие от объема сбрасываемых загрязнений и степени очистки сточных вод; G – доля средств, получаемых с ПП за сброс загрязнений в условиях коррупции, которая остается у ФЦ; $f_1(z), f_2(z)$ – функции штрафа ОУ при получении ими взяток и ПП при дачи взятки; $f_3(z)$ – функция штрафа ПП, когда они предлагают ОУ взятку, ОУ ее не берет и сообщает об этом ФЦ; L – «масштабные» коэффициенты для функций штрафа за взятки; $h(L)$ – функции затрат ФЦ на определение «масштабных» коэффициентов, отнесенные к единице сброшенных ЗВ.

Функции VK и H зависят от величины производственных фондов; $VS(W,P)$ отражает затраты ПП на очистку сточных вод. Предполагается, что выполнены следующие соотношения:

$$VK(\Phi)+H(\Phi)=\mu R(\Phi);\quad \mu=const;\quad VS(W,P)=WC_P(P),$$

где $C_P(P)$ – функции затрат ПП на очистку единицы сбрасываемых в водоток загрязнений.

ОУ стремится к максимизации средств, поступающих к нему от ПП в виде взяток и платы за сброс загрязнений, за вычетом расходов на очистку речной воды и штрафов за взятки. Его целевая функция имеет вид

$$J_y=-C_y(y)+(1-G)(FN+FP^0+FS^0)+(1-P)W(-L\delta f_1(b)+\delta b) \tag{3.2}$$

$$\to \max\{KN,KS,\delta\},$$

где $C_y(y)$ – функция затрат ОУ на улучшение качества речной воды.

Цель ПП – максимизация своей прибыли в условиях коррупции, т.е.

$$J=(1-\nu)(R(\Phi)-VK(\Phi)-H(\Phi)-VS(W,P)-FN)-FP^0-FS^0- \tag{3.3}$$

$$-(1-P)W(b+L\delta f_2(b)+(1-\delta)f_3(b))\to \max\{P,b\}.$$

Пусть количество сбрасываемых загрязнений (до очистки) зависит от количества произведенной продукции линейно:

$$W=\beta R(\Phi);\beta=const, \tag{3.4}$$

производственная функция имеет вид

$$R(\Phi) = \gamma\Phi^{0.5}; \gamma, \Phi = const. \tag{3.5}$$

Оптимизационные задачи (3.1)–(3.3) решаются при следующих ограничениях на управления предприятия

$$0 \leq P \ \leq 1 - \varepsilon; 0 \leq b \leq b_{max}, \tag{3.6}$$

органа управления

$$0 \leq KN \ \leq KN_{max}; 0 \leq KS \ \leq KS_{max}; \delta \in \{0, 1\} \tag{3.7}$$

и федерального центра

$$0 \leq H \ \leq 1; 0 \leq L \leq L_{max}, \tag{3.8}$$

а также на размер средств на контроль за ОУ и ПП

$$C_0 h(L)(1 - P)W \leq C_{max}, \tag{3.9}$$

где величины $C_0, KS_{max}, KN_{max}, C_{max}, b_{max}, L_{max}$ заданы; $0 < \varepsilon < 1$ – постоянная, определяемая технологическими возможностями очистки сточных вод на предприятии.

Для упрощения предлагаемой модели, возможности разработки комплексной методики исследования коррупции, выработки практических рекомендаций для органов государственной власти в условиях коррупции характеристики качества речной воды не учитываются в модели. В расчет принимается только качество сточных вод.

Требования устойчивого развития системы, включающей в себя водоток, состоят в рамках предлагаемой модели в соблюдении предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ в сточных водах:

$$\frac{W(1 - P)}{Q} \leq Q_{max}, \tag{3.10}$$

где Q – расход воды на ПП; величины B_{max}, Q_{max} – заданы.

В качестве метода иерархического управления в (3.1)–(3.10) реализован метод побуждения [3,4]. В этом случае все субъекты управления воздействуют на целевые функции нижестоящих субъектов. Основной целью ФЦ является выполнение условия (3.10).

4. Метод побуждения в условиях коррупции

При побуждении ОУ назначают размер платы за сверхлимитный и сверхнормативный сброс ЗВ и решают, выгодно ли им брать предлагаемые ПП взятки.

Алгоритм построения равновесия побуждения в условиях коррупции состоит в следующем:

1) В результате минимизации (3.3) с ограничениями (3.6) определяются оптимальные стратегии ПП в зависимости от управлений ОУ:

$$P^* = P^*(KN, KS, \delta);\;\; b^* = b^*(KN, KS, \delta).$$

2) Найденные в пункте 1 алгоритма стратегии ПП подставляются в (3.2). После этого проводится максимизация (3.2) с ограничениями (3.7).

В результате определяются оптимальные управления ОУ в зависимости от стратегии ФЦ

$$KN^* = KN^*(G, L); KS^* = KS^*(G, L); \delta^* = \delta^*(G, L).$$

3) Решается задача (3.1), (3.8)–(3.10) с учетом того, что

$$P = P^*(KN^*, KS^*, \delta^*);\;\; b = b^*(KN^*, KS^*, \delta^*);$$

$$KN = KN^*(G, L); KS = KS^*(G, L); \delta = \delta^*(G, L).$$

Оптимальными для ФЦ являются величины G^*, L^*, приносящие ему максимальный доход при выполненном условии (3.10).

4) Равновесие побуждения определим как набор величин

$$\{G^*, L^*, KN_*, KS_*, \delta_*, P_*, b_*\},$$

где

$$KN_* = KN^*(G^*, L^*); KS_* = KS^*(G^*, L^*); \delta_* = \delta^*(G^*, L^*);$$

$$P_* = P^*(KN_*, KS_*, \delta_*);\;\; b_* = b^*(KN_*, KS_*, \delta_*).$$

Равновесие побуждения строится на основе метода имитационного моделирования [4].

5. Информационно-программная поддержка систем управления

В современных условиях организация эффективных систем управления различной природы невозможна без должной информационной поддержки принимаемых решений, квалифицированной помощи субъектам управления различных уровней при принятии управленческих решений, комплексного подхода к проблеме, предполагающего создание информационно-аналитических систем (ИАС) управления. ИАС являются частным случаем систем поддержки принятия решений управления в различных областях. Они способствуют решению основных задач оперативного и долгосрочного управления, а также управления в условиях чрезвычайных ситуаций.

ИАС являются мощным инструментом для выработки альтернативных вариантов действий, анализа последствий их применения и совершенствования навыков руководителя при принятии управленческих решений. При управлении устойчивым развитием иерархических систем управления в условиях коррупции необходимо использовать ИАС, обладающие соответствующим математическим и программным обеспечением.

Типовая структура ИАС предполагает наличие трех блоков [5]: хранилища данных (СУБД и анализ данных), базы моделей (модели, методы, моделируемые процессы) и экспертной системы.

Хранилище данных представляет собой совокупность баз данных, в которых накапливается вся имеющаяся информация о каждом из экологических объектов в отдельности и всей системе в целом. Кроме того, в виде баз данных или электронных таблиц здесь сосредоточены справочные данные, необходимые для работы других блоков системы.

База моделей содержит как модели отдельных подсистем, так и модели, описывающие свойства совокупности рассматриваемых объектов. Здесь же расположены модели воздействия и ряд других моделей. Этот блок активно связан с хранилищем данных, сведения из которого используются базой моделей для их верификации и при непосредственной работе самих моделей.

Экспертная система представляет собой базу знаний моделей управления, которую можно условно разделить на две части. В первой представлена известная информация и заранее разработанные модели управления, находится база всех документов, регламентирующих использование ресурсов экосистемы и имеющих отношение к управлению природными ресурсами разного уровня, а также модели (сценарии) управления, предписанные и определенные имеющимися документами. Сюда же включена база результатов прогноза последствий тех или иных экологических ситуаций, полученных по заранее разработанным сценариям.

Вторая часть экспертного блока использует информацию, модели и данные иного рода – экспертные, основанные на знаниях, опыте, интуиции специалистов-экспертов в области управления. Они непрерывно пополняются по мере использования ИАС.

Все три блока объединяются общей программной оболочкой (интерфейс и авторизация), которая дает возможность пользователю работать с каждой базой данных и любой моделью как в автономном режиме, так и во взаимодействии друг с другом. Все базы данных и базы знаний являются открытыми для пополнения и корректировки имеющейся в них информации.

Предлагаемая статическая математическая модель коррупции, наряду с предложенной в [3] динамической моделью, может служить основной моделью оптимизирующей и прогнозирующей подсистем аналитического блока. Модель (3.1)–(3.10) требует для своей реализации знания параметров только одного отдельно взятого предприятия, что является ее несомненным достоинством по сравнению с моделью из [3].

6. Модельные расчеты

Приведем ряд примеров исследования модели (3.1)–(3.10) в случае

$$C_P(Y) = D\frac{Y}{1-Y}; \quad C_\Phi(y) = C_1 y; \quad C_y(y) = C_2 y;$$

$$f_i(z) = \alpha_i z; \quad i = 1,2,3; \quad h(z) = \alpha_4 z; \quad a_1(z) = \alpha_5 z; \quad a_2(z) = \alpha_6 z.$$

Для предприятия методом множителей Лагранжа получены значения стационарных точек $(P_k^0, b_i^0; i = 1,2; k = 1,2,\dots,7)$, одна из которых является оптимальной. Причем

$$b_1^0 = 0; \quad b_2^0 = b_{max}; \quad P_1^0 = 0; \quad P_2^0 = 1-\varepsilon; \quad P_3^0 = 1-\frac{W_1}{W}; \quad P_4^0 = 1-\frac{W_2}{W};$$

$$P_5^0 = 1 - \sqrt{\frac{(1-\nu)D}{bK + (1-\nu)s}}; \quad P_6^0 = 1 - \sqrt{\frac{(1-\nu)D}{bK + KN^0 s}};$$

$$P_7^0 = 1 - \sqrt{\frac{(1-\nu)D}{bK + KS^0 s}},$$

где $K = 1 - L\delta\alpha_2 - (1-\delta)\alpha_3$.

Точки $P_i^0 (i = 3, 4, 5, 6, 7)$ относятся к стационарным только в том случае, если принадлежат множеству допустимых управлений, то есть $0 \le P_i^0 \le 1 - \varepsilon$.

Дальнейшее исследование проводилось путем имитационного моделирования согласно [3].

Пример 6.1. Для следующего набора входных данных (у.е. – стоимость в условных единицах; сут – сутки; м – метр; мг – миллиграмм; л – литр):
$C_1 = D = 1$ (сут. у.е.)/мг; $C_0 = 100W$(сут. у.е.)/мг; $\gamma = 0.2$ у.е.; b=0.01 мг/(сут. у.е.); $KN_{max} = 8$; KS_{max}= 10; $Q = 1$ м^3/сут.; $\nu = 0.24$; $\varepsilon = 0.01$; $\mu = 0.5$; C_2= 0.4 (сут. у.е.)/мг; Φ =5 10^9у.е.; $W_1 = 0.25b\gamma\Phi^{1/2}$; $W_2 = 0.5b\gamma\Phi^{1/2}$; $Q_{max} = 60$; $\alpha_1 = \alpha_2$ =1; $\alpha_3 = 10$; $\alpha_4 = 3$ (сут. у.е.)/мг; $\alpha_5 = 6 \ / \ b_{max}$; $\alpha_6 = 5/b_{max}$; $s = 25$ (сут. у.е.)/мг; L_{max}=1; $C_{max} = 400W$ (сут. у.е.)/мг; b_{max}=2 (сут. у.е.)/мг
метод побуждения в условиях коррупции реализуется.

Для ПП выгодно, чтобы объемы сброса загрязнений не превосходили величины W_1. При этом ПП не предлагает взятку ОУ («эффективность» взятки невелика по сравнению с величиной платы за сброс загрязнений, затратами на очистку сточных вод), ОУ ее брать не собирается (наказание его за принятие взятки велико по сравнению с размером предполагаемой взятки). В этом случае

$$KN_* = KS_* = 0.8; P_* = 0.7921; L^* = 0.93; b_* = 0(\text{сут. у.е.})/\text{мг}; G^* = 1;$$

$$\delta_* = 0; J_\Phi = 2017\text{у.е.}; J_1 = 4405\text{у.е.}; J_y = -11\text{у.е.}$$

Пример 6.2. При изменении (увеличении или уменьшении) по сравнению с примером 6.1 затрат на определение «масштабных» коэффициентов или увеличении возможного наказания за дачу и принятие взятки стратегии всех субъектов управления не меняются по сравнению с примером 6.1.

В случае α_4= 0.3 (сут. у.е.)/мг по сравнению с примером 6.1 изменится только доход ФЦ, а именно $J_Ф = 2089$ у.е.; в случае α_4= 10 (сут. у.е.)/мг – $J_Ф = 1832$ у.е.; в случае входных данных примера 6.1 и $\alpha_1 = \alpha_2$=10 получим $J_Ф = 2089$ у.е.

Пример 6.3. При увеличении расхода воды на ПП по сравнению с примером 6.1 ($Q = 2$м^3/сут.) оптимальная стратегия ПП меняется. Для ПП становится выгодным, чтобы объемы сброса загрязнений не превосходили величины W_2, но были больше величины W_1. При этом ПП предлагает максимально возможную взятку, а ОУ ее берет. В этом случае

$$KN_* = KS_* = 5.6; P_* = 0.5445; L^* = 0.33; b_* = 2(\text{сут. у.е.})/\text{мг}; G^* = 1;$$

$$\delta_* = 1; J_Ф = 2283\text{у.е.}; J_1 = 4406\text{у.е.}; J_y = 64\text{у.е.}$$

Пример 6.4. При увеличении размера платы за сброс загрязнений по сравнению с примером 6.3 ($s = 100$ (сут. у.е.)/мг) изменятся стратегии всех субъектов управления. Для предприятия становится выгодным, чтобы объемы сброса загрязнений не превосходили величины W_1. ПП взятку предлагает, но ОУ ее не берет. Доход ФЦ растет, остальных субъектов управления падает.

$$KN_* = KS_* = 0; P_* = 0.8911; L^* = 0; b_* = 0(\text{сут. у.е.})/\text{мг}; G^* = 1;$$

$$\delta_* = 1;\ J_Ф = 2575\text{у.е.}; J_1 = 3323\text{у.е.}; J_y = -6\text{у.е.}$$

Пример 6.5. При уменьшении размера платы за сброс загрязнений по сравнению с примером 6.1 ($s = 1$ (сут. у.е.)/мг) ПП взятку не предлагают, хотя ОУ готовы ее взять. Для ПП выгодно, чтобы объемы сброса загрязнений не превосходили величины W_2, но были больше величины W_1.

$$KN_* = KS_* = 6.4; P_* = 0.6435; L^* = 0.6; b_* = 0(\text{сут. у.е.})/\text{мг}; G^* = 0.8;$$

$$\delta_* = 1;\ J_Ф = 1591\text{у.е.}; J_1 = 5056\text{у.е.}; J_y = 6\text{у.е.}$$

Пример 6.6. Варьирование степени «эффективности» взяток по сравнению с примером 6.1 не приводит к существенным изменениям оптимальных стратегий субъектов управления.

В случае $\alpha_5 = 18/b_{max}; \alpha_6 = 15/b_{max}$ или $\alpha_5 = 2/b_{max}; \alpha_6 = 1/b_{max}$ получим, что

$$KN_* = KS_* = 0.8; P_* = 0.7921; L^* = 0.8; b_* = 0(\text{сут. у.е.})/\text{мг}; G^* = 1;$$

$$\delta_* = 0;\ J_\Phi = 2026\text{у.е.}; J_1 = 4405\text{у.е.}; J_y = -11\text{у.е.}$$

Пример 6.7. Метод побуждения в условиях коррупции работает не всегда. Если возможности ФЦ по контролю взяток и наказанию за них невелики, то метод может не реализовываться.

Например, в случае входных данных примера 6.1 и $\alpha_1 = \alpha_2$=0.1 или L_{max}=0.1 выполнить условия устойчивого развития системы не удается, метод побуждения в условиях коррупции не работает.

Результаты всех приведенных выше модельных примеров отличаются от результатов, полученных по более сложной динамической модели из [3] для аналогичных входных данных. Тем не менее, все основные свойства модели сохраняются, что свидетельствует о возможности использования упрощенной модели для прогноза состояния эколого-экономических систем в условиях коррупции.

7. Заключение

Новизна предложенной математической модели по сравнению с [3] состоит в отказе от рассмотрения контроля качества речных вод и от нестационарной постановки задачи, гипотезе контроля качества только сточных вод на каждом предприятии, дифференцированном наказании за взятки различных субъектов управления. Несмотря на сделанные упрощения, предложенная модель управления устойчивым развитием в условиях коррупции позволяет наблюдать основные закономерности оппортунистического поведения различных субъектов управления.

Если наказание дающего взятку велико или «эффективность» взятки невелика, то взятка ПП не предлагается. Если субъект управления верхнего уровня выделяет часть поступающих к нему средств нижестоящим субъектам и наказание берущего взятку субъекта велико, то им нет смысла брать предлагаемые взятки. В противном случае интересы субъектов управления разлиных уровней противоположны. Как следствие, субъекты управления средних уровней заинтересованы в получении взяток.

Если «эффективность» взятки невелика по сравнению с величиной штрафа за нее (примеры 6.1, 6.2, 6.5, 6.6), то предлагать ее не имеет смысла, в противном случае для ПП выгодна максимально возможная взятка (примеры 6.3, 6.4). Определяющими факторами для ОУ при решении вопроса – брать или нет взятки – являются «масштабные» коэффициенты и размер средств, поступающих к нему от ФЦ (примеры 6.1–6.5). Метод побуждения в условиях коррупции работает не всегда (пример 6.7).

Модель в силу своей стационарности и учета только качества сточных вод легко идентифицируема, реализуема, используя ее можно прогнозировать развитие систем управления в условиях коррупции. Определение необходимых для ее исследования входных данных не представляет больших трудностей. Предложенная модель может составить основу аналитического блока ИАС управления устойчивым развитием в условиях коррупции, использоваться руководителями разных уровней для прогноза и нахождения оптимальных стратегий поведения в различных ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выборнов Р.А. *Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников.* М.: ИПУ РАН, 2006.

2. Полтерович В.М. *Факторы коррупции* // Экономика и математические методы. 1998. Т. 34. Вып. 3. С. 30–39.

3. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Управление устойчивым развитием иерархических систем в условиях коррупции* // Проблемы управления. 2010. № 5. С. 18–25.

4. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами* // Проблемы управления. 2007. № 4. С. 64–69.

5. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Информационно-аналитическая система управления эколого-экономическими объектами* // Из-

вестия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 230–238.

6. Усов А.Б. *Модельное исследование коррупции в трехуровневых системах управления* // Экономика и математические методы. 2009. Т. 45. Вып. 2. С. 66–73.

7. Rose-Ackerman S. *The Economics of Corruption* // Journal of Political Economy. 1975. № 4. P. 187–203.

THE SUSTAINABLE DEVELOPMENT OF THE MANAGEMENT SYSTEMS IN THE CONDITIONS OF CORRUPTION

Gennady A. Ougolnitsky, South State University, Dr.Sc., professor (ougoln@mail.ru).
Anatoly B. Usov, South State University, Dr.Sc., docent (usov@math.rsu.ru)

Abstract: The game theoretic formalization of the corruption phenomena in three-level management systems is given. The consideration is based on the example of the systems of water quality control. The stationary model is offered. In this model the conditions of the sustainable development of the river systems are understood as satisfying of the maximum allowable concentrations of the pollutants in sewage. The solution is constructed by the method of simulation modeling. Typical examples are given. The method of the consideration of the possibility to corruptions in hierarchical system is offered.

Keywords: management system, corruption, hierarchical games, information-analitical system, impetus method.

Пример оформления статьи для публикации в журнале «Математическая теория игр и её приложения»

Статьи принимаются в формате TEX. Правила оформления и стилевой файл доступны на официальном сайте журнала: http://mgta.krc.karelia.ru

УДК (обязательно указывать)
ББК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Имя О. Фамилия*
Организация
Полный адрес организации
e-mail: author@noname.ru

Текст аннотации.

Ключевые слова: список ключевых слов, разделенных запятыми.

1. Введение

Основной текст должен быть напечатан 12 шрифтом.

Ссылки на литературу в тексте должны быть в виде [1] или [1,2 - 5]. Все сокращения в тексте должны быть расшифрованы при первом упоминании.

2. Модель

Нумеровать следует только те формулы, на которые есть ссылки в тексте. Формулы с номерами должны быть выделены в отдельную

* Ссылка на грант

строку. Нумерация двойная по разделам: (1.1) – в разделе 1; (2.1) – в разделе 2, и т.д.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,. \tag{2.1}$$

Нумерация теорем, определений, следствий и т.д. – двойная по разделам арабскими цифрами.

Теорема 2.1. *Формулировка теоремы.*

Доказательство. Формулировка доказательства.

$$a = b\,. \tag{2.2}$$

□

2.1. Основные определения

Подразделы должны быть выделены двойной нумерацией.

Определение 2.1. *Формулировка определения.*

Замечание 2.1. Формулировка замечания.

3. Таблицы

Числовой материал следует представлять в форме таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы сквозной нумерацией арабскими цифрами. После номера может быть указано название таблицы.[1]

Таблица 1.

1	2	3
4	5	6

4. Рисунки

Рисунки должны быть выполнены в хорошем качестве, преимущественно в формате .eps. Нумерация рисунков сквозная. Каждый рисунок должен иметь подпись.

[1] сноски из текста нумеруются по порядку следования

МТИ&П

Рисунок 1. Журнал

Список литературы оформляется как нумерованный список. Первыми приводятся источники на русском языке, затем на английском.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. *Название книги*. Город: Издательство, 2008.

2. Фамилия1 И.О., Фамилия2 И.О. *Название статьи* // Название Журнала. 1993. № 1. С. 59–78.

3. Surname1 N., Surname2 N. *Title* // Journal. 2001. V. 1. N 2. P. 9–17.

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

ФИО на английском языке, название организации, научная степень, научное звание на английском языке (author@noname.ru).

Abstract: Аннотация на английском языке.

Keywords: ключевые слова на английском языке.

строку. Нумерация двойная по разделам: (1.1) – в разделе 1; (2.1) – в разделе 2, и т.д.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,. \tag{2.1}$$

Нумерация теорем, определений, следствий и т.д. – двойная по разделам арабскими цифрами.

Теорема 2.1. *Формулировка теоремы.*

Доказательство. Формулировка доказательства.

$$a = b\,. \tag{2.2}$$

□

2.1. Основные определения

Подразделы должны быть выделены двойной нумерацией.

Определение 2.1. *Формулировка определения.*

Замечание 2.1. Формулировка замечания.

3. Таблицы

Числовой материал следует представлять в форме таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы сквозной нумерацией арабскими цифрами. После номера может быть указано название таблицы.[1]

Таблица 1.

1	2	3
4	5	6

4. Рисунки

Рисунки должны быть выполнены в хорошем качестве, преимущественно в формате .eps. Нумерация рисунков сквозная. Каждый рисунок должен иметь подпись.

[1] сноски из текста нумеруются по порядку следования

МТИ&П

Рисунок 1. Журнал

Список литературы оформляется как нумерованный список. Первыми приводятся источники на русском языке, затем на английском.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. *Название книги.* Город: Издательство, 2008.
2. Фамилия1 И.О., Фамилия2 И.О. *Название статьи* // Название Журнала. 1993. № 1. С. 59–78.
3. Surname1 N., Surname2 N. *Title* // Journal. 2001. V. 1. N 2. P. 9–17.

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

ФИО на английском языке, название организации, научная степень, научное звание на английском языке (author@noname.ru).

Abstract: Аннотация на английском языке.

Keywords: ключевые слова на английском языке.