Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 3–24

УДК 517.977.8+519.834
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ*

Маргарита А. Гладкова
Николай А. Зенкевич
Высшая школа менеджмента
Санкт-Петербургский государственный университет
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 3б
e-mail: gladkova@gsom.pu.ru, zenkevich@gsom.pu.ru

В работе построена и исследована теоретико-игровая модель управления качеством продукции в условиях конкуренции. Данная модель представляет собой двухшаговую игру фирм-производителей при неравномерном распределении склонности к качеству потребителей. В явном виде построено сильное равновесие в исследуемой модели, что позволило найти равновесные цены, доли рынка и доходы фирм-производителей. Практическое применение механизма управления качеством апробировано на примере анализа эмпирических данных для двух систем Интернет-трейдинга.

Ключевые слова: оценка качества, измерение качества, склонность к качеству потребителя, управление качеством, двухшаговая игра, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, парето-оптимальное решение, оптимальная дифференциация по качеству, показатель удовлетворенности потребителя.

---

* Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-1-00301-а).

1. Введение

В статье рассматриваются вопросы, связанные с количественной оценкой и разработкой механизма управления качеством производимой продукции и оказываемых услуг в условиях конкуренции. Под управлением качеством здесь понимается целенаправленное изменение его количественной оценки.

Основная теоретическая задача проведенного исследования заключается в разработке механизма управления качеством на основе построения и нахождения решения адекватной теоретико-игровой модели конкуренции фирм -производителей с учетом информации о качественных предпочтениях потребителей. С практической точки зрения интерес представлял вопрос методики измерения количественной оценки качества.

Для количественной оценки качества товара на основании мнений потребителей о его характеристиках будем оценивать качество товара как системы в целом. Поэтому в расчетах на основании эмпирических данных вычисление качества товара было сведено к некоторому единому сводному показателю, позволяющему оценивать степень удовлетворенности потребителем товаром в целом. Для этого использована методика [3], которая позволила получить сводную оценку качества исследуемого товара на основе экспертных данных, полученных от потребителей.

Для оценки предпочтительного качества товара в условиях конкуренции построена теоретико-игровая модель, которая позволяет проанализировать процесс принятия решения по производству товаров необходимого качества в условиях рыночной конкуренции.

Представленная теоретико-игровая модель является развитием работ Бенасси и Мотта, которые рассматривали модели дуополии в условиях вертикальной дифференциации по качеству товаров. Так в работе [9] проанализированы два вида моделей вертикальной дифференциации продуктов в целях изучения влияния конкуренции по цене и количеству на вид равновесия по Нэшу. Модели различаются видом функции затрат относительно качества продукции. В одном случае они постоянные, а в другом – переменные. Установлено, что оптимальная дифференциация товаров увеличивается в обоих рассмотренных случаях по сравнению с более ранними результатами при симметричном выборе качества. Авторами показано, что дифференциация фирм больше в случае конкуренции по Бертрану, чем по Курно.

В данной статье модель [9] была доработана на случай, когда рынок непокрыт, и параметр склонности к качеству распределен неравномерно (треугольное распределение). Другая модификация модели [9] была исследована авторами в работе [1].

В работе [6] исследована дуополия в условиях вертикальной дифференциации в случае непокрытого рынка. Авторы анализируют влияние концентрации потребителей в отношении склонности к приобретению более качественных товаров на поведение фирм.

В статье [10] исследованы теоретико-игровые модели дуополии и вертикальной дифференциации для случая последовательного выбора качеств производимых товаров компаниями-конкурентами (модель Штакельберга). При этом авторы ограничиваются рассмотрением случая покрытого рынка. Подобная проблематика одновременного и последовательного выбора исследована в работе [5].

В теоретическом плане основными вопросами исследования являлись нахождение равновесия по качеству товаров и оптимальной дифференциации по качеству в условиях конкуренции. С этой целью была разработана теоретико-игровая модель дуополии, в основе которой лежат модели [9,11], а также их развитие в работе [7].

2. Теоретико-игровая модель конкуренции по качеству

В работе рассматривается двухшаговая теоретико-игровая модель, когда фирмы на первом шаге конкурируют по качеству производимого товара, а затем по ценам при известных качествах продукции. При этом предполагается, что на каждом шаге фирмы реализуют свои решения одновременно.

Пусть две фирмы (игроки 1 и 2, соответственно) на некотором рынке предлагают потенциальным потребителям товары одинаковых потребительских свойств, но разного качества. Будем считать, что каждый потребитель имеет единичный спрос, но по-разному готов платить за качество товара. Предположим, что потребитель характеризуется параметром склонности к качеству $\theta \in [0, \overline{\theta}]$, который и определяет его готовность покупать товар известного качества. Тогда полезность потребителя со склонностью к качеству θ (потребитель θ)

при покупке товара качества s по цене p может быть представлена в виде:

$$U_\theta(p,s) = \begin{cases} \theta s - p, & p \le \theta s, \\ 0, & p > \theta s. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь θs – это максимальная цена потребителя θ, при которой он готов покупать товар качества s, т.е. ценность товара для потребителя θ.

Естественно предположить, что потребитель θ покупает товар качества s по цене p, если $U_\theta(p,s) > 0$, и не покупает товар в противном случае. Будем предполагать в модели, что параметр θ случайный и имеет треугольное распределение вида:

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \le 0, \\ \frac{4}{b^2}\theta & \text{при } \theta \in A = (0, \frac{b}{2}], \\ \frac{4}{b} - \frac{4}{b^2}\theta & \text{при } \theta \in B = (\frac{b}{2}, b], \\ 0 & \text{при } \theta > b. \end{cases}$$

Тогда функция распределения параметра θ примет вид:

$$F(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \le 0, \\ \frac{2}{b^2}\theta^2 & \text{при } \theta \in A = (0, \frac{b}{2}], \\ \frac{4}{b}\theta - \frac{2}{b^2}\theta^2 - 1 & \text{при } \theta \in B = (\frac{b}{2}, b], \\ 1 & \text{при } \theta > b. \end{cases}$$

Здесь параметр $b \in [0, \overline{\theta}]$ – крайняя точка носителя распределения. Заметим, что функция распределения является непрерывной, дифференцируемой и строго возрастает на промежутке $[0, b]$. На рис. 1 представлен график функции плотности распределения параметра склонности к качеству θ.

Потребитель θ безразличен к покупке товара качества s_1 при цене p_1 и отказу от покупки, если $\theta s_1 - p_1 = 0$. Поэтому величина $\theta_1 = \theta_1(p_1, s_1) = \frac{p_1}{s_1}$ характеризует такого потребителя.

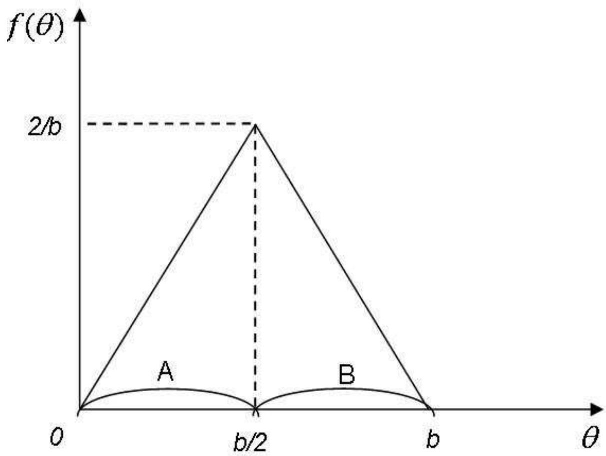

Рисунок 1. Плотность распределения $f(\theta)$.

Пусть фирма i производит товар качества s_i при удельных затратах c_i, и пусть для определенности $s_2 > s_1$, значения которых известны обеим фирмам и потребителям. Будем предполагать, что фирмы ведут ценовую конкуренцию по Бертрану. Обозначим через p_i цену, назначенную фирмой i за товар качества s_i.

Потребитель θ безразличен к покупке товаров качеств s_1, s_2 при ценах p_1, p_2 соответственно, где $s_1 \leq s_2$ и $p_1 \leq p_2$, если $\theta s_1 - p_1 = \theta s_2 - p_2$. Поэтому число $\theta_2 = \theta_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = \dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}$ характеризует такого потребителя.

Определим функции спроса $D_i(p_1, p_2, s_1, s_2)$ фирм 1 и 2, соответственно, в виде:

$$D_1(p_1,p_2,s_1,s_2)=\int\limits_{\theta_1(p_1,s_1)}^{\theta_2(p_1,p_2,s_1,s_2)} f(\theta)d\theta=F(\theta_2(p_1,p_2,s_1,s_2))-F(\theta_1(p_1,s_1));$$

$$D_2(p_1,p_2,s_1,s_2)=\int\limits_{\theta_2(p_1,p_2,s_1,s_2)}^{b} f(\theta)d\theta=1-F(\theta_2(p_1,p_2,s_1,s_2)).$$

Выигрыш фирмы будем оценивать функцией дохода от продаж

$$R_i(p_1,p_2,s_1,s_2)=p_i\cdot D_i(p_1,p_2,s_1,s_2), \tag{2.2}$$

где p_i – цена фирмы i за товар качества s_i.

Теоретико-игровая модель управления качеством представляет собой следующую двухшаговую игру двух лиц (фирм, игроков), где выборы на каждом шаге осуществляются одновременно. При этом:

- на первом шаге фирмы i выбирают качества s_i товаров;
- на втором шаге, в предположении, что качества s_i товаров известны игрокам и потребителям, фирмы продолжают конкуренцию по ценам p_i.

Решать данную игру будем методом обратной индукции. В этом случае равновесие по Нэшу строится в два этапа. На первом этапе в предположении, что качества товаров s_i известны, находим равновесные цены $p_i^*(s_1, s_2)$. Зная $p_i^*(s_1, s_2)$, на втором этапе находим равновесные по Нэшу значения качеств s_1^*, s_2^* фирм 1 и 2, соответственно.

В силу треугольного распределения параметра θ явный вид функций спроса будет различаться в зависимости от взаимного расположения параметров θ_1 и θ_2 на промежутке $[0, b]$. Теоретически возможны три случая:

1. $\theta_1, \theta_2 \in A$,
2. $\theta_1, \theta_2 \in B$,
3. $\theta_1 \in A, \theta_2 \in B$,

где области $A = [0, b/2]$, $B = (b/2, b]$ изображены на рис.1.

Для нахождения ценового равновесия воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Предположим, что некоторая вогнутая функция плотности $f(\theta)$, определенная на интервале $[0, b]$, где $b \geq 0,5$, симметрична относительно медианы распределения $b/2$ и удовлетворяет условиям $f(0) = f(b) = 0$ и $f(b/2) \geq 2$. Если $\theta_2^* > \theta_1^*$ значения параметров в ценовом равновесии в модели вертикальной дифференциации*[1]*, то θ_2^* единственно и $\theta_2^* < b/2$.*

---

[1]В вертикально дифференцированном пространстве продуктов все потребители согласны относительно наиболее предпочтительного набора характеристик товара. Качество явный тому пример.

Из теоремы 2.1 следует, что для нахождения ценового равновесия достаточно рассмотреть только один случай взаимного расположения параметров $\theta_1, \theta_2 \in A$ (см. рис. 1). Тогда функции спроса фирм 1 и 2, соответственно, примут вид:

$$D_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_1}{s_1}\right)^2;$$

$$D_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = 1 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2;$$

и функции выигрышей могут быть записаны в следующем виде:

$$R_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_1\left(\frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_1}{s_1}\right)^2\right);$$

$$R_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_2\left(1 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2\right).$$

Найдем ценовое равновесие p_1^*, p_2^* при заданных качествах товаров s_1 и s_2.

Значения p_1^*, p_2^* находим как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial p_1} = \dfrac{2}{b^2}\left(\left(\dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right)^2 - 3\left(\dfrac{p_1}{s_1}\right)^2 - 2p_1\dfrac{(p_2 - p_1)}{(s_2 - s_1)^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial p_2} = 1 - \dfrac{6}{b^2}\left(\dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}\right) - \dfrac{4p_1}{b^2(s_2 - s_1)} = 0. \end{cases}$$

Для нахождения решения системы сделаем замену вида $p_2 = mp_1$, где коэффициент $m > 1$. Тогда первое уравнение преобразуется в квадратное уравнение относительно m следующего вида:

$$m^2 - 4m + 3 - 3\frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1^2} = 0.$$

Откуда, учитывая неравенство $m > 1$, получаем:

$$m = 2 + \sqrt{1 + 3\frac{(s_2 - s_1)^2}{s_1^2}}. \tag{2.3}$$

Из системы уравнений получим ценовое равновесие по Нэшу

$$\begin{cases} p_1^*(s_1,s_2) = \dfrac{bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{m-3}{\sqrt{(3m-1)(m-3)}}, \\ \\ p_2^*(s_1,s_2) = \dfrac{bs_1}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{m(m-3)}{\sqrt{(3m-1)(m-3)}}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где m задается значением (2.3).

Теперь вычислим спрос фирм 1 и 2 и их выигрыши в равновесии как функции качеств соответственно

$$\begin{cases} D_1^*(s_1,s_2) = D_1^*(p_1^*(s_1,s_2), p_2^*(s_1,s_2), s_1, s_2) = \dfrac{2m}{3(3m-1)}, \\ \\ D_2^*(s_1,s_2) = D_2^*(p_1^*(s_1,s_2), p_2^*(s_1,s_2), s_1, s_2) = \dfrac{2m}{3m-1}, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} R_1^*(s_1,s_2) = R_1^*(p_1^*(s_1,s_2), p_2^*(s_1,s_2), s_1, s_2) = \dfrac{2bs_1}{3\sqrt{6}} \dfrac{m(m-3)}{\sqrt{(3m-1)^3(m-3)}}; \\ \\ R_2^*(s_1,s_2) = R_2^*(p_1^*(s_1,s_2), p_2^*(s_1,s_2), s_1, s_2) = \dfrac{2bs_1}{\sqrt{6}} \dfrac{m^2(m-3)}{\sqrt{(3m-1)^3(m-3)}}. \end{cases} \tag{2.6}$$

На втором этапе решения игры найдем равновесие по Нэшу по качествам $s_1, s_2 \in [\underline{s}, \overline{s}]$ относительно функций выигрыша R_1^*, R_2^*, где $\underline{s} < \overline{s}$ – заданные параметры.

Частная производная выигрыша R_2 фирмы 2 по s_2 равна

$$\frac{\partial R_2^*(s_1,s_2)}{\partial s_2} = \frac{b(s_2-s_1)\sqrt{6}}{\sqrt{s_1^2+3(s_2-s_1)^2}} \frac{m(3m^2-7m+6)}{\sqrt{(3m-1)^5(m-3)}}.$$

Непосредственно проверяется, что в предположении $s_2 > s_1$ производная $\dfrac{\partial R_2^*(s_1,s_2)}{\partial s_2} > 0$, т.е. функция $R_2^*(s_1,s_2)$ строго возрастает по s_2. Поэтому равновесной стратегией фирмы 2 будет выбор максимально возможного значения, т.е. $s_2^* = \overline{s}$.

Для нахождения равновесного значения s_1 для фирмы 1 сделаем замену переменных $s_1^* = k\overline{s}$, где $0 < k < 1$ – неизвестный параметр. Тогда значение параметра k можно найти из условия

$$\frac{\partial R_1^*(k\overline{s}, \overline{s})}{\partial k} = 0. \tag{2.7}$$

.

Явный вид решения уравнения очень громоздкий, но при любом заданном числовом значении параметра b можно получить численное значение коэффициента k, используя программный пакет Maple.

Так, например, если диапазон распределения параметра θ равен $[0; 0,5]$, т.е. $b = 0,5$, решением уравнения (2.7) будет число $k = 0,6543$. В этом случае равновесие по Нэшу имеет вид:

$$\begin{cases} s_1^* = 0,6543\overline{s}, \\ s_2^* = \overline{s}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Подставляя это решение в формулу (2.3), получим численное значение коэффициента $m = 3,3555$.

В соответствии с формулами для равновесных цен (2.4), спроса (2.5) и выигрышей (2.6), можно выписать в явном виде окончательные выражения относительно параметров b и k для равновесных цен p_1^*, p_2^*, спроса D_1^*, D_2^* в равновесии и равновесных значений выигрышей R_1^*, R_2^*

$$\begin{cases} p_1^* = \dfrac{kb\overline{s}}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k}}; \\[2ex] p_2^* = \dfrac{b\overline{s}}{\sqrt{6}}\left(2k+\sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1^* = \dfrac{2\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+4k}{3(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k)}; \\[2ex] D_2^* = \dfrac{2\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+4k}{3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1^* = \dfrac{2kb\overline{s}}{3\sqrt{6}}\left(2k+\sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{\left(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k\right)^3}}; \\[2ex] R_2^* = \dfrac{2b\overline{s}}{\sqrt{6}}\left(2k+\sqrt{k^2+3(1-k)^2}\right)^2\sqrt{\dfrac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2}-k}{\left(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2}+5k\right)^3}}. \end{cases}$$

Заметим, что фирма 2, производящая продукцию более высокого качества s_2, получает в равновесии больший доход, чем фирма 1, поскольку

$$R_2^* - R_1^* = \frac{2b\overline{s}}{\sqrt{6}} \left(2k + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{k^2+3(1-k)^2} - k}{\left(3\sqrt{k^2+3(1-k)^2} + 5k\right)^3}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{5k}{3} + \sqrt{k^2 + 3(1-k)^2}\right) > 0.$$

Отметим, что по построению в данной модели имеется два асимметричных равновесия по Нэшу $(k\overline{s}, \overline{s})$ и $(\overline{s}, k\overline{s})$, выгодные, соответственно, игрокам 2 и 1. Нетрудно заметить, что оба равновесия при этом являются парето-оптимальными, т.е. сильными равновесиями [2].

Поэтому в плане выбора оптимального поведения в условиях конкуренции фирмы сталкиваются с известной проблемой борьбы за лидерство, подобной игре «Семейный спор» [2]. Это означает, что каждая фирма будет стремиться стать лидером, т.е. начать производить продукцию высокого качества, обеспечив себе более выгодную позицию в равновесии.

Заметим также, что если рассмотреть модель Штакельберга (фирма 2 – лидер, фирма 1 – ведомый), то результат получится аналогичным, но равновесие будет одно – $(k\overline{s}, \overline{s})$. При этом лидер (фирма 2) использует свое право первого хода и займет более выгодную позицию в равновесии.

3. Численный пример

В данном разделе рассмотрим пример применения представленной в предыдущем разделе методики на примере систем Интернет-трейдинга, использующихся в биржевых торгах.

Интернет-трейдинг – это принципиально новый, простой в использовании и высокоэффективный программный инструмент, дающий неограниченную возможность дистанционного участия в биржевых торгах в режиме реального времени через Интернет, а также предоставляющий доступ к огромному количеству аналитической информации. При помощи удаленного торгового терминала инвестор может без постороннего участия выставлять заявки и проводить биржевые сделки. Появляется доступ к финансовой отчетности компаний и аналитической информации по рынку. Благодаря Интернет-трейдингу можно в режиме реального времени наблюдать движение собственных средств и контролировать состояние активов на разных счетах.

В настоящий момент насчитывается свыше 20 систем Интернет-трейдинга, использующихся в России. Некоторые брокеры создали их самостоятельно, другие системы созданы ИТ-компаниями. Разработки ИТ-компаний сейчас доминируют на рынке. К ним относятся в первую очередь QUIK, NetInvestor, TRANSAQ, «ИТС-Брокер». В России наиболее распространена система QUIK, которая используется более 60 брокерами (свыше 3500 работающих пользователей). Система, предлагаемая компанией QUIK, фактически стала именем нарицательным, синонимом понятия «система Интернет-трейдинга».

Существует свыше 100 брокерских организаций-пользователей, которые установили системы Интернет-трейдинга. Списки таких организаций можно найти на сайтах крупнейших российских бирж – Московской межбанковской валютной биржи (ММВБ) и фондовой биржи «Российская торговая система (РТС)».

Основное предназначение системы Интернет-трейдинга – это получение интерфейса для разработки собственной программы, позволяющей осуществлять операции на биржевых торгах. Системы Интернет-трейдинга дают возможность получения биржевой информации и возможность самостоятельного совершения сделок. В них отображаются состояние портфеля инвестора (количество купленных/проданных акций), состояние денежных средств, как правило, в программе имеется опция просмотра ценовых графиков и другие дополнительные возможности.

При эмпирическом исследовании качества системы Интернет-трейдинга были выделены восемь основных характеристик такой системы:

1. количество биржевых рынков, на которые предоставляется доступ;

2. скорость операций, т.е. скорость передачи заявок и приема ин-

формации;

3. функциональность системы (котировки, построение временных рядов, графиков), т.е. наличие встроенной аналитики;

4. осуществляемая поддержка разработчиков;

5. возможность экспорта данных;

6. возможность самостоятельного расширения возможностей системы;

7. цена системы и ее обслуживания;

8. гарантия и надежность использования, т.е. ответственность компании-разработчика за возможные ошибки, их устранение и компенсация убытков.

3.1. Описание выборки

Сбор данных проводился с помощью экспертного анкетирования. По результатам опроса была сформирована выборка из 29 респондентов. В рамках исследования интерес представляли мнения пользователей систем Интернет-трейдинга, а именно, работников департаментов администрирования торговых систем и экономистов брокерских компаний, непосредственно работающих с такими системами. По географическому местоположению были отобраны пользователи систем Интернет-трейдинга из таких крупнейших российских городов, как Москва, Санкт-Петербург и Екатеринбург.

Зачастую брокерские компании работают сразу с несколькими системами Интренет-трейдинга, что позволяет удовлетворять запросы различных инвесторов. Поскольку на российском биржевом рынке основной системой Интернет-трейдинга выступает QUIK, были выделены два типа систем – система QUIK и другие системы (OTHER). В результате такого предположения, получилось, что 22 респондента являются пользователями системы QUIK, и 20 – работают с системами Интернет-трейдинга OTHER.

3.2. Алгоритм и методика оценки качества системы Интернет-трейдинга

Определения качества объекта, представленные в документах ISO 9000 (2005), выделяют системный характер множества свойств объекта. В связи с этим, можно говорить о качестве системы Интернет-трейдинга в целом, о некоторой обобщенной количественной оценке или сводного показателя этого качества.

В данном исследовании респонденты выступали одновременно в роли потребителей и экспертов. На основании мнений потребителей о каждой характеристике системы Интернет-трейдинга мы оценивали качество системы в целом. Для реализации этой идеи был использован метод сводных показателей, реализованный в программе ОСППР АСПИД-3W [3]. Особенности применения ОСППР АСПИД-3W для оценки в условиях неопределенности качества сложных технических систем различного назначения и их проектов представлены, например, в работах [4,8].

Первым этапом эмпирического исследования была обработка данных с целью определения качества выбранной системы Интернет-трейдинга. Для этого респондентам предлагалось оценить степень удовлетворенности каждой из восьми выделенных нами ранее характеристик по всем системам Интернет-трейдинга, используемым в их организации. По методу сводных показателей оценка качества проводилась за три шага:

1. сначала был вычислен сводный показатель степени удовлетворенности для каждой из восьми характеристик системы Интернет-трейдинга QUIK; для каждой характеристики был вычислен сводный показатель по остальным системам Интернет-трейдинга (OTHER);

2. на основе сводных показателей были вычислены общие сводные показатели степени удовлетворенности потребителей α_2 и α_1 для системы QUIK и OTHER, соответственно;

3. на основе общих сводных показателей α_2 и α_1 были вычислены количественные оценки качеств систем по формулам: $s_2 = \alpha_2 p_2$ (для системы QUIK) и $s_1 = \alpha_1 p_1$ (для OTHER), где p_2, p_1 – цены систем QUIK и OTHER.

Формула количественной оценки качества требует пояснения. При анкетировании респондентам задавался вопрос: «Если Вы не вполне удовлетворены системами Интернет-трейдинга, которые используются в Вашей организации, то скажите, насколько процентов больше от нынешней стоимости Вы готовы платить за систему, которая бы Вас полностью удовлетворяла?» Поэтому если система полностью удовлетворяет потребителя, то в соответствии с нашим представлением количественной оценки качества величина $s = p_0$, где p_0 – цена системы. Если же степень удовлетворенности потребителей равна $0 < \alpha < 1$, то $s = \alpha p_0$.

Теперь обсудим связь эмпирической и теоретической модели. Если потребитель со склонностью к качеству θ_0 полностью удовлетворен используемой системой Интернет-трейдинга, то максимальная цена, которую он готов платить за систему равна $\theta_0 p_0$. С другой стороны, $\theta_0 p_0 = p_0 + \Delta p$, где Δp – это приращение цены, при котором потребитель готов приобретать исследуемую систему Интернет-трейдинга. Откуда, $\theta_0 = 1 + \dfrac{\Delta p}{p_0} > 1$. Обозначим склонность к качеству респондента через $\theta = \dfrac{\Delta p}{p_0}$.

Тогда полезность потребителя с параметром склонности к качеству θ примет вид

$$U_\theta(p,s) = \begin{cases} \theta s - p, & p \le \theta s, \\ 0, & p > \theta s, \end{cases} \quad p = p_0 - s, \tag{3.1}$$

где $\theta \in [0, b]$, а правая граница промежутка b определяется из анкеты. Поэтому использование теоретико-игровой модели по данным эмпирического исследования корректно.

3.3. Результаты эмпирического исследования

В данном разделе представлены результаты реализации описанного выше алгоритма анализа полученных при анкетировании данных.

Сбор данных проводился с помощью экспертного анкетирования. Анкета состояла из двенадцати вопросов (разделенных на три группы), отражающих специфику пользователей и систем Интернет-трейдинга. При ответе на первую группу вопросов все респонденты указали, какими системами они пользуются, в каких целях и насколько они удовлетворены каждой из используемых систем в целом.

Вторая группа вопросов посвящена характеристикам систем Интернет-трейдинга. Здесь респондентам было предложено проранжировать характеристики систем по степени важности, указать какими характеристиками систем они удовлетворены и насколько (по 5-бальной шкале Лакерта).

Третья группа вопросов касалась предпочтений потребителей по системам Интернет-трейдинга:

1. какую из используемых систем потребители считают ключевой;
2. на какую величину они готовы увеличить плату за систему при полном удовлетворении потребностей;
3. какой из имеющихся систем они бы хотели пользоваться;
4. какой бренд разработчика более предпочтителен потребителю.

Оценка качества системы QUIK (товар 2) и OTHER (товар 1) проводилась на основе ответов на вторую группу вопросов. Используя программу ОСППР АСПИД-3W, рассчитаны сводные показатели степени удовлетворенности потребителей по каждой характеристике систем (см. табл. 2). В качестве весовых коэффициентов использована информация о ранжировании потребителями выделенных восьми характеристик систем Интернет-трейдинга (см. табл. 1).

Следующим шагом рассчитаны сводные показатели $\alpha_1 = 0,572$ и $\alpha_2 = 0,545$ удовлетворенности потребителями системами QUIK и OTHER, соответственно.

Оценку качества каждой из систем получаем по формуле $s_i = \alpha_i p_i$, где $i = 1$ означает систему OTHER, а $i = 2$ – систему QUIK. Цена на систему Интернет-трейдинга OTHER составляет $p_1 = 119000$ руб. (эта цена получена как среднее арифметическое цен на каждую систему из OTHER, которые представлены на сайтах компаний) и цена системы QUIK равна $p_2 = 140000$ руб., соответственно. Поэтому оценки качеств систем равны $s_1 = 68068$ руб. и $s_2 = 76300$ руб., соответственно.

Таблица 1. Весовые коэффициенты характеристик систем Интернет-трейдинга

Характеристика системы	Веса
количество доступных рынков	6.103
скорость операций	$7,172$
встроенная аналитика	$3,552$
поддержка разработчиков	$5,517$
экспорт данных	$4,103$
возможность самостоятельного расширения	$2,828$
цена	$4,379$
гарантия	$3,586$

Таблица 2. Сводные показатели удовлетворенности характеристиками систем

Характеристика системы	Quik	Other
количество доступных рынков	$0,639$	$0,774$
скорость операций	$0,549$	$0,701$
встроенная аналитика	$0,492$	$0,498$
поддержка разработчиков	$0,699$	$0,612$
экспорт данных	$0,610$	$0,500$
возможность самостоятельного расширения	$0,394$	$0,407$
цена	$0,507$	$0,636$
гарантия	$0,470$	$0,450$

Оценим диапазон изменения качества системы Интернет-трейдинга, т.е. оценим параметры $\underline{s}$ и $\overline{s}$. Для этого рассчитаны показатели степени удовлетворенности потребителей с помощью ОСППР АСПИД-3W, которые получаются в случае, когда потребитель оценивает все характеристики системы по «1 – совсем не удовлетворен» и в случае, когда по всем характеристикам он ставит «5 – полностью удовлетворен». Результаты расчетов дают значения $\underline{\alpha} = 0,056$ и $\overline{\alpha} = 1,000$. Тогда границы диапазона изменения качеств равны $\underline{s} = \underline{\alpha} p_1 = 6664$ руб. и $\overline{s} = \overline{\alpha} p_2 = 140000$ руб.

Оценим теперь верхнюю границу b параметра θ. Величина $b = \max\{\max \Delta p_1, \max \Delta p_2\} = 0,5$. Поэтому $\theta \in [0; 0,5]$.

Далее проверяем гипотезу о треугольном распределении параметра θ склонности к качеству на промежутке $[0; 0,5]$.

В виду небольшой исходной выборки, будем рассматривать гипотезу о треугольном распределении параметра склонности к качеству на промежутке среднего по данной группе потребителей. Таким образом, необходимо проверить гипотезу о треугольном распределении θ на промежутке $[0,15916; 0,220852]$.

В табл. 3 представлены результаты расчетов при проверке гипотезы по критерию Колмогорова. Здесь x_i и x_{i+1} – границы интервалов разбиения значений выборки, l_i – относительные частоты для соответствующих интервалов, F^* – значение эмпирической функции распределения на конце интервала, F – значение теоретической функции распределения на конце интервала.

Таблица 3. Проверка гипотезы о треугольном распределении

x_i	x_{i+1}	l_i	F^*	F	$F^* - F$
0,15916	0,167973	1	0,01	0,034327	0,024327
0,167973	0,176786	9	0,1	0,152158	0,052158
0,176786	0,185599	15	0,25	0,353875	0,103875
0,185599	0,194412	27	0,52	0,63245	0,11245
0,194412	0,203226	25	0,77	0,834055	0,064055
0,203226	0,212039	14	0,91	0,951774	0,041774
0,212039	0,220852	9	1	0,985608	0,014392

По критерию Колмогорова рассчитываем выборочную статистику

$$\lambda^* = \sup \mid F^*(x_i) - F(x_i) \mid = 1,124498.$$

В результате проверки, гипотеза о треугольном распределении данного параметра принимается при уровне значимости 0,01.

Сравним полученные результаты эмпирических исследований с результатами теоретико-игровой модели конкуренции по качеству, описанной в предыдущем разделе. Равновесные оценки качеств систем QUIK и OTHER Интернет-трейдинга равны

$$\begin{cases} s_1^* = 0,6543\overline{s} = 91602, \\ s_2^* = \overline{s} = 140000. \end{cases}$$

Заметим, что оба значения s_1^*, s_2^* попали в допустимый диапазон изменения качеств, т.е. $s_i^* \in [6664, 140000]$. Сравнивая эти значения с экспериментальными оценками $s_1 = 68068$ и $s_2 = 76300$, заключаем, что разработчикам обеих систем необходимо увеличивать качество, а также дифференциацию по качеству.

Для расчета ценовых стратегий вспомним, что $p = p_0 - s$ (см. (3.1)). Тогда равновесные цены разработчиков будут равны соответственно

$$\begin{cases} p_{01}^* = p_1^* + s_1^* = 95305, \\ p_{02}^* = p_2^* + s_2^* = 152424. \end{cases}$$

Данный результат говорит о том, что при большей дифференциации по качеству разработчики могут больше дифференцироваться по ценам. Разница в ценах на системы Интернет-трейдинга в настоящий момент составляет 21 000 руб., а в соответствии с результатами моделирования они могут отличаться более, чем на 57 000 руб. Равновесные доли рынков равны соответственно

$$\begin{cases} D_1^* = 0,247, \\ D_2^* = 0,740. \end{cases}$$

Данный результат отражает рыночную ситуацию в настоящее время, поскольку отношение количества потребителей систем OTHER и QUIK составляет 1 к 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич Н.А., Гладкова М.А. *Теоретико-игровая модель конкуренции "качество-цена"на отраслевом рынке* // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия Менеджмент. 2007. Вып. 4. С. 3–31.

2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр: Учебное пособие для университетов*. Москва: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998.

3. Хованов К.Н., Хованов Н.В. *Система поддержки принятия решений АСПИД-3W (Анализ и Синтез Показателей при Информационном Дефиците)*. Свидетельство об официальной ре-

гистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем. (РосАПО). М.: РосАПО, 1996.

4. Хованов Н.В. *Оценка сложных объектов в условиях дефицита информации* // Труды 7-й международной научной школы "Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах". СПб.: ИПМАШ РАН, 2008. С. 18–28.

5. Aoki R., Prusa T.J. *Sequential versus Simultaneous Choice with endogenous quality* // International Journal of Industrial Organization. 1996. V. 15. P. 103–121.

6. Benassi C., Chirco A., Colombo C. *Vertical differentiation and the distribution of income* // Bulletin of Economic Research. 2006. V. 58. N 4. P. 345–367.

7. Gladkova M., Zenkevich N. *Quality Competition: Uniform vs. Non-uniform Consumer Distribution* // Contributions to Game Theory and Management. Vol II. Collected papers presented on the Second International Conference "Game Theory and Management"(Eds. L.A. Petrosjan, N.A. Zenkevich). SPb: Graduate School of Management, SPbU, 2009. P. 111–124.

8. Hovanov N., Yudaeva M., Hovanov K. *Multicriteria estimation of probabilities on basis of expert non-numeric, non-exact and non-complete knowledge* // European Journal of Operational Research. 2009. V. 195. P. 857–863.

9. Motta M. *Endogenous quality choice: price vs. quantity competition* // The Journal of Industrial Economics. 1993. V. 41. N 2. P. 113–131.

10. Noh Y.-H., Moschini G. *Vertical product differentiation, entry-deterrence strategies, and entry qualities* // Review of Industrial Organization. 2006. V. 29. P. 227–252.

11. Tirole J. *The theory of Industrial Organization.* Cambridge, MA: MIT Press, 2000.

Приложение

Доказательство теоремы 2.1.

Функции выигрыша игроков имеют следующий вид

$$R_1(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_1(F(\theta_2) - F(\theta_1)),$$

$$R_2(p_1, p_2, s_1, s_2) = p_2(1 - F(\theta_2)),$$

где $\theta_1 = \dfrac{p_1}{s_1}, \theta_2 = \dfrac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1}$.

Вычислим производную функции выигрыша R_2 по цене p_2 и приравняем ее к нулю

$$\frac{\partial R_2}{\partial p_2} = 1 - F(\theta_2) - \frac{p_2}{s_2 - s_1} f(\theta_2) = 0.$$

Откуда получаем уравнение

$$z(\theta_2) = 1 - F(\theta_2), \tag{3.2}$$

где $z\,(\theta_2) = (t + \theta_2)\, f\,(\theta_2)$, $t = \dfrac{p_1}{s_2 - s_1} > 0$.

Справедливо следующее неравенство:

$$z\left(\frac{b}{2}\right) = \left(t + \frac{b}{2}\right) f\left(\frac{b}{2}\right) > b \geq \frac{1}{2} = 1 - F\left(\frac{b}{2}\right).$$

Кроме того, $z(0) = tf(0) = 0 < 1 - F(0) = 1$. Поэтому

$$z\left(\frac{b}{2}\right) > 1 - F\left(\frac{b}{2}\right), \;\; z(0) < 1 - F(0).$$

Таким образом, решение уравнения (3.2) $\theta_2^* < \dfrac{b}{2}$.

Заметим, что на промежутке $[0, b/2]$ функция R_2 является строго вогнутой по p_2 (или θ_2). В частности, для треугольного распределения (рис. 1) имеем: $\dfrac{\partial^2 R_2}{\partial p_2^2} = -\dfrac{6}{b^2(s_2 - s_1)} < 0$.

Поэтому в стационарной точке θ_2^*, удовлетворяющей уравнению (3.2), достигается наибольшее значение функции R_2 на промежутке $[0, b/2]$.

Докажем теперь, что в точке θ_2^* достигается наибольшее значение функции R_2 на промежутке $[0, b]$, и эта точка единственна.

Проанализируем уравнение (3.2). Поскольку функция распределения $F(\theta)$ строго возрастает на $[0, b]$, то правая часть уравнения $1 - F(\theta_2)$ строго убывает на $[0, b]$.

Левая часть уравнения $z(\theta_2)$ строго возрастает до тех пор, пока $f'(\theta_2) \geq 0$. Это является следствием вида производной $z'(\theta_2) = f(\theta_2) + (t + \theta_2)f'(\theta_2)$.

Функция $z(\theta_2)$ является непрерывной, причем $z(b) = z(0) = 0$. Тогда наибольшее значение функции $z(\theta_2)$ на $[0, b]$ достигается в некоторой внутренней точке $\theta_2 = \widehat{\theta}_2$. Неравенство $f'(\theta_2) \geq 0$ выполняется при любом $\theta_2 < \dfrac{b}{2}$. При этом на данном промежутке $z'(\theta_2) > 0$. Поэтому $\widehat{\theta}_2 > \dfrac{b}{2}$ и $\theta_2^* \in [0, \widehat{\theta}_2]$.

Рассмотрим теперь промежуток $\theta_2 \in [\widehat{\theta}_2, b]$ и покажем, что на этом промежутке не достигается наибольшее значение функции выигрыша R_2.

Для этого введем функцию $\varphi(\theta_2) = 1 - F(\theta_2) - z(\theta_2)$ и вычислим ее производную $\varphi'(\theta_2) = -2f(\theta_2) - (t + \theta_2)f'(\theta_2)$.

Поскольку функция плотности $f(\theta_2)$ убывает и вогнута на промежутке $[\widehat{\theta}_2, b]$, то $f'(\theta_2)$ – убывающая или $\varphi'(\theta_2)$ – возрастающая функции.

Вычислим значения производной функции $\varphi(\theta_2)$ в точках $\widehat{\theta}_2$ и b. Тогда $\varphi'\left(\widehat{\theta}_2\right) = -2f\left(\widehat{\theta}_2\right) - \left(t + \widehat{\theta}_2\right) f'\left(\widehat{\theta}_2\right) = -f\left(\widehat{\theta}_2\right) - z'\left(\widehat{\theta}_2\right) = -f\left(\widehat{\theta}_2\right) < 0$, поскольку $z'\left(\widehat{\theta}_2\right) = 0$.

Производная $\varphi'(b) = -2f(b) - (t + b) f'(b) = -(t + b) f'(b) > 0$, поскольку $f(b) = 0$ и $f'(b) < 0$.

Итак, $\varphi'(\theta_2)$ возрастает, $\varphi'(\widehat{\theta}_2) < 0$ и $\varphi'(b) > 0$. Поэтому существует единственная точка $\theta_2 = \widetilde{\theta}_2$, в которой $\varphi'(\widetilde{\theta}_2) = 0$, и в ней достигается минимум.

Поскольку $\varphi\left(\widehat{\theta}_2\right) < 0$, а $\varphi(b) = 0$, то на всем промежутке $[\widehat{\theta}_2, b]$ функция $\varphi(\theta_2) < 0$. Тогда $1 - F(\theta_2) < z(\theta_2)$ для любого $\theta_2 \in \left[\widehat{\theta}_2, b\right]$, и поэтому на промежутке $[\widehat{\theta}_2, b]$ нет точек, которые удовлетворяют уравнению (3.2).

Таким образом, существует единственное значение параметра θ_2^* в ценовом равновесии, при котором $\theta_2^* > \theta_1^*$ и $\theta_2^* < b/2$.

GAME-THEORETICAL MODEL OF QUALITY MANAGEMENT UNDER COMPETITION

Margarita A. Gladkova, Graduate School of Management, St. Petersburg University, post-graduate student (gladkova@gsom.pu.ru), **Nikolay A. Zenkevich**, Graduate School of Management, St. Petersburg University, Cand. Sc., assoc. prof. (zenkevich@gsom.pu.ru).

Abstract: In the paper a game-theoretical model of quality management under competition is suggested. This model is presented as a two-stage game where production companies compete on an industrial market and consumer's taste to quality in non-uniformly distributed. The strong Nash equilibrium in the investigated game was obtained in explicit form which allowed us to evaluate prices, companies market shares and revenues in the equilibrium. A case study for Internet-trading systems was used to approve the suggested quality management mechanism.

Keywords: quality evaluation, quality measurement, consumer's taste to quality, quality management, two-stage game, Nash equilibrium, Stakelberg equilibrium, Pareto-optimal solution, optimal quality differentiation, index of consumers satisfaction.