Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 52–73

УДК 517.977 + 519.63
ББК 22.18

УЧЁТ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ *

Николай Б. Мельников
Центральный экономико-математический институт РАН
117418, Москва, Нахимовский пр., 47
Московский государственный университет
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й уч. корпус
e-mail: melnikov@cs.msu.su

Браэн К. О'Нилл
Национальный центр исследований атмосферы
Боулдер, США
e-mail: boneill@ucar.edu

Михаель Г. Дальтон
Национальная администрация по океану и атмосфере
Сиэтл, США
e-mail: michael.dalton@noaa.gov

Учёт демографической неоднородности населения в рамках модели общего экономического равновесия приводит к необходимости рассматривать несколько различных групп потребителей, каждая из которых решает свою оптимизационную

* Настоящая работа выполнена в рамках совместного проекта в Международном институте прикладного системного анализа – IIASA (Австрия). Первый автор частично поддержан РФФИ (грант № 08–01–00685) и Минобразования РФ (грант № 2.1.1/2000).

задачу. В настоящей работе предложен метод усреднения потребительских характеристик, который позволяет учесть изменение во времени коэффициентов предпочтения и производительности труда. Рассмотрены приложения к конкретному типу моделей, которые используются для количественных оценок спроса на энергоносители. Показано, что спрос одной группы с усреднёнными характеристиками находится в хорошем согласии с совокупным спросом нескольких различных групп потребителей. Таким образом, наш метод позволяет расширить область применимости репрезентативного агента на широкий классе динамических многосекторных моделей с меняющимися во времени неоднородными характеристиками потребителей.

Ключевые слова: модели экономического роста, демографическая неоднородность, потребительские предпочтения, производительность труда, усреднение, спрос на энергоносители .

1. Введение

Модели общего экономического равновесия используются для описания замкнутой экономической системы, состоящей, в простейшем варианте, из агентов двух типов: производителей и потребителей. Каждый производитель j обладает технологией, позволяющей ему произвести $X_j(P)$ единиц продукции при заданных ценах P. Каждый потребитель i наделён набором ресурсов W_i и имеет набор предпочтений, представляемый его функцией спроса $Y_i(P)$.

В основе модели лежат два основных предположения. Первое состоит в том, что потребители и производители имеют полную информацию о ценах и принимают свои оптимальные решения, считая цены заданными. Оптимальное поведение означает, что потребители могут проводить сравнение наборов потребляемых товаров, максимизируя функцию полезности $U_i(Y_i)$ в рамках бюджетного ограничения, а каждый производитель определяет $X_j(P)$, максимизируя прибыль. Второе предположение заключается в том, что цены обеспечивают равновесие на рынках, т. е. спрос равен предложению:

$$\sum_i (Y_i(P) + W_i) = \sum_j X_j(P). \tag{1.1}$$

Конкурентным равновесием называется совокупность величин спроса $Y_i(P)$, предложения $X_j(P)$ и цен P, которая является решением системы уравнений, состоящей из условий оптимальности для $Y_i(P)$, условий оптимальности для $X_j(P)$ и соотношений баланса (1.1). Запасы ресурсов W_i являются задаваемым параметрами модели (подробнее см., напр., [6]).

Прикладные модели общего экономического равновесия – *computable general equilibrium models* (CGE модели) – могут иметь различную степень детализации по количеству регионов, секторов производства, типов ресурсов и пр., и содержать множество обобщений первоначальных предположений: включать торговлю, налоги, субсидии и пр. Эти обобщения диктуются теми характеристиками, которые необходимо вычислить с помощью данной модели. Так, объём выбросов углерода и спрос на энергоносители зависят от демографических факторов: рост населения, старение, урбанизация и пр. (см., напр., [5, 11]). Поэтому соответствующие динамические CGE модели должны учитывать связанную с этим потребительскую неоднородность и её зависимость от времени.

Неоднородность потребителей можно учесть, рассматривая несколько групп потребителей с различными характеристиками U_i и W_i. При этом каждой группе отвечает отдельная динамическая оптимизационная задача. Достоинство такого метода состоит в возможности явно учесть рыночные эффекты за счёт равновесных цен, а также динамику потребительских предпочтений [5].

Для практического использования наиболее удобными являются модели с репрезентативным агентом, в которых все потребители объединяются в одну группу с усредненными характеристиками U и W. Такой подход имеет очевидные преимущества благодаря простоте модели и быстроте вычислений, однако его использование оправдано лишь в том случае, если спрос в модели с репрезентативным агентом Y равен совокупному спросу $\sum\limits_i Y_i$ в модели с несколькими группами потребителей и не зависит от числа групп N. (Вопрос применимости репрезентативного агента для двух популярных классов *односекторных* моделей исследован в [1].)

Задать функцию полезности репрезентативного агента аналитическим выражением $U = f(U_1, \ldots, U_N)$ можно лишь при довольно ограничительных предположениях на U_i и W_i (см., напр., [6] и ссылки там). В общем случае метод Негиши позволяет записать функцию полезности репрезентативного агента в виде суммы $U = \sum_i \alpha_i U_i$ с некоторыми весами $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, которые необходимо рассматривать как дополнительные переменные задачи о конкурентном равновесии при N дополнительных условиях типа равенства (см., напр., [6]). В модели с функциями полезности и производственными функциями типа Кобба-Дугласа, при некоторых дополнительных предположениях, формулы для весов α_i удаётся получить в явном виде [10]. Однако уже в моделях с функциями постоянной эластичности замещения – *constant elasticity of substitution functions* (CES-функциями) – конкурентное равновесие можно найти только численно.

В прикладных моделях выражение функции полезности репрезентативного агента вида $U = f(U_1, \dots, U_N)$ не даёт существенных преимуществ, так как сами функции U_i необходимо каким-то образом определять на основе имеющихся данных. Это приводит к необходимости использовать приближенные методы определения параметров функции полезности U произвольной группы потребителей.

Широко используемым классом функций полезности в динамических CGE-моделях является класс CES-функций на бесконечном промежутке времени:

$$U(\mathbf{c}) = \frac{1}{\psi} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t n_t \left(\sum_j \left(\mu_j c_{jt} \right)^{\rho} \right)^{\frac{\psi}{\rho}}, \tag{1.2}$$

где c_{jt} – объем потребления j-го товара на душу населения в момент времени t, а n_t – число людей в группе в момент t, являющееся заданной функцией времени. Коэффициент дисконтирования $\beta \in (0,1)$, межвременной коэффициент замещения $\psi \in (-\infty, 1)$, $\psi \neq 0$, коэффициент замещения между товарами $\rho \in (-\infty, 1)$, $\rho \neq 0$, и коэффициент предпочтения j-го товара $\mu_j \in (0,1)$ являются параметрами, значения которых часто определяют на основе данных в начальный момент ($t = 0$) несмотря на то, что доли потребления различных товаров могут меняться со временем.

В настоящей работе предложен метод определения коэффициентов предпочтения μ_{it} функции (1.2) и производительности труда l_t, позволяющий явно учесть зависимость от времени на основе имеющихся данных (см. также обсуждение в [2]). Поскольку многосекторные CGE-модели не допускают аналитического решения, проверка эффективности предложенного нами метода также может быть проведена только численно. В разделе 2 метод изложен применительно к описанному в разделе 1 варианту модели Population-Environment-Technology – PET [5, 3, 4]. В разделе 3 на примере модели PET показано, что при использовании данного метода совокупные характеристики нескольких различных групп потребителей и репрезентативного агента находятся в хорошем согласии друг с другом, и этот результат устойчив к изменению параметров модели (подробнее см. [9]). Иной метод учёта зависимости от времени коэффициента предпочтения μ_{it}, предполагающий его линейно-логарифмическую зависимость от ВВП на душу населения, был использован в [11] (сравнение результатов см. в разделе 3).

2. Структура модели PET

Модель PET представляет собой динамическую модель общего экономического равновесия. В этом параграфе приведено описание модели PET для случая одного региона и нескольких групп потребителей с различными характеристиками (см. также [5, 4]). В [3] описан случай нескольких регионов и одной группы потребителей (модель с репрезентативным агентом).

В соответствии с общей идеологией моделей общего экономического равновесия каждая группа потребителей максимизирует функцию полезности на бесконечном промежутке времени, считая цены заданными (раздел 1.1). Производители максимизируют прибыль в каждый момент времени, также считая цены известными (раздел 1.2). Правительство играет нейтральную роль, осуществляя трансферты между производителями и потребителями в соответствии с заранее определёнными правилами (раздел 1.3). Наконец, условие сбалансированности рынков обеспечивает обратную связь цен со спросом и предложением (раздел 1.4). Получающаяся нелинейная система уравнений решается с помощью итерационной процедуры (раздел 1.5). Параметры модели определяются по исходным данным (раздел 1.6).

2.1. Потребители

Потребители объединены в N групп; i-ая группа решает задачу вида

$$\frac{1}{\psi}\sum_t \beta^t n_{it}\left(\sum_j (\mu_{ijt}c_{ijt})^\rho\right)^{\frac{\psi}{\rho}} \to \max, \tag{2.1}$$

$$\sum_j p_{jt}c_{ijt} + q_t x_{it} = (1-\theta_{it})w_t l_{it} + (1-\phi_{it})r_t k_{it} + g_{it}, \tag{2.2}$$

$$(1+\nu_{it})k_{i,t+1} = (1-\delta)k_{it} + x_{it}, \qquad k_{i0} > 0, \tag{2.3}$$

где индекс j нумерует N_C потребительских товаров, а $t = 0, 1, \ldots$ – время. Переменными, относительно которых проводится максимизация, являются потребление c_{ijt}, инвестиции x_{it} и капитал k_{it} (на душу населения). Двойственные переменные: цены потребительских товаров p_{jt}, стоимость инвестиций q_t, стоимость капитала r_t, заработная плата w_t и трансферты правительства g_{it} (субсидии, если положительны, и платежи, если отрицательны) здесь предполагаются известными[1].

Заданными функциями являются объем населения n_{it}, производительность труда l_{it}, коэффициенты предпочтения μ_{ijt}, налоги на труд θ_{it} и капитал ϕ_{it}. Коэффициент роста населения в (2.3) равен $1 + \nu_{it} = n_{i,t+1}/n_{it}$, где ν_{it} – относительная скорость роста населения. Наконец, не зависящими от времени параметрами модели являются коэффициент дисконтирования $\beta \in (0,1)$, коэффициент замещения по времени $\psi \in (-\infty, 1)$, коэффициент замещения среди потребительских товаров $\rho \in (-\infty, 1)$ и коэффициент амортизации капитала $\delta \in (0,1)$.

Задача (2.1)–(2.3) решается в два этапа. Сначала решаем статическую задачу максимизации функции полезности для произвольного момента времени t, которая эквивалентна задаче минимизации расходов

$$\sum_j p_{jt}c_{ijt} \to \min, \qquad \left(\sum_j (\mu_{ijt}c_{ijt})^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = \bar{c}_{it} \tag{2.4}$$

[1] Модель также содержит трансферты между потребителями, которые мы для краткости не пишем.

при заданных ценах p_{jt} и заданном значении функции полезности $\bar{c}_{it}$. Применяя к (2.4) условия оптимальности первого порядка, находим функцию расходов

$$\min \left\{ \sum_j p_{jt} c_{ijt} \right\} = \bar{p}_{it} \bar{c}_{it}, \tag{2.5}$$

где

$$\bar{p}_{it} = \left(\sum_j \left(\frac{p_{jt}}{\mu_{ijt}} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \tag{2.6}$$

– двойственный индекс цен.

Далее, пользуясь (2.4)–(2.6), переписываем задачу (2.1)–(2.3) в виде

$$\frac{1}{\psi} \sum_t \beta^t n_{it} \bar{c}_{it}^{\psi} \to \max, \tag{2.7}$$

$$\bar{p}_{it} \bar{c}_{it} + q_t x_{it} = (1 - \theta_{it}) w_t l_{it} + (1 - \phi_{it}) r_t k_{it} + g_{it}, \tag{2.8}$$

$$(1 + \nu_{it}) k_{i,t+1} = (1 - \delta) k_{it} + x_{it}, \quad k_{i0} > 0. \tag{2.9}$$

Исключая x_{it} из (2.8) и (2.9), приходим к одному ограничению

$$(1 + \nu_{it}) k_{i,t+1} = (1 - \delta) k_{it} + \frac{1}{q_t} \left[(1 - \theta_{it}) w_t l_{it} + (1 - \phi_{it}) r_t k_{it} + g_{it} - \bar{p}_{it} \bar{c}_{it} \right]. \tag{2.10}$$

Условия оптимальности первого порядка относительно агрегированного потребления $\bar{c}_{it}$ в задаче (2.7) и (2.10) дают

$$\frac{q_t}{\bar{p}_{it}} \bar{c}_{it}^{\psi-1} = \beta \left(\frac{(1 - \delta) q_{t+1} + (1 - \phi_{i,t+1}) r_{t+1}}{\bar{p}_{i,t+1}} \right) \bar{c}_{i,t+1}^{\psi-1}. \tag{2.11}$$

Уравнение Эйлера (2.11) и уравнение потока капитала (2.10) вместе с условиями трансверсальности

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_{it} k_{it} = 0, \tag{2.12}$$

где λ_{it} – множитель Лагранжа, являются достаточными условиями оптимальности в задаче (2.7)–(2.9). Более того, траектория единственна [12].

Для лучшего сравнения со случаем однородных потребителей, предполагается, что траектории всех групп потребителей выходят на общую траекторию сбалансированного роста при $t \to \infty$. Это означает, что асимптотически величины x_{it}, k_{it}, l_{it}, g_{it}, а значит и $\bar{c}_{it}$, растут с общей не зависящей от времени скоростью технологического роста ξ. Тогда при $t \to \infty$ уравнение (2.11) даёт[2]

$$(1+\xi)^{1-\psi} = \beta \left(1 - \delta + \frac{(1-\phi)r}{q}\right), \tag{2.13}$$

где r, ϕ и q – долгосрочные стоимость капитала, налоги на доходы и стоимость инвестиций, соответственно.

2.2. Производители

Фирмы сгруппированы в секторы по типу производимого товара: $N_C + 1$ секторов, производящих конечные продукты (N_C потребительских товаров и инвестиционный «товар») и $N_E + 1$ секторов, производящих вспомогательные товары (N_E типов энергоресурсов и совокупную категорию вспомогательных товаров, называемую «материалами»). Для удобства общее количество секторов обозначено через $N_X = N_E + 1 + N_C + 1$, и индекс товара всегда пробегает N_X категорий в указанном порядке (то есть, сначала энергоресурсы, затем материалы, потребительские товары и, наконец, инвестиции). Для простоты производственная функция в каждом секторе предполагается однородной первой степени (то есть предполагается постоянная отдача от масштаба).

В момент времени t каждый товар производится с помощью капитала K, труда L, агрегированного энергоресурса $\bar{E}$ и материалов M. Капитал и труд являются факторами производства. Производственная функция имеет вложенную CES-структуру (всюду, где речь идёт о фиксированном моменте времени, индекс t для краткости опускаем):

$$\begin{aligned} X = \gamma_X \big(&\alpha_K (G_K K)^{\rho_X} + \alpha_L (G_L L)^{\rho_X} + \\ &+ \alpha_{\bar{E}} (G_{\bar{E}} \bar{E})^{\rho_X} + \alpha_M (G_M M)^{\rho_X}\big)^{1/\rho_X}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

[2] Из условий трансверсальности (2.12), пользуясь $\lambda_{it} = q_t \beta^t n_{it} \bar{c}_{it}^{\psi-1} / \bar{p}_{it}$, мы получаем верхнюю оценку на скорость технологического роста, которая допустима в модели: $1 + \xi < (1/\beta)^{1/\psi}$ (предполагается, что $n_{it} \to n_i$ при $t \to \infty$).

с постоянной эластичностью замещения $\sigma_X = 1/(1-\rho_X)$. Здесь G_I – параметр производительности для $I = K, L, \bar{E}, M$. Параметр γ_X масштабирует производственные коэффициенты α_I так, чтобы их сумма равнялась единице. Значения α_I и G_I могут меняться от сектора к сектору и зависеть от времени.

Агрегированный энергоресурс $\bar{E}$ производится из N_E энергоресурсов E_i при помощи производственной функции

$$\bar{E} = \gamma_E \left(\sum_i \alpha_{E_i} (G_{E_i} E_i)^{\rho_E} \right)^{1/\rho_E}. \tag{2.15}$$

Для удобства сравнения с результатами [5] мы не вводим отдельной вложенной производственной функции для материалов.

Все коэффициенты производительности в (2.14) и (2.15), кроме G_L, обращаются в нуль при $t \to \infty$. Коэффициент производительности труда G_L во всех секторах стремится к $G = 1 + \xi$ на бесконечности, то есть предполагается, что в пределе производительность труда растёт с постоянной скоростью ξ.

Пусть τ_{E_i} обозначает налог на использование i-го энергоресурса, а τ_M – налог на использование материалов (зависимость от сектора производства для краткости опускаем). При помощи теории двойственности находим предельные затраты на энергию после уплаты налога:

$$P_{\bar{E}} = \frac{1}{\gamma_E} \left(\sum_i \alpha_{E_i}^{\frac{1}{1-\rho_E}} \left(\frac{(1+\tau_{E_i}) P_{E_i}}{G_{E_i}} \right)^{\frac{\rho_E}{\rho_E - 1}} \right)^{\frac{\rho_E - 1}{\rho_E}}. \tag{2.16}$$

Предельные затраты в секторе X равны

$$P_X = \frac{1}{\gamma_X} \left(\alpha_K^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{P_K}{G_K} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} + \alpha_L^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{P_L}{G_L} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} \right.$$
$$\left. + \alpha_{\bar{E}}^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{P_{\bar{E}}}{G_{\bar{E}}} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} + \alpha_M^{\frac{1}{1-\rho_X}} \left(\frac{(1+\tau_M) P_M}{G_M} \right)^{\frac{\rho_X}{\rho_X - 1}} \right)^{\frac{\rho_X - 1}{\rho_X}}. \tag{2.17}$$

Отметим, что функция предельных затрат в каждом производственном секторе включает налоги на использование энергоресурсов и материалов.

Пусть τ_X – налог на единицу выпущенной продукции в секторе X. Предположение о постоянной отдаче от масштаба и конкурентных рынках подразумевает, что равновесная прибыль равна нулю, и $P_{X_j} + \tau_{X_j}$ – цена, включающая налоги. Тогда, используя лемму Шеппарда, мы находим отношение объема затраченного ресурса к объёму выпуска, которое минимизирует затраты:

$$A_I = \left(\frac{1}{\alpha_I (\gamma_X G_I)^{\rho_X}} \cdot \frac{P_I}{P_X} \right)^{\frac{1}{\rho_X - 1}}, \tag{2.18}$$

для $I = K, L, \bar{E}$ и для $I = M$:

$$A_M = \left(\frac{1}{\alpha_M (\gamma_X G_M)^{\rho_X}} \cdot \frac{(1+\tau_M) P_M}{P_X} \right)^{\frac{1}{\rho_X - 1}}. \tag{2.19}$$

Аналогично, минимизирующее затраты отношение объема затраченного энергоресурса к объёму выпуска $A_{E_i} = E_i / \bar{E}$ равно

$$A_{E_i} = \left(\frac{1}{\alpha_{E_i} (\gamma_E G_{E_i})^{\rho_E}} \cdot \frac{(1+\tau_{E_i}) P_{E_i}}{P_{\bar{E}}} \right)^{\frac{1}{\rho_E - 1}}. \tag{2.20}$$

2.3. Правительство

В фиксированный момент t правительственные налоговые сборы $GREV$ равны сумме налогов на капитал и заработную плату, собранных со всех групп потребителей, и сумме налогов на прибыль по всем секторам производства:

$$\begin{aligned} GREV &= \sum_{i=1}^{N_d} n_i (\phi_i r k_i + \theta_i w l_i) + \sum_{j=1}^{N_X} \left(\tau_{X_j} X_j + \sum_{s=1}^{N_E} \tau_{E_{s_j}} P_{E_{s_j}} E_{s_j} + \tau_{M_j} M_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_d} (\phi_i P_K K_i + \theta_i P_L L_i) + \sum_{j=1}^{N_X} \left(\tau_{X_j} + \sum_{s=1}^{N_E} \tau_{E_{s_j}} P_{E_{s_j}} A_{E_{s_j}} A_{\bar{E}_j} + \tau_{M_j} A_{M_j} \right) X_j. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Нейтральность правительства достигается за счёт того, что закупки GP_t равны начальному значению GP_0 в реальном выражении:

$$GP_t = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0} (1+\xi)^t GP_0, \tag{2.22}$$

где $\bar{p}_t = N_d^{-1} \sum\limits_i \bar{p}_{it}$ – потребительский индекс цен. Правительственные трансферты состоят из суммы трансфертов потребителям в начальный момент и корректирующих трансфертов (LSA_t), которые призваны сбалансировать бюджет правительства в момент t. В результате трансферты i-ой группе (на душу населения) равны

$$g_{it} = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0}(1+\xi)^t g_{i0} + \frac{LSA_t}{n_t}, \tag{2.23}$$

где g_{i0} – трансферты i-ой группе потребителей в начальный момент и $n_t = \sum\limits_i n_{it}$ – общий объем населения. Тогда правительственные расходы складываются из закупок и суммарных трасфертов:

$$GEXP_t = GP_t + GT_t, \qquad GT_t = \frac{\bar{p}_t}{\bar{p}_0}(1+\xi)^t \sum_{i=1}^{N_d} n_{it} g_{i0} + LSA_t. \tag{2.24}$$

Отметим, что $LSA_0 = 0$, поскольку значения в начальный момент берутся из таблицы межотраслевого баланса.

Для вычисления спроса правительства его закупки определяются функцией типа Кобба-Дугласа от переменных K, L, E_i, M:

$$GP = K^{\alpha_K} L^{\alpha_L} \cdots E_i^{\alpha_{E_i}} \cdots M^{\alpha_M}.$$

Следовательно, отношение $A_I^{GP} = I/GP$ используемого ресурса I к общему объёму закупок GP равно $A_K^{GP} = \alpha_K/P_K$ для капитала, $A_L^{GP} = \alpha_L/P_L$ для труда, $A_{E_i}^{GP} = \alpha_{E_i}/P_{E_i}$ для энергии и $A_M^{GP} = \alpha_M/P_M$ для материалов.

2.4. Рынки

В конкурентном равновесии рынки сбалансированы. Другими словами, в каждый момент t, совокупное предложение равно совокупному спросу для факторов производства:

$$K^{AD} = K^{AS}, \qquad L^{AD} = L^{AS}, \tag{2.25}$$

и каждого производимого продукта:

$$X_j^{AD} = X_j^{AS}, \quad j = \overline{1, N_X}. \tag{2.26}$$

Совокупное предложение j-го товара $X_j^{AS} = X_j$ определено производственной функцией (2.14). Совокупный спрос на j-ый конечный продукт (потребление или инвестиции) имеет вид

$$X_{N_E+1+j}^{AD} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i c_{ij}, \quad j = \overline{1, N_C}, \qquad X_{N_X}^{AD} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i x_i. \tag{2.27}$$

Спрос на каждый конечный продукт определяется на основе последовательности значений капитала (см. далее описание вычислительной процедуры). А именно, инвестиции определяются из уравнения, описывающего динамику капитала (2.3), после чего потребление вычисляется с помощью бюджетного ограничения (2.2).

Совокупный спрос на капитал и труд имеют вид

$$K^{AD} = \sum_{j=1}^{N_X} A_K^j X_j + A_K^{GP} GP, \qquad L^{AD} = \sum_{j=1}^{N_X} A_L^j X_j + A_L^{GP} GP. \tag{2.28}$$

Совокупное предложение капитала и труда является суммой предложений всех потребительских групп:

$$K^{AS} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i k_i, \qquad L^{AS} = \sum_{i=1}^{N_d} n_i l_i. \tag{2.29}$$

Совокупный спрос на энергоресурсы E_i и материалы M есть сумма спросов секторов, производящих конечные продукты и вспомогательные продукты (то есть сами энергоресурсы и материалы):

$$X_i^{AD} = \sum_{j=1}^{N_E+1} A_i^j X_j^{AD} + Y_i, \qquad i = \overline{1, N_E+1}, \tag{2.30}$$

где $Y_i = \sum\limits_{j>N_E+1} A_i^j X_j + A_i^{GP} GP$. Используя векторные обозначения $x = (X_1^{AD}, \ldots, X_{N_E+1}^{AD})'$ и $y = (Y_1, \ldots, Y_{N_E+1})'$, можем переписать (2.30) в виде

$$x = Ax + y \quad \text{или} \quad x = (\mathbf{1} - A)^{-1} y. \tag{2.31}$$

Здесь $A = (A_i^j)$ – квадратная $(N_E+1) \times (N_E+1)$-матрица отношений затрат к выпускам, а $\mathbf{1}$ – единичная матрица такого же размера.

Наконец, соотношение, регулирующее правительственный бюджет имеет вид

$$GREV = GEXP, \tag{2.32}$$

где доходы и расходы определены формулами (2.21) и (2.24).

Таким образом, конкурентное равновесие определяется как решение системы уравнений, состоящей из условий оптимальности для потребителей, условий оптимальности для производителей и уравнений баланса (2.25), (2.26) и (2.32). Эта система уравнений решается относительно величин потребления c_{ij}, инвестиций x_i, капитала k_i и цен P_{X_j}, P_K, P_L и LSA, при всех t. Потребительские цены на товары и стоимость инвестиций включают налоги:

$$p_j = P_{N_E+1+j} + \tau_{N_E+1+j}, \qquad q = P_{N_X} + \tau_{X_{N_X}},$$

где $j = \overline{1, N_C}$. Стоимость капитала и труда одинаковы для потребителей и производителей: $r = P_K$ и $w = P_L$. Вследствие закона Вальраса одна из цен может быть выбрана в качестве единицы измерения. В модели PET такой ценой является зарплата, которая нормирована на единицу: $w = 1$. При этом балансовое соотношение для труда отбрасывается.

2.5. Вычислительная процедура

Динамика потребительских характеристик может рассматриваться как переход из одного равновесного состояния в другое. Поскольку нас интересует сам переходный процесс, а не асимптотическое поведение, мы заменяем бесконечный интервал достаточно большим конечным отрезком $[0, T]$. Предполагается, что с момента $t = T$ динамика определяется траекторией сбалансированного роста (2.13). Таким образом, задача об определении конкурентного равновесия сведена к системе конечного числа нелинейных уравнений.

Алгоритм решения стартует с начального приближения для последовательности значений капитала k_{it}, $i = \overline{1, N_d}$ и $t = 0, 1, \ldots, T$, которая определяет последовательность инвестиций x_{it} в соответствии с (2.9). После того, как определены инвестиции, потребление $\bar{c}_{it}$ вычисляется при помощи бюджетного ограничения (2.8). Правительственные закупки GP_t определяются по формуле (2.22). Как только конечный спрос Y_j (потребление плюс инвестиции плюс правительственные закупки) определены, уровень производства X_j вспомогательных продуктов (энергоресурсов и материалов) вычисляются по формуле (2.30), что в свою очередь даёт величины произведённых конечных продуктов. Цены P_{X_j} и P_K вычисляются при помощи метода Ньютона на основе полученных величин. Отсюда находим новое приближение для последовательности значений капитала k_{it}.

Описанная процедура итерируется до тех пор пока не выполнится уравнение Эйлера (2.11). Для этого используется модификация алгоритма Гаусса-Зейделя (подробнее см. [5, 4]).

2.6. Начальные данные и параметры

Калибровка функции полезности описана в разделе 2. Производственные коэффициенты α_{X_j} и масштабные множители γ_{X_j} калибруются по данным таблицы межотраслевого баланса в начальный момент. Значения коэффициентов замещения ρ_{X_j} определяются величинами налога на выбросы углерода. Производительности G_j являются свободными параметрами, которые определяются величинами валового национального продукта, выбросов углерода и спроса на энергоносители на определённом отрезке времени. Параметры правительства калибруются по величинам налогов и закупок из таблицы межотраслевого баланса в начальный момент.

Величина инвестиций в таблице межотраслевого баланса в начальный момент масштабируется так, чтобы выполнялось соотношение

$$[(1 + \nu_0) - (1 - \delta)]k_0 = x_0,$$

где $k_0 = \sum\limits_i k_{i0}$ и $x_0 = \sum\limits_i x_{i0}$. Значение коэффициента амортизации капитала полагается равным $\delta = 0.1$. Для того, чтобы сохранить условия баланса в начальный момент, вектор потребления масштабируется так, чтобы выполнялось условие равенства совокупного спроса и совокупной добавленной стоимости. После этого используется метод RAS [7], обеспечивающий равенство совокупного предложения и спроса в начальный момент для каждого ресурса в производстве.

По известному значению ставки процента R коэффициент дисконтирования β вычисляется по формуле

$$1/\beta = (1 + R)(1 + \xi)^{\psi - 1}. \tag{2.33}$$

Это соотношение следует из предельного уравнения Эйлера (2.13). Действительно, по определению

$$1 + R_t = \frac{(1-\delta)q_t + (1+\psi_t)r_t}{q_{t-1}}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим $R = -\delta + (1-\phi)r/q$. Подставляя это выражение в (2.13), приходим к (2.33). Вместе с оценкой $(1+\xi)^\psi < 1/\beta$ (см. сноску перед формулой (2.13)), выражение (2.33) даёт $\xi < R$. В частности, при $\xi = 0$ и $R = 0.05$, получаем значение $\beta \approx 0.95$, используемое в расчётах.

3. Усреднение характеристик потребителей

3.1. Калибровка функций CES по начальным данным

Традиционный способ калибровки CES-функции полезности вида (2.1) следующий. Рассматривается задача максимизации функции полезности в начальный момент (номер группы i здесь для краткости опускаем)

$$\left(\sum_j \left(\mu_j c_{j0}\right)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} \to \max \tag{3.1}$$

при бюджетных ограничениях

$$\sum_j p_{j0} c_{j0} = m_0, \tag{3.2}$$

где p_{j0} и m_0 – цены и расходы в начальный момент. Тогда при $\rho \neq 0$ потребительский спрос в задаче (3.1) и (3.2) даётся формулой

$$c_{j0} = \frac{\left(\frac{\mu_j^\rho}{p_{j0}}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}{\sum_{j'} \mu_{j'}^\rho \left(\frac{\mu_{j'}^\rho}{p_{j'0}}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}}} m_0. \tag{3.3}$$

Пусть дополнительно цены в начальный момент p_{j0} взяты за единицу и коэффициенты предпочтения нормированы соотношением

$$\sum_j \mu_j^{\frac{1}{1-\rho}} = 1.$$

Тогда в силу (3.2) и (3.3) коэффициент предпочтения j-го товара вычисляется по формуле

$$\mu_j = \left(\frac{c_{j0}}{\sum\limits_{j'} c_{j'0}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{3.4}$$

Соответственно коэффициент предпочтения j-го товара в i-ой группе потребителей вычисляется по формуле

$$\mu_{ij} = \left(\frac{c_{ij0}}{\sum\limits_{j'} c_{ij'0}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{3.5}$$

Доли потребления в начальный момент в формулах (3.4) и (3.5) определяются по исходным данным.

В предельном случае $\rho \to 0$ формула (3.1) даёт функцию полезности Кобба-Дугласа, которая эквивалентна функции $u(\mathbf{c}_t) = \sum\limits_j \mu_j \log c_{jt}$. Вместо формул (3.4) и (3.5) имеем

$$\mu_j = \frac{c_{j0}}{\sum\limits_{j'} c_{j'0}}, \qquad \mu_{ij} = \frac{c_{ij0}}{\sum\limits_{j'} c_{ij'0}}.$$

Непосредственно видно, что в этом случае

$$\mu_j = \sum_i \nu_i \mu_{ij}, \qquad \text{где} \qquad \nu_i = \frac{\sum\limits_j c_{ij0}}{\sum\limits_j c_{j0}}.$$

Тем не менее равновесие в модели с несколькими группами потребителей и в модели с репрезентативным агентом даёт разный совокупный спрос, если только производственный сектор не описывается функциями Кобба-Дугласа (подробности см. в [10]).

Количественные различия совокупного спроса $\sum\limits_j c_{ijt}$ нескольких групп потребителей и репрезентативного агента c_{jt} мы исследуем на примере модели PET в разделе 3 (анализ статического случая см. в [8]).

3.2. Коэффициенты предпочтения, зависящие от времени

Как хорошо известно, использование постоянной отдачи от масштаба, т.е. CES-функции полезности, не достаточно хорошо подтверждается эконометрическим анализом. Поэтому мы вводим зависящие от времени коэффициенты предпочтения, переписывая функцию полезности (2.1) в виде

$$U(\mathbf{c}) = \frac{1}{\psi} \sum_t \beta^t n_t \Big(\sum_j \big(\mu_{jt} c_{jt}\big)^\rho \Big)^{\frac{\psi}{\rho}}.$$

Здесь в качестве коэффициентов предпочтения мы используем *прогнозируемые* доли потребления:

$$\mu_{jt} = \left(\frac{c^*_{jt}}{\sum\limits_{j'} c^*_{j't}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{3.6}$$

Считаем, что изменение потребления во времени в основном связано с изменением численности населения. Поэтому

$$c^*_{jt} = \frac{1}{n_t} \sum_i \theta_{ij0} n_{it} c_{i0}, \tag{3.7}$$

где θ_{ij0} – доля j-го товара в общем потреблении i-ой группы и c_{i0} – потребление на душу в начальный момент; n_{it} – прогнозируемая численность населения в i-ой группе и $n_t = \sum\limits_i n_{it}$ – общая прогнозируемая численность населения.

3.3. Усреднение труда и капитала

Из-за ограниченного объёма данных ресурсы труда и капитала обычно вычисляются на основе среднего объёма сбережений k_0 на душу и средней заработной платы l_0 в начальный момент. Далее k_0 служит начальным значением для последовательности значений k_t, которая определяется уравнениями модели. Труд полагается равным $\tilde{L}^{AS}_t = n_t l_0$. В этом случае, труд зависит лишь от роста населения, но не от изменения состава населения.

Предположим, что в начальный момент известны производительности l_{i0} различных групп потребителей. Тогда производительность репрезентативного агента вычисляется по формуле

$$l_0 = \frac{\sum\limits_i n_{i0} l_{i0}}{\sum\limits_i n_{i0}}.$$

Если мы игнорируем изменение производительности во времени, то объем трудового ресурса записывается как и ранее формулой

$$\tilde{L}_t^{AS} = n_t l_0 = \frac{n_t}{n_0} L_0^{AS}.$$

С другой стороны, мы можем учесть изменение состава населения, вводя зависящую от времени производительность:

$$l_t = \frac{\sum\limits_i n_{it} l_{i0}}{\sum\limits_i n_{it}}. \qquad (3.8)$$

Тогда мы приходим к выражению

$$L_t^{AS} = n_t l_t = \sum_i n_{it} l_{i0}.$$

В модели с несколькими группами потребителей совокупное предложение труда полагается равным $L_{it}^{AS} = n_{it} l_{i0}$, а значения средних сбережений на душу населения k_{i0} используются для вычисления предложения капитала.

4. Результаты и обсуждение

Эффективность метода усреднения определяется зависимостью результатов от степени усреднения (т.е. от числа рассматриваемых в модели групп потребителей). Нами проведено сравнение значений совокупных характеристик, вычисленных в модели PET с репрезентативным агентом (одна группа с усредненными характеристиками) и с несколькими группами, которые обладают разными характеристиками.

Данные указывают, что наибольшая неоднородность потребителей наблюдается в развивающихся странах [13], поэтому расчёты проводились по реальным данным для Индии (подробности см. в [10]). В случае с независящими от времени производительностью и коэффициентами предпочтения, калиброванными по начальным данным (μ_0 и l_0), величины совокупного спроса на потребительские товары и энергоносители в модели с репрезентативным агентом и несколькими группами могут иметь значительные различия (1.5–2 раза). В случае с независящим от времени коэффициентами предпочтения, но зависящей от времени производительностью (μ_0 и l_t) различия существенно уменьшаются, но тем не менее могут достигать 25%. Наконец, в случае, когда и производительность, и коэффициенты предпочтения учитывают зависимость от времени (μ_t и l_t), различия становятся незначительными (в пределах 1%). Таким образом, рыночные эффекты в последнем случае становятся несущественными.

Полученные результаты позволяют заключить, что предложенный нами метод усреднения хорошо отражает динамику в модели с неоднородными потребителями. Тот факт, что зависимость от времени коэффициентов предпочтения слабо влияет на результаты, согласуется с расчётами [11]. Отметим, что предложенный метод построения репрезентативного агента не использует специфики модели PET и может быть использован в широком классе динамических многосекторных CGE-моделей.

Результаты получены в классе функций полезности однородных (первой степени) относительно потребления и имеющих зависящие от времени коэффициенты предпочтения. Это подразумевает, что относительная ценность каждого товара может меняться, но степень взаимозаменяемости товаров остаётся постоянной. В настоящий момент ведётся работа по обобщению теории репрезентативного агента на класс неоднородных функций, а также над возможностью усреднения величин замещения между товарами. В будущем мы планируем исследовать эти же вопросы относительно коэффициента замещения по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caselli F., and Ventura J. *A representative consumer theory of distribution* // American Economic Review. 2000. V. 90. P. 909–926.

2. Creedy J., and Guest R. *Population ageing and intertemporal consumption: representative agent versus social planner* // Economic Modelling. 2008. V. 25. P. 485–498.

3. Dalton M., and Goulder L. *An intertemporal general equilibrium model for analyzing global interactions between population, the environment and technology: PET model structure and data.* Unpublished document, California State University Monterey Bay, 2001, 26 pp.

4. Dalton M., Jiang L., Pachauri S., and O'Neill B. *Demographic Change and Future Carbon Emissions in China and India.* Population Association of America, Annual Meeting, NY, 2007. 31 pp.

5. Dalton M., O'Neill B., Prskawetz A., Jiang L., and Pitkin J. *Population aging and future carbon emissions in the United States* // Energy economics. 2008. V. 30. P. 642–675.

6. Kehoe T. *Computation and multiplicity of equilibria.* Ch. 38. In: Hildenbrand, W., Sonnenschein, H. (Eds.), Handbook of Mathematical Economics. V. IV. North-Holland, Amsterdam. 1991. P. 2049–2144.

7. Lahr M., and L. de Mesnard *Biproportional Techniques in Input-Output Analysis: Table Updating and Structural Analysis* // Economic Systems Research. 2004. V. 16. P. 115–134.

8. Melnikov N.B., O'Neill B.C. and Dalton M.G. *Accounting for the household heterogeneity in general equilibrium models.* IIASA Interim Report IR–09–051, 2009, Laxenburg, Austria: IIASA.

9. Melnikov N.B., O'Neill B.C. and Dalton M.G. *Accounting for household heterogeneity in dynamic general equilibrium economic*

growth models // Journal Economic Dynamics and Control. 2010 (submitted).

10. Melnikov N.B., O'Neill B.C. and Dalton M.G. *Consumer aggregation in dynamic general equilibrium models with CES utility functions* // Proceedings of Intstitute of Mathematics and Mechanics. 2010. V. 16. N 5 (in press).

11. Paltsev S., Reilly J.M., Jacoby H.D., Eckaus R.S., McFarland J., Sarofim M., Asadoorian M., and Babiker M. *The MIT Emissions Prediction and Policy Analysis (EPPA) Model: Version 4, MIT Joint Program on the Science and Policy of Global Change.* Report 125, Cambridge, MA.

12. Stokey N.L., Lucas R., and Prescott E.C. *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1989.

13. Zigova K., Fuchs R., Jiang L., O'Neill B.C., and Pachauri S. *Household survey data used in calibrating the Population-Environment-Technology model.* IIASA Interim Report IR–09–046, 2009, Laxenburg, Austria: IIASA.

ACCOUNTING FOR HOUSEHOLD HETEROGENEITY IN DYNAMIC GENERAL EQUILIBRIUM MODELS

Nickolay B. Melnikov, Central Economics and Mathematics Institute of RAS; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, Cand.Sc., docent (melnikov@cs.msu.su)
Brian C. O'Neill, Climate and Global Dynamics Division & Integrated Science Program, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, USA (boneill@ucar.edu)
Michael G. Dalton, U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration, Seattle, WA, USA (michael.dalton@noaa.gov)

Abstract: Accounting for demographic heterogeneity in the general equilibrium framework leads to solving separate optimization problem for several consumer groups with different characteristics. In the present paper, an aggregation method of consumer characteristics is proposed that allows to take into account time variations in the preference coefficients and labor productivity. The method is applied to a particular type of models that are used to assess energy demand. We show that demand of the single population group that has averaged characteristics of the whole population is in good agreement with total demand of several different consumer groups. Thus, our method allows to extend the scope of application for the representative consumer approach to a wide class of multisector models with heterogeneous consumer characteristics that can change over time.

Keywords: economic growth, computable general equilibrium, demographic heterogeneity, consumer preferences, labor productivity, aggregation, energy demand.