Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.4, с. 74–83

УДК 517.977
ББК 22.18

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Николай Н. Петров*
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: npetrov@udmnet.ru

Рассматриваются две линейные нестационарные задачи уклонения одного убегающего от группы преследователей при условии, что игроки обладают равными динамическими возможностями и убегающий не покидает пределы некоторого множества. Доказывается, что если число преследователей меньше размерности пространства, то убегающий уклоняется от встречи на интервале $[t_0, \infty)$.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, задача уклонения.

1. Введение

Важное направление современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов. При этом представляет интерес получение как необходимых, так и достаточных условий разрешимости задач уклонения и преследования по начальным данным и параметрам игры. В данной работе рассматриваются две нестационарные линейные дифференциальные игры с простой матрицей.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления»

2. Нестационарная задача с простым движением

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geq 2)$ рассматривается следующая дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = b(t)u_i, \ \|u_i\| \leq 1. \tag{2.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = b(t)v, \ \|v\| \leq 1. \tag{2.2}$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \neq y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $b : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает выпуклого множества D $(D \subset \mathbb{R}^k)$ с непустой внутренностью.

При $b(t) \equiv 1$ и отсутствии фазовых ограничений задача рассматривалась в [7,8], при $b(t) \equiv 1$ с фазовыми ограничениями задача рассматривалась в [2,3,6,10]. Нестационарный случай при условии $n \geq k$ рассматривался в [1].

Пусть σ – некоторое разбиение $t_0 < t_1 < \ldots < t_s \ldots$ интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

Определение 2.1. *Кусочно-программной стратегией V игрока E, заданной на $[0, \infty)$, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений $\{c^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие величинам*

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v = v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $||v_l(t)|| \leq 1, \ y(t) \in D, \ t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру через Γ.

Определение 2.2. *Будем говорить, что в игре Γ происходит уклонение от встречи, если существуют разбиение σ интервала $[t_0, \infty)$ не имеющее конечных точек сгущения, стратегия V убегающего E,* *соответствующая разбиению σ такие, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ имеет место*

$$x_i(t) \neq y(t), \ t \geq t_0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $y(t)$ – реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E.

Теорема 2.1. *Пусть $y^0 \in \mathrm{Int}D$, b – функция, ограниченная на любом компакте и $n < k$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Так как $y^0 \in \mathrm{Int}D$, то существует $D_r(q)$ – шар радиуса r с центром в точке q такой, что $y^0 \in \mathrm{Int}D_r(q) \subset D$. Пусть далее ε – расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$, $I_l = [t_0 + l - 1, t_0 + l], b_l > 0$ такое, что $|b(t)| \leq b_l$ для всех $t \in I_l$,

$$\Omega_j(\tau) = \Big\{t > \tau \ : \ \int\limits_{\tau}^{t} |b(s)|ds = \frac{\varepsilon}{j+1}\Big\}.$$

Отметим, что если $t \in \Omega(\tau)$ и $\tau, t \in I_l$ при некотором l, то

$$\frac{\varepsilon}{j+1} = \int\limits_{\tau}^{t} |b(s)|ds \leq b_l(t - \tau).$$

Поэтому

$$t - \tau \geq \frac{\varepsilon}{b_l(j+1)}. \tag{2.3}$$

Для каждого отрезка I_l определим разбиение σ_l данного отрезка и число m_l следующим образом. Рассмотрим отрезок I_1. Пусть $\tau_0^1 = t_0$, $j = 1, 2 \ldots$

$$\tau_j^1 = \begin{cases} \inf\{t > \tau_{j-1}^1, \ t \in \Omega_j(\tau_{j-1}^1)\}, \ \text{если } \tau_j^1 < t_0 + 1 \text{ и } \Omega_j(\tau_{j-1}^1) \neq \emptyset, \\ t_0 + 1 \text{ иначе} \end{cases}$$

Далее полагаем $m_1 = \min\{j : \tau_j^1 = t_0 + 1\}, \sigma_1 = \{\tau_0^1, \ldots, \tau_{m_1}^1\}$. Рассмотрим теперь отрезок I_2. Пусть $\tau_0^2 = t_0 + 1$. Для всех $j = 1, 2 \ldots$

$$\tau_j^2 = \inf\{t > \tau_{j-1}^2, \ t \in \Omega_{j+m_1}(\tau_{j-1}^2)\},$$

если

$$\tau_j^2 < t_0 + 2 \text{ и } \Omega_{j+m_1}(\tau_{j-1}^2) \neq \emptyset$$

и $\tau_j^2 = t_0 + 2$, если соответствующие условия не выполняются.

Далее полагаем

$$m_2 = m_1 + \min\{j : \tau_j^2 = t_0 + 2\},\ \sigma_2 = \{\tau_0^2, \dots, \tau_{m_2 - m_1}^2\}.$$

Предположим, что уже определены разбиение σ_{l-1} отрезка I_{l-1} и число m_{l-1}. Рассмотрим отрезок I_l. Пусть $\tau_0^l = t_0 + l - 1$. Для всех $j = 1, 2 \dots$

$$\tau_j^l = \inf\{t > \tau_{j-1}^2,\ t \in \Omega_{j+m_{l-1}}(\tau_{j-1}^l)\},$$

если

$$\tau_j^l < t_0 + l \text{ и } \Omega_{j+m_{l-1}}(\tau_{j-1}^l) \neq \emptyset$$

и $\tau_j^l = t_0 + l$, если соответствующие условия не выполняются.

Далее полагаем

$$m_l = m_{l-1} + \min\{j : \tau_j^l = t_0 + l\},\ \sigma_l = \{\tau_0^l, \dots, \tau_{m_l - m_{l-1}}^2\}.$$

Отметим, что в силу (2.3) числа m_l существуют для всех l. В качестве разбиения σ промежутка $[t_0, \infty)$ возьмем такое разбиение, что сужение σ на любой отрезок I_l совпадает с σ_l. Пусть $\sigma = \{\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_r < \dots\}$. Задаем стратегию V убегающего следующим образом: $v(t) = v_j \mathrm{sign} b(t), t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, где v_j определяется из условий

$$(v_j, x_i(\tau_j) - y(\tau_j)) = 0, i = 1, \dots, n, (v_j, y(\tau_j) - q) \leq 0, \|v_j\| = 1.$$

Так как $n < k$, то система имеет решение.

Покажем, что V является стратегией уклонения. Рассмотрим отрезок $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Тогда из систем (2.1), (2.2) имеем

$$y(t) = y(\tau_j) + \int_{\tau_j}^{t} |b(s)| ds \cdot v_j,$$

$$x_i(t) = x_i(\tau_j) + \int_{\tau_j}^{t} b(s) u_i(s) ds.$$

Следовательно

$$\|x_i(t)-y(t)\| = \|x_i(\tau_j)-y(\tau_j)-M_j(t)v_j+M_j(t)\hat{u}_i(t)\| \geq$$
$$\geq \|x_i(\tau_j)-y(\tau_j)-M_j(t)v_j\| - M_j(t) =$$
$$= \sqrt{\|a_i(\tau_j)\|^2 - 2M_j(t)(a_i(\tau_j),v_j)+M_j^2(t)} - M_j(t) =$$
$$= \sqrt{\|a_i(\tau_j)\|^2 + M_j^2(t)} - M_j(t), \qquad (2.4)$$

где $a_i(\tau_j) = x_i(\tau_j)-y(\tau_j)$, $M_j(t) = \int\limits_{\tau_j}^{t} |b(s)|ds$,

$$\hat{u}_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{M_j(t)} \int\limits_{\tau_j}^{t} b(s)u_i(s)ds, \text{ если } M_j(t) \neq 0 \\ 0, \text{ если } M_j(t) = 0 \end{cases},$$

причем $\|\hat{u}_i(t)\| \leq 1$ для всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Из (2.4) следует, что если $x_i(\tau_j) \neq y(\tau_j)$, то $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Это означает, что если поимка не произошла до момента τ_j, то она не произойдет и отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Так как $x_i^0 \neq y^0$ для всех i, то $y(t) \neq x_i(t)$ для всех $i, t \geq t_0$.

Докажем теперь, что $y(t) \in D$ для всех $t \geq t_0$. Рассмотрим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$. Тогда

$$\|y(t)-q\| = \|y^0 + M_1(t)v_1 - q\| =$$
$$= \sqrt{\|y^0-q\|^2 + 2(y^0-q, v_1)M_1(t) + M_1^2(t)} \leq \sqrt{(r-\varepsilon)^2 + M_1^2(t)}.$$

Так как $M_1(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$, то

$$\|y(t)-q\| \leq \sqrt{(r-\varepsilon)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq r - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым доказано, что $y(t) \in D$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$.

Предположим, что неравенство $\|y(t)-q\| \leq r - \frac{\varepsilon}{j+1}$ доказано для всех $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j], j \leq l-1$. Докажем, что для всех $t \in [\tau_{l-1}, \tau_l]$ справедливо неравенство $\|y(t)-q\| \leq r - \frac{\varepsilon}{l+1}$.

$$\|y(t)-q\| = \|y(t_{l-1}) + M_l(t)v_l - q\| =$$
$$= \sqrt{\|y(t_{l-1})-q\|^2 + 2(y(t_{l-1})-q, v_l)M_l(t) + M_l^2(t)} \leq$$
$$\leq \sqrt{(r-\frac{\varepsilon}{l})^2 + M_l^2(t)}.$$

Так как $M_l(t) \le \frac{\varepsilon}{l+1}$ для всех $t \in [\tau_{l-1}, \tau_l]$ то

$$\|y(t) - q\| \le \sqrt{(r - \frac{\varepsilon}{l})^2 + \left(\frac{\varepsilon}{l+1}\right)^2} \le r - \frac{\varepsilon}{l+1}.$$

Тем самым доказано, что V является стратегией уклонения. □

3. Линейная нестационарная задача уклонения в конусе

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \ge 2)$ рассматривается следующая дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + u_i, \ \|u_i\| \le 1. \tag{3.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = a(t)y + v, \ \|v\| \le 1. \tag{3.2}$$

При $t = t_0$ заданы начальные положения преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и начальное положение убегающего y^0, причем $x_i^0 \ne y^0, i = 1, \ldots, n$.

Здесь $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ – измеримая функция.

Предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого конуса

$$D = \{y : \ y \in \mathbb{R}^k, \ \ (p_j, y) \le 0, j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ – единичные векторы $\mathbb{R}^k$ такие, что $\mathrm{Int} D \ne \emptyset$.

Убегающий использует кусочно-программные стратегии.

При $a(t) \equiv a, a < 0$ и отсутствии фазовых ограничений задача рассматривалась в [9], при $a(t) \equiv a, a < 0, n \ge k$ с фазовыми ограничениями задача рассматривалась в [4]. Случай $a(t) \equiv a, a < 0, n < k$ с фазовыми ограничениями рассматривался в [5], а случай $a(t) \equiv a, a > 0, n < k$ с фазовыми ограничениями рассматривался в [11].

Теорема 3.1. *Пусть $y^0 \in \mathrm{Int} D$, a – функция, ограниченная на любом компакте и $n < k$. Тогда в игре Γ происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Рассмотрим отрезок $I_l, t_l = t_0 + l$. В системах (3.1), (3.2) сделаем замену переменных

$$x_i = e^{\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} w_i^l,\ y = e^{\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} z^l.$$

Получим системы

$$\dot{w}_i^l = e^{-\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} u_i,\ \dot{z}^l = e^{-\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds} v. \qquad (3.3)$$

Отметим, что $x_i(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $i, \tau \in I_l$ тогда и только тогда, когда $w_i^l(\tau) = z^l(\tau)$. Кроме того $y(t) \in D$ тогда и только тогда, когда $z^l(t) \in D$. Пусть далее

$$b_l(t) = e^{-\int\limits_{t_l}^{t} a(s)ds}, K_l = e^{-\int\limits_{t_l}^{t_{l-1}} a(s)ds},$$

$D_r(q)$ – шар радиуса r с центром в точке q такой, что $y^0 \subset D_r(q) \subset D$, ε – расстояние от y^0 до границы $D_r(q)$, $q_1 = K_1 q, r_1 = K_1 r, \varepsilon_1 = K_1 \varepsilon$, $q_l = K_l q_{l-1},\ r_l = K_l r_{l-1},\ l \geq 2$. Отметим, что $b_l(t) > 0$ для всех $t \in I_l$.

Для отрезка I_1 по ε_1, и функции b_1 определим число m_1 и разбиение σ_1 по схеме предыдущего раздела. Для отрезка I_2 по $\varepsilon_2 = \frac{K_2 \varepsilon_1}{m_1 + 2}$ и функции b_2 определим число m_2 и разбиение σ_2 и так далее. Для отрезка I_l по $\varepsilon_l = \frac{K_l \varepsilon_{l-1}}{m_{l-1}+2}$ и функции b_l определим число m_l и разбиение σ_l. В качестве разбиения σ промежутка $[t_0, \infty)$ возьмем такое разбиение, сужение которого на любой отрезок I_l совпадает с σ_l.

Пусть $\tau_j, \tau_{j+1} \in \sigma_l$. Задаем стратегию V убегающего E на $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ полагая $v(t) = v_j^l$, где v_j^l определяется из следующей системы

$$(v_j^l, z^l(\tau_j) - w_i^l(\tau_j)) = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ (v_j^l, q_l - z^l(\tau_j)) \geq 0,\ \|v_j^l\| = 1.$$

Так как $n < k$, то v_j^l всегда существует. Покажем, что стратегия V гарантирует уклонение от встречи.

1. Покажем, что $z^l(t) \neq w_i^l(t)$ для всех $i, t \in I_l$. Пусть $\tau_j, \tau_{j+1} \in \sigma_l$. Из систем (3.3) имеем

$$z^l(t) = z^l(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} b_l(s)ds \cdot v_j^l,$$

$$w_i^l(t) = w_i^l(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} b_l(s)u_i(s)ds.$$

Поэтому для всех $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$

$$\|z^l(t) - w_i^l(t)\| \geq \|z^l(\tau_j) + M_j^l(t)v_j^l - w_i^l(\tau_j)\| - M_j^l(t) =$$
$$= \sqrt{(a_i^l(\tau_j))^2 + 2M_j^l(t)(v_j^l, a_i^l(\tau_j)) + (M_j^l(t))^2} - M_j^l(t) =$$
$$= \sqrt{(a_i^l(\tau_j))^2 - (M_j^l(t))^2} - M_j^l(t) > 0 \text{ если } a_i^l(\tau_j) \neq 0.$$

Здесь

$$M_j^l(t) = \int\limits_{\tau_j}^{t} b_l(s)ds,\ a_i^l(\tau_j) = z^l(\tau_j) - w_i^l(\tau_j).$$

Поэтому, если поимка не произошла до момента τ_j, то она не произойдет и на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Так как $z^0 - w_i^0 \neq 0$ для всех i, то доказано, что $z^l(t) \neq w_i^l(t)$ для всех $i, l, t \in I_l$.

2. Покажем, что для всех натуральных l, $t \in I_l$ справедливы неравенства

$$\|z^l(t) - q_l\| \leq r_l - \frac{\varepsilon_l}{j+1},\ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}],\ (\tau_j, \tau_{j+1} \in \sigma_l). \tag{3.4}$$

Рассмотрим отрезок $I_1 = [t_0, t_1]$ и разбиение σ_1 данного отрезка.

$$\|z^1(t_0) - q_1\| = \|K_1 y^0 - K_1 q\| = K_1(r - \varepsilon) = r_1 - \varepsilon_1.$$

Пусть $t \in [\tau_0^1, \tau_1^1]$. Тогда

$$\|z^1(t) - q_1\| = \|z^1(t_0) + M_0^1(t)v_1^1 - q_1\| =$$
$$\sqrt{\|z^1(t_0) - q_1\|^2 + 2M_0^1(t)(z^1(t_0) - q_1, v_1^1) + (M_0^1(t))^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{(r_1 - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq r_1 - \frac{\varepsilon_1}{2},$$

так как $M_0^1(t) \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$ для всех $t \in [\tau_0^1, \tau_1^1]$ в силу выбора τ_1^1. Дальнейшее доказательство неравенства (3.4) для I_1 проводится аналогично доказательству соответствующего неравенства из предыдущего раздела.

Предположим, что неравенство (3.4) доказано для всех $I_l, l \leq s$. Докажем неравенство для I_{s+1}. В силу предположения справедливо неравенство

$$\|z^s(t_s) - q_s\| \leq r_s - \frac{\varepsilon_s}{m_s + 2}.$$

Тогда

$$\|z^{s+1}(t_s) - q_{s+1}\| = \|K_{s+1}(y(t_s) - q_s)\| =$$
$$= K_{s+1}\|z^s(t_s) - q_s\| \le K_{s+1}(r_s - \frac{\varepsilon_s}{m_s + 2}) = r_{s+1} - \varepsilon_{s+1}.$$

Поэтому доказательство неравенства (3.4) для I_{s+1} аналогично доказательству (3.4) для I_1. Следовательно

$$z^l(t) \subset D_{r_l}(q_l) \subset D$$

для всех $t \in I_l$ и всех l. Поэтому $y(t) \in D$ для всех $t \geq t_0$. Значит построенная стратегия V является стратегией уклонения. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банников А.С., Петров Н.Н. *К нестационарной задаче группового преследования* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.

2. Иванов Р.П. *Простое преследование на компакте* // ДАН СССР. 1978. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.

3. Ковшов А.М. *Стратегия параллельного сближения в игре простого преследования на сфере. Геодезическое сближение* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 4. С. 41–62.

4. Петров Н.Н. *Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями*// Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1060–1063.

5. Петров Н.Н. *Одна задача уклонения от многих преследователей*// Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 41–43.

6. Петров Н.Н. *Простое преследование при наличии фазовых ограничений.* Л., 1984. 16с. - Деп. в ВИНИТИ 27.03.84, № 1684-84.

7. Петросян Л.А. *Игры преследования со многими участниками* // Известия АН Арм. ССР. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.

8. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами*// Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

9. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. *Об одной задаче группового преследования*// Кибернетика. 1979. № 6. С. 145–146.

10. Сатимов Н.Ю., Кучкаров А.Ш. *Уклонение от встречи со многими преследователями на поверхности*// Узбекский математический журнал. 2001. № 1. С. 51–55.

11. Шуравина И.Н. *Об одной задаче уклонения в конусе* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып.2. С. 13–16.

TO THE NON-STATIONARY PROBLEM OF THE GROUP PURSUIT WITH PHASE RESTRICTIONS.

Nikolay N. Petrov, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Izhevsk, Dr. Sc., professor (npetrov@udmnet.ru).

Abstract: In this article two linear non-stationary pursuit-evasion problems with one evader and the group of pursuers under condition of equivalent dynamic possibilities and that the evader can not leave the certain set are considered. It's proved that if the number of pursuers is less than the dimension of the space, then the evader can avoid meeting on the interval $[t_0, \infty)$.

Keywords: differential game, group pursuit, evasion problem.