МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТОМ 2, ВЫПУСК 1, 2010

## СОДЕРЖАНИЕ



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ Том 2, выпуск 1

ISSN 2074-9872

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

# МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 1

2010

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР**
**И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**



Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН,
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

---


Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru url: http://mgta.krc.karelia.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР**
**И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Том 2
Выпуск 1

*Печатается по решению Ученого совета*
*Института прикладных математических исследований*
*Карельского научного центра РАН*

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 16.06.10.
Формат 70x108 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,1. Усл. печ. л. 10,0. Тираж 300 экз.
Изд. № 124. Заказ 884.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

ISSN 2074-9872

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

# МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 1

2010

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 3-26

УДК 519.83
ББК 22.18

# МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ С-ЯДРА КОРНЕВОЙ ИГРЫ

Арина Николаевна Акимова
Виктор Васильевич Захаров
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: arina_akimova@mail.ru, mcvictor@mail.ru

Показано, что в любой ТП-кооперативной игре основание большого (теневого) $SC$-ядра совпадает с $C$-ядром корневой игры. Сравнение определений большого $SC$-ядра и большого теневого $SC$-ядра с описанием агрегированно-монотонного $C$-ядра приводит к формальному геометрическому совпадению агрегированно-монотонного $C$-ядра либо с большим $SC$-ядром, либо с большим теневым $SC$-ядром. Предложен метод нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей $C$-ядро корневой игры в игре с $n$ игроками. Для обоснования метода применяется теория двойственности и индуктивный метод Б. Пелега.

*Ключевые слова*: ТП-кооперативная игра, $C$-ядро, большое (теневое) $SC$-ядро, корневая игра, агрегированно-монотонное $C$-ядро, линейное программирование, сбалансированный набор коалиций.

## 1. Введение

В процессе развития теории кооперативных игр с трансферабельными полезностями предлагались различные виды монотонности решений, одной из которых является агрегированная монотонность одноточечных решений, введенная Н. Мегиддо [8]. Однако часто главным требованием, предъявляемым к решению ТП-кооперативной игры, является его принадлежность $C$-ядру. Множество векторов выигрышей, образуемое всевозможными одноточечными решениями, удовлетворяющими свойству агрегированной монотонности и одновременно принадлежащими $C$-ядру, было названо агрегированно-монотонным $C$-ядром [7]. В той же статье для того, чтобы сформулировать точное аналитическое описание агрегированно-монотонного $C$-ядра, было введено понятие корневой игры по отношению к исходной ТП-кооперативной игре.

Ранее, исходя из геометрической точки зрения, было предложено множественное решение ТП-кооперативных игр, названное большим $SC$-ядром [13]. Было показано, что большое $SC$-ядро не пусто тогда и только тогда, когда игра сбалансирована. Позднее было предложено большое теневое $SC$-ядро как аналог большого $SC$-ядра в классе несбалансированных ТП-кооперативных игр [ 5, 14, 15]. Следует заметить, что определения этих решений были сформулированы с помощью множества оптимальных решений $X^0(v)$ специальной задачи линейного программирования, которое было названо основанием большого $SC$-ядра в случае сбалансированной игры и основанием большого теневого $SC$-ядра в случае несбалансированной игры.

В этой статье мы сначала покажем, что $C$-ядро корневой игры совпадает с множеством $X^0(v)$, а агрегированно-монотонное $C$-ядро, как множество векторов, формально совпадает либо с большим $SC$-ядром, либо с большим теневым $SC$-ядром в зависимости от сбалансированности игры. Затем мы докажем теорему о взаимнооднозначном соответствии между множеством потенциально-оптимальных граней и множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в игре с $n$ игроками, и на основе этой теоремы сформулируем метод нахождения $C$-ядра корневой игры (или множества $X^0(v)$) в ТП-кооперативной игре с произвольным числом игроков.

## 2. Большое $SC$-ядро, большое теневое $SC$-ядро и агрегированно-монотонное $C$-ядро

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ — конечное множество игроков. Любое непустое подмножество множества игроков $S \subseteq N$ называется *коалицией.* Каждой коалиции $S$ ставится в соответствие вещественное число $v(S)$, называемое значением коалиции $S$, которое представляет собой общий гарантированный доход этой коалиции, получаемый при кооперации ее членов. Построенная в результате функция $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$, определенная на множестве всех подмножеств из $N$ ($S \in 2^N$), с вещественными значениями и естественным условием $v(\emptyset) = 0$, называется *характеристической функцией* игры.

Упорядоченная пара $\Gamma = (N, v)$ называется *кооперативной игрой с трансферабельными полезностями игроков* (или ТП-кооперативной игрой, или ТП-игрой) *в форме характеристической функции.* Обозначим через $G^N$ класс всех ТП-кооперативных игр с множеством игроков $N$, а через $B^N$ — множество всех сбалансированных игр из класса $G^N$.

*Допустимым вектором выигрышей* игры $(N, v)$ называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum\limits_{i \in N} \xi_i \leq v(N)$. *Преддележом* игры $(N, v)$ называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum\limits_{i \in N} \xi_i = v(N)$. *Дележом* игры $(N, v)$ называется преддележ $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям индивидуальной рациональности: $\xi_i \geq v(\{i\})\ \forall\, i \in N$. Множество всех допустимых векторов выигрышей обозначим через $X^*(v)$, множество всех преддележей — через $I^*(v)$, а множество всех дележей — через $I(v)$.

*Решением* на некотором классе ТП-кооперативных игр $G' \subseteq G^N$ называется отображение $\phi$, которое каждой игре $(N, v) \in G'$ ставит в соответствие некоторое подмножество множества допустимых векторов выигрышей $\phi(v) \subset X^*(v)$. Если для любой игры $(N, v) \in G'$ множество $\phi(v)$ состоит из единственного допустимого вектора выигрышей, то решение называется *одноточечным* или *значением* игры. Преддележ из множества $\phi(v)$ называют также *распределением.*

Для аналитического описания одной из наиболее важных концепций решений ТП-кооперативных игр, $C$-ядра, будем исходить из утверждения Оуэна [9].

**Теорема 2.1.** *Преддележ $\xi \in I^*(v)$ принадлежит $C$-ядру ТП-кооперативной игры $(N, v)$ тогда и только тогда, когда для каждой коалиции $S \subset N$ выполняется неравенство: $\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S)$.*

Другими словами, $C$-ядро представляет собой множество коалиционно-рациональных (пред)дележей:

$$C(v) = \Big\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \sum\limits_{i \in N} \xi_i = v(N); \\ \sum\limits_{i \in S} \xi_i \geq v(S),\ \forall\, S \subset N,\ S \neq \emptyset,\ N \end{array} \Big\}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\min \sum_{i \in N} \xi_i\,, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S)\,, \quad \forall\, S \subset N\,,\ S \neq \emptyset,\ N\,. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\xi^0 = (\xi^0_1, \dots, \xi^0_n)$ произвольное оптимальное решение, а через $X^0(v)$ множество всех оптимальных решений ЗЛП (2.2)–(2.3).

Известно (см., напр., [[6], [13]), что $C$-ядро игры $(N, v)$ не пусто тогда и только тогда, когда для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i \in N} \xi^0_i \leq v(N)\,. \tag{2.4}$$

Приведем определение $SC$-ядра ТП-кооперативной игры $(N, v)$, впервые изложенное в [13].

**Определение 2.1.** Множество векторов

$$SC(v,\, \xi^0) = \big\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v),\ \xi_i \geq \xi^0_i,\ \forall\, i \in N \,\big\} = \tag{2.5}$$

или в эквивалентной форме

$$= \Big\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi^0_i + \alpha_i \Big(v(N) - \sum_{i \in N} \xi^0_i\Big),\ \text{где}$$

$$\alpha_i \geq 0,\ \sum_{i \in N} \alpha_i = 1,\ \text{и}\ \sum_{i \in N} \xi^0_i \leq v(N) \Big\} \tag{2.6}$$

называется *$SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N, v)$ относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$, а вектор $\xi^0$ — *основанием* данного $SC$-ядра.

Распространение понятия $SC$-ядра относительно вектора $\xi^0$ на все множество оптимальных решений $X^0(v)$ приводит к понятию большого $SC$-ядра [16].

**Определение 2.2.** Множество векторов

$$GSC(v) = \bigcup_{\forall\, \xi^0 \in X^0(v)} SC(v,\, \xi^0)$$

называется *большим $SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$.

При этом множество всех оптимальных решений задачи (2.2)–(2.3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого $SC$-ядра.*

Справедливо следующее утверждение [16].

**Теорема 2.2.** *В любой сбалансированной ТП-кооперативной игре $(N,\, v)$ большое $SC$-ядро содержится в $C$-ядре: $GSC(v) \subseteq C(v)$.*

Предположим теперь, что $C$-ядро игры $(N,\, v)$ является пустым. В классе несбалансированных игр были введены “теневые” аналоги $SC$-ядра и большого $SC$-ядра [14].

**Определение 2.3.** Множество векторов

$$\overline{SC}(v,\, \xi^0) = \left\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v),\ \xi_i \le \xi_i^0,\ \forall\, i \in N \,\right\} = \tag{2.7}$$

или в эквивалентной форме

$$= \Big\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \Big( v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \Big),\ \text{где}$$
$$\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i \in N} \alpha_i = 1,\ \text{и}\ \sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N) \,\Big\} \tag{2.8}$$

будем называть *теневым $SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$ относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$.

**Определение 2.4.** Множество векторов

$$\overline{\mathbf{GSC}}(v) = \bigcup_{\forall\, \xi^0 \in X^0(v)} \overline{SC}(v,\, \xi^0).$$

называется *большим теневым $SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$.

В этом случае множество всех оптимальных решений задачи (2.2)–(2.3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого теневого $SC$-ядра.*

Так как в несбалансированной игре для любого $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (2.4), т. е.

$$\sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N)\,,$$

то любое теневое $SC$-ядро относительно вектора $\xi^0$ не пусто, а, следовательно, не пусто и большое теневое $SC$-ядро.

Приведем определение свойства агрегированной монотонности одноточечных решений, предложенного Н. Мегиддо [8].

**Определение 2.5.** Значение $\phi$ на классе игр $G^N$ называется *агрегированно-монотонным,* если для любых двух игр $v$, $v' \in G^N$ таких, что $v(S) = v'(S)$ для всех $S \subset N$ и $v(N) < v'(N)$, имеет место неравенство $\phi(v) \le \phi(v')$.

В статье [7] было введено понятие агрегированно-монотонного $C$-ядра и понятие корневой игры.

**Определение 2.6.** *Агрегированно-монотонным $C$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$ называется подмножество множества дележей $I^*(v)$, которое является совокупностью найденных для данной игры $(N,\, v)$ всевозможных значений из класса игр $G^N$, обладающих свойством агрегированной монотонности и принадлежащих $C$-ядру, если последнее не пусто.

Для произвольной ТП-игры $(N,\, v)$ обозначим через $B_v^N$ множество сбалансированных игр, которые отличаются от игры $(N,\, v)$ только значением коалиции $N$:

$$B_v^N = \{\, v' \in B^N \mid v'(S) = v(S)\, \forall S \subset N \,\}\,. \tag{2.9}$$

**Определение 2.7.** *Корневой игрой* $(N,\, v_r)$ по отношению к ТП-игре $(N,\, v)$ называется наименьшая сбалансированная игра из множества $B_v^N$, т. е. $v_r \in B_v^N$ и $v_r(N) \le w(N)$ для любой другой игры $w \in B_v^N$.

Рассмотрим ЗЛП (2.2)–(2.3) для произвольной игры $(N,\, v')$ из множества сбалансированных игр (2.9). Так как $v'(S) = v(S)$ для любой коалиции $S \subset N$, то

$$X^0(v') = X^0(v)\,, \forall\, v' \in B_v^N\,. \tag{2.10}$$

Неравенство (2.4), которое выполняется для любой сбалансированной игры, также справедливо для всех игр из множества (2.9), и с учетом (2.10) имеет вид: $\sum\limits_{i\in N} \xi_i^0 \leq v'(N)$ для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$. Тогда по определению 2.7 значение $v_r(N)$ корневой игры равно

$$v_r(N) = \sum_{i\in N} \xi_i^0 \,. \tag{2.11}$$

**Утверждение 2.1.** *Пусть $(N,\, v)$ — произвольная ТП-кооперативная игра. $C$-ядро корневой игры $(N,\, v_r)$ совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ ЗЛП (2.2)–(2.3).*

*Доказательство.* Непустое $C$-ядро игры $(N,\, v_r)$ можно рассматривать как множество оптимальных решений следующей ЗЛП (см., напр., [9]):

$$\min \sum_{i\in N} \xi_i \,, \tag{2.12}$$

$$\sum_{i\in S} \xi_i \geq v(S)\,, \quad \forall\, S \subset N\,,\ S \neq \emptyset\,, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i\in N} \xi_i = v_r(N)\,, \tag{2.14}$$

которая отличается от задачи (2.2)–(2.3) только дополнительным ограничением (2.14). Поскольку $C(v_r) \neq \emptyset$, то оптимальное значение ЗЛП (2.12)–(2.14) равно $v_r(N)$. Тогда из (2.11) следует, что множества оптимальных решений задач (2.2)–(2.3) и (2.12)–(2.14) совпадают друг с другом, т. е. $X^0(v) = C(v_r)$. □

Следующая теорема обеспечивает точное аналитическое описание агрегированно-монотонного $C$-ядра [7].

**Теорема 2.3.** *Для агрегированно-монотонного $C$-ядра ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$ справедливо представление*

$$\mathcal{A}C(v) = C(v_r) + \big(v(N) - v_r(N)\big)\, \Delta_N \,,$$

*где $C(v_r)$ — $C$-ядро корневой игры $(N,\, v_r)$ и $\Delta_N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1,\ x_i \geq 0\ \forall\, i \in N\}$.*

**Утверждение 2.2.** *Пусть $(N, v)$ — произвольная ТП-кооперативная игра. Множество векторов из агрегированно-монотонного $C$-ядра совпадает с большим $SC$-ядром, если игра $(N, v)$ сбалансирована, и с большим теневым $SC$-ядром, если игра $(N, v)$ несбалансирована.*

*Доказательство.* Заметим, что описания $SC$-ядра и теневого $SC$-ядра в форме (2.6) и (2.8) отличаются друг от друга только условиями сбалансированности или несбалансированности игры $(N, v)$ в виде неравенства (2.4) и противоположного ему неравенства. Поэтому объединяя их в одно определение и распространяя его на все множество $X^0(v)$, получим следующее общее выражение для большого $SC$-ядра и большого теневого $SC$-ядра.

Множество векторов

$$X = X^0(v) + \Big(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0\Big)\, \Delta_N \tag{2.15}$$

является большим $SC$-ядром, если игра $(N, v)$ сбалансирована, и большим теневым $SC$-ядром, если игра $(N, v)$ несбалансирована.

Сравним выражение (2.15) с представлением агрегированно-монотонного $C$-ядра из теоремы 2.3. Принимая во внимание утверждение 2.1 и равенство (2.11), приходим к доказываемому утверждению. □

## 3. Теоретическое обоснование метода

Для построения метода нахождения $C$-ядра корневой игры будем исходить из утверждения 2.1 о совпадении $C(v_r)$ с множеством $X^0(v)$. Как известно, множество оптимальных решений любой ЗЛП является также решением некоторой системы линейных уравнений и неравенств (см., напр., [4]). Поэтому рассмотрим задачу нахождения системы линейных ограничений, описывающей $C$-ядро корневой игры (или множество $X^0(v)$), минимальной по общему числу ограничений и содержащей наибольшее число ограничений типа равенств.

Представим ЗЛП (2.2)–(2.3) в векторно-матричной форме:

$$\min \quad (\xi, \mathbb{I})\,, \tag{3.1}$$

$$\xi A \geq V\,, \tag{3.2}$$

где $(\xi, \mathbb{I})$ — скалярное произведение вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $n$-мерного вектора $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1)^T$. Если некоторым образом перенумеровать все коалиции $S \subset N$ $(S \neq \emptyset, N)$: $S_1, \ldots, S_p$, где $p = 2^n - 2$ — общее число ограничений в системе (2.3), то можно представить элементы матрицы $A$ и вектора $V$ в виде:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad i \in S_j\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad i \notin S_j\,, \end{cases} \quad \text{где } i = \overline{1,\, n}\,,\ j = \overline{1,\, p}\,, \\ V &= \big(v(S_1), \ldots, v(S_p)\big)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Множество допустимых решений (3.2) с геометрической точки зрения является выпуклым замкнутым многогранным множеством, которое обозначим $M$. Поэтому множеством оптимальных решений $X^0(v)$ может быть только некоторая грань $\Gamma$ множества $M$. Любую грань $\Gamma \in M$ такую, что $\Gamma \subseteq X^0(v)$, будем называть оптимальной гранью.

**Определение 3.1.** Грань $\Gamma \in M$ будем называть *потенциально-оптимальной в классе игр $G^N$*, если существует игра $(N, v)$ из класса $G^N$ такая, что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma' \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma' \subset \Gamma$.

Множество всех потенциально-оптимальных граней в классе игр $G^N$ обозначим через $P_N^0$.

Задача (3.1)–(3.2) является двойственной к задаче:

$$\max \ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\,:\; i \in S_j} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,, \\ \lambda_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1,\, p}\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

или в векторно-матричной форме

$$\max \ (V, \lambda)\,,$$

$$\begin{cases} A\,\lambda = \mathbb{I}\,, \\ \quad \lambda \geqq 0\,. \end{cases}$$

Оптимальное решение ЗЛП (3.4)–(3.5) связано с понятиями сбалансированного и минимального сбалансированного набора коалиций (или покрытия), предложенными Бондаревой [2, 3] и Шепли [11].

**Определение 3.2.** Пусть $\mathcal{B} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ — некоторый набор коалиций $S_j \subset N$, $S_j \neq \emptyset$. Набор коалиций $\mathcal{B}$ называется *сбалансированным,* если существуют такие положительные числа $\lambda_j > 0$, $\forall\, S_j \in \mathcal{B}$, что

$$\sum_{\substack{j\,:\; S_j \in \mathcal{B} \\ i \in S_j}} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,. \tag{3.6}$$

Набор чисел $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$ называется *системой балансирующих весов.*

**Определение 3.3.** Сбалансированный набор коалиций $\mathcal{B}$ называется *минимальным,* если он не содержит ни одного собственного подмножества $\mathcal{B}^* \subsetneq \mathcal{B}$, также являющегося сбалансированным набором коалиций.

Доказательство следующего необходимого и достаточного условия минимальности сбалансированного набора можно найти, например, в книге Оуэна [9].

**Теорема 3.1.** *Сбалансированный набор коалиций $\mathcal{B}$ является минимальным тогда и только тогда, когда для него существует единственная система балансирующих весов $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$.*

Для того, чтобы найти все минимальные сбалансированные наборы коалиций в классе игр $G^N$, Б. Пелегом был разработан индуктивный метод [10], сущность которого заключается в последовательном нахождении всех минимальных сбалансированных наборов коалиций для игр с $n$ игроками, если известны все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с $n-1$ игроками. Заметим, что в работе Шепли [11] приведены все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с числом игроков $n = 3, 4, 5, 6$.

Как известно, между оптимальными решениями пары двойственных задач существуют соотношения, устанавливаемые теоремами о дополняющей нежесткости, а также теоремой двойственности. Для пары двойственных задач линейного программирования в *стандартном* виде:

$$\min \quad (x, c)\,, \qquad \begin{cases} x\,D \geq b\,, \\ \quad x \geqq 0\,, \end{cases} \qquad (*)$$

$$\max \quad (b, y)\,, \qquad \begin{cases} D\,y \leq c\,, \\ \quad y \geqq 0\,, \end{cases} \qquad (**)$$

где $D$ — матрица, $x$ и $b$ — вектор-строки, $y$ и $c$ — вектор-столбцы, эти теоремы формулируются следующим образом (см., напр., [12]).

**Теорема 3.2** (Теорема о дополняющей нежесткости в слабой форме)**.** *Допустимые векторы $x$ и $y$ задач* $(*)$ *и* $(**)$ *оптимальны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} (b - x\,D)\,y &= 0\,,\\ x\,(D\,y - c) &= 0\,. \end{aligned}$$

**Теорема 3.3** (Теорема о дополняющей нежесткости в сильной форме)**.** *Для заданной пары разрешимых двойственных задач* $(*)$ *и* $(**)$ *существует по крайней мере одна пара оптимальных решений $x$ и $y$, удовлетворяющих соотношениям:*

$$\begin{aligned} (b - x\,D) + y^T &> 0\,,\\ (D\,y - c) + x^T &> 0\,. \end{aligned}$$

**Теорема 3.4** (Теорема двойственности)**.** *Для того чтобы допустимый вектор $x$ (вектор $y$) являлся оптимальным решением ЗЛП* $(*)$ *(ЗЛП* $(**)$*, соответственно), необходимо и достаточно, чтобы существовал допустимый вектор $y$ (вектор $x$) двойственной задачи такой, что* $(x,\,c) = (b,\,y)$. *Оптимальные значения двойственных задач равны для любой пары их оптимальных решений.*

Кроме того, для допустимых векторов двойственный задач справедлива следующая теорема(см., напр., [12]).

**Теорема 3.5.** *Для любых допустимых векторов $x$ и $y$ задач* $(*)$ *и* $(**)$*, соответственно, выполняется неравенство:* $(x,\,c) \geq (b,\,y)$.

В следующей теореме мы покажем, что множество потенциально-оптимальных граней $P_N^0$ взаимно-однозначно связано с множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр $G^N$.

Предварительно заметим, что система ограничений, описывающая произвольную грань $\Gamma \in M$, получается из системы (3.2) путем замены в ней некоторых $k$ неравенств на уравнения ($k \leq n$):

$$\xi\,\tilde{A} = \tilde{V}\,, \tag{3.7}$$

$$\xi\,\widehat{A} \geq \widehat{V}\,, \tag{3.8}$$

причем столбцы матрицы $\tilde{A}$ должны быть линейно независимыми, т. е. $\operatorname{rank} \tilde{A} = k$. При этом размерность грани $\Gamma$ определяется как $q = n - k$. Обозначим через $U(\Gamma) = (S_{i_1}, \ldots, S_{i_k})$ множество коалиций, соответствующих неравенствам в (3.2), которые заменяются на уравнения для получения системы (3.7)–(3.8).

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.6.** *Грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в классе игр $G^N$ тогда и только тогда, когда множество коалиций $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором в классе игр $G^N$.*

*Доказательство.* Необходимость. Предположим, что некоторая грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в классе игр $G^N$ и задается системой ограничений (3.7)–(3.8), где столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, а $U(\Gamma) = (S_1, \ldots, S_k)$ — множество коалиций, перенумерованных в том же порядке, в котором они соответствуют столбцам матрицы $\tilde{A}$. По определению 3.1, существует игра $(N, v)$ из класса $G^N$ такая, что $X^0(v) = \Gamma$. Рассмотрим связь между оптимальными решениями задач (2.2)–(2.3) и (3.4)–(3.5) для данной игры. Пусть $\xi^0 \in X^0(v)$ и $\lambda^0$ — соответствующие произвольные оптимальные решения этих задач.

Заметим, что рассматриваемые задачи не являются задачами линейного программирования в стандартном виде, поэтому для них условия дополняющей нежесткости в слабой форме сводятся к единственному равенству: $(V - \xi A)\,\lambda = 0$, которое равносильно условиям:

$$\begin{cases} \text{если } \lambda_j > 0\,, \text{ то } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} = v(S_j)\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,, \\ \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} > v(S_j)\,, \text{ то } \lambda_j = 0\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

а условия дополняющей нежесткости в сильной форме — к единственному неравенству: $(V - \xi A) + \lambda^T > 0$, которое равносильно условиям:

$$\begin{cases} \text{если } \lambda_j = 0\,, \text{ то } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} > v(S_j)\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,, \\ \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} = v(S_j)\,, \text{ то } \lambda_j > 0\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

По теореме 3.2 условия дополняющей нежесткости в слабой форме выполняются для любой пары оптимальных решений двойственных задач $\xi^0$ и $\lambda^0$. При этом для некоторых пар оптимальных решений равенства $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^0\, a_{ij} = v(S_j)$ при некоторых $S_j$ могут выполняться одновременно. По теореме 3.3 условия дополняющей нежесткости в сильной форме гарантируют, что существует по крайней мере одна пара оптимальных решений $\xi^0$ и $\lambda^0$, для которых условия $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^0\, a_{ij} = v(S_j)$ не могут иметь место одновременно.

Таким образом, существует, по крайней мере, одна пара оптимальных решений $\xi^0$ и $\lambda^0$ рассматриваемых задач такая, что

$$\begin{cases} \xi^0\, \tilde{A} = \tilde{V}\,, \\ \xi^0\, \widehat{A} > \widehat{V}\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda_j^0 > 0 \ \ \forall\, S_j \in U(\Gamma)\,, \\ \lambda_j^0 = 0 \ \ \forall\, S_j \notin U(\Gamma)\,. \end{cases}$$

Подставляя $\lambda^0$ в ограничения-равенства из (3.5), получим, что ненулевые компоненты $\lambda^0$ удовлетворяют системе:

$$\sum_{\substack{j:\ i \in S_j \\ S_j \in \mathcal{B}}} \lambda_j^0 = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,.$$

Тогда из определения 3.2 следует, что $U(\Gamma)$ является сбалансированным набором коалиций.

Из ненулевых компонент вектора $\lambda^0$ образуем вектор

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \,\ldots,\, \lambda_k^0)\,,$$

располагая $\lambda_j^0$ в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества $U(\Gamma)$. Так как столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, то вектор $\tilde{\lambda}^0$ является едиственным решением системы уравнений $\tilde{A}\,\lambda = \mathbb{I}$. Тогда по теореме 3.1 получаем, что $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором коалиций.

Достаточность. Пусть $(N,\, v)$ — произвольная игра из класса $G^N$. Рассмотрим ЗЛП (3.4)–(3.5) для данной игры. Заметим, что крайними точками выпуклого многогранника $M'$, описываемого системой ограничений (3.5), являются векторы $\lambda$, ненулевые компоненты которых образуют системы балансирующих весов, соответствующие минимальным сбалансированным наборам коалиций. Следовательно, по крайней мере одно из оптимальных решений $\lambda^0$ задачи (3.4)–(3.5) является крайней точкой $M'$ и отвечает некоторому минимальному сбалансированному набору коалиций $\mathcal{B} = (S_1, \ldots, S_k)$. Обозначим систему балансирующих весов для $\mathcal{B}$ через

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0),$$

располагая компоненты $\lambda_j^0 > 0$ оптимального вектора $\lambda^0$ в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества $\mathcal{B}$.

Согласно теореме 3.1 система балансирующих весов $\tilde{\lambda}^0$ является единственным решением системы ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{j:\, i\in S_j\\ S_j\in\mathcal{B}}} \lambda_j = 1, \quad \forall\, i \in N, \\ \lambda_j > 0, \quad \forall\, S_j \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

которую можно представить в векторно-матричной форме как

$$\tilde{A}\,\lambda = \mathbb{I}, \quad \lambda > 0. \tag{3.11}$$

Тогда столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ — линейно независимы, а их число $k \le n$.

Покажем, что если $U(\Gamma) = \mathcal{B}$, то $X^0(v) = \Gamma$. Пусть грань $\Gamma$ описывается системой (3.7)–(3.8) с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$. Возьмем произвольный вектор $\xi \in \Gamma$, и умножим равенство (3.7), которому удовлетворяет этот вектор, справа скалярно на вектор $\tilde{\lambda}^0$:

$$\xi\,\tilde{A}\,\tilde{\lambda}^0 = \tilde{V}\,\tilde{\lambda}^0. \tag{3.12}$$

С одной стороны, левую часть этого выражения можно преобразовать согласно (3.11):

$$\xi\,\tilde{A}\,\tilde{\lambda}^0 = \xi\,\mathbb{I} = \sum_{i\in N} \xi_i. \tag{3.13}$$

С другой стороны, правая часть (3.12) равна оптимальному значению ЗЛП (3.4)–(3.5), так как

$$\tilde{V}\,\tilde{\lambda}^0 = \sum_{j:\, S_j\in\mathcal{B}} \lambda_j^0\, v(S_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^0\, v(S_j) = \max \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j). \tag{3.14}$$

Тогда по теореме 3.4 $\sum\limits_{i\in N}\xi_i$ является оптимальным значением ЗЛП (2.2)–(2.3), и, следовательно, ввиду произвольности выбора вектора $\xi \in \Gamma$, справедливо включение $\Gamma \subseteq X^0(v)$.

Предположим, что $\Gamma \subset X^0(v)$, т. е. $\Gamma \neq X^0(v)$. Тогда существует другая оптимальная грань $\Gamma' = X^0(v)$ такая, что $\Gamma \subset \Gamma'$. Это означает, что любое решение системы (3.7)–(3.8) также является решением системы, описывающей грань $\Gamma'$:

$$\xi\,\tilde{A}' \;=\; \tilde{V}'\,, \tag{3.15}$$

$$\xi\,\widehat{A}' \;\geq\; \widehat{V}'\,, \tag{3.16}$$

причем все столбцы матрицы $\tilde{A}'$ также являются столбцами матрицы $\tilde{A}$, и, следовательно, $U(\Gamma') \subset U(\Gamma) = \mathcal{B}$. По доказанному в первой части данной теоремы множество $U(\Gamma')$ является минимальным сбалансированным набором коалиций. Следовательно, сбалансированный набор коалиций $\mathcal{B}$ не является минимальным. Полученное противоречит доказывает, что сделанное предположение неверно, и $\Gamma = X^0(v)$.

Для того, чтобы грань $\Gamma$ являлась потенциально-оптимальной, согласно определению 3.1 нужно показать, что существует такая игра из класса $G^N$, что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma^* \subset \Gamma$.

Так как $X^0(v) = \Gamma$ в исходной игре $(N,\, v)$, то для любой другой оптимальной грани $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ возможны два случая: либо $\Gamma^* \subset \Gamma$, либо $\Gamma^* \nsubseteq \Gamma$. В первом случае игра $(N,\, v)$ является искомой игрой, а грань $\Gamma$ — потенциально-оптимальной гранью.

Рассмотрим второй случай. Можно утверждать, что существует, по крайней мере, еще одна оптимальная грань $\hat{\Gamma} = X^0(v)$, $\hat{\Gamma} \neq \Gamma$, такая, что $\Gamma^* \subseteq \hat{\Gamma}$. Построим новую игру $(N,\, \hat{v})$:

$$\begin{cases} \hat{v}(S) = v(S) - \varepsilon & \text{для } \forall\, S \subset N\colon S \in \big(U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)\big)\,, \\ \hat{v}(S) = v(S) & \text{для остальных коалиций } S \subset N\,, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим ЗЛП (3.4)–(3.5) для новой игры $(N,\, \hat{v})$:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \hat{v}(S_j)\,, \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:\, i\in S_j} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,. \\ \lambda_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1,\, p}\,. \end{cases} \tag{3.19}$$

Заметим, что множество допустимых векторов (3.19) при изменении характеристической функции игры не меняется, а значение целевой функции (3.18) для любого допустимого вектора $\lambda$ может, разве что, уменьшиться:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \hat{v}(S_j) \;&=\; \sum_{j:\, S_j\in U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \lambda_j \big(v(S_j) - \varepsilon\big) + \sum_{j:\, S_j\notin U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \lambda_j\, v(S_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,. \end{aligned}$$

Более того, значение целевой функции (3.18) для вектора $\lambda^0$ остается тем же, что и в исходной игре $(N,\, v)$, так как $\lambda^0_j > 0$ только при $S_j \in U(\Gamma) = \mathcal{B}$, а другие компоненты $\lambda^0_j = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \lambda^0_j\, \hat{v}(S_j) \;&=\; \sum_{j:\, S_j\in U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \lambda^0_j \big(v(S_j) - \varepsilon\big) + \sum_{j:\, S_j\in U(\Gamma)} \lambda^0_j\, v(S_j) + \\ &+ \sum_{j:\, S_j\notin U(\hat{\Gamma})\cup U(\Gamma)} \lambda^0_j\, v(S_j) = \sum_{j:\, S_j\in \mathcal{B}} \lambda^0_j\, v(S_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda^0_j\, v(S_j)\,. \end{aligned}$$

Следовательно, предложенное изменение характеристической функции не повлияет на оптимальное значение задачи, а вектор $\lambda^0$ также является оптимальным решением новой ЗЛП (3.18)–(3.19). Тогда по теореме 3.4 оптимальное значение задачи (2.2)–(2.3) при переходе от игры $(N,\, v)$ к игре $(N,\, \hat{v})$ также не меняется. А поскольку значения $\hat{v}(S) = v(S)$ для $S \in U(\Gamma)$, то в новой игре $X^0(\hat{v}) = \Gamma$.

Покажем, что $\hat{\Gamma} \nsubseteq X^0(\hat{v})$. Пусть в игре $(N,\, v)$ грань $\hat{\Gamma}$ описывается системой ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} \xi_i = v(S) \qquad \text{при } \forall\, S \in U(\hat{\Gamma})\,, \\ \sum\limits_{i\in S} \xi_i \geq v(S) \qquad \text{при } \forall\, S \notin U(\hat{\Gamma})\,, \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме:

$$\xi\,\breve{A} \;=\; \breve{V}\,, \tag{3.20}$$
$$\xi\,\bar{A} \;\geq\; \bar{V}\,, \tag{3.21}$$

причем $U(\hat{\Gamma}) \nsubseteq U(\Gamma)$ и $U(\Gamma) \nsubseteq U(\hat{\Gamma})$. Так как в исходной игре $X^0(v) = \hat{\Gamma}$, то по необходимости множество $U(\hat{\Gamma})$ является минимальным сбалансированным набором коалиций и существует система балансирующих весов $\hat{\lambda}^0$, которая является единственным решением системы уравнений:

$$\breve{A}\,\lambda = \mathbb{I}\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{3.22}$$

Тогда в игре $(N,\, \hat{v})$ грань $\hat{\Gamma}$ можно описать системой ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} \xi_i = v(S) - \varepsilon & \text{при } \forall\, S \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)\,, \\ \sum\limits_{i\in S} \xi_i = v(S) & \text{при } \forall\, S \in U(\hat{\Gamma}) \cap U(\Gamma)\,, \\ \sum\limits_{i\in S} \xi_i \geq \hat{v}(S) & \text{при } \forall\, S \notin U(\hat{\Gamma})\,, \end{cases}$$

которую представим в векторно-матричной форме следующим образом:

$$\xi\,\breve{A}' \;=\; \breve{V}'\,, \tag{3.23}$$
$$\xi\,\breve{A}'' \;=\; \breve{V}''\,, \tag{3.24}$$
$$\xi\,\bar{A} \;\geq\; \bar{V}'\,, \tag{3.25}$$

где без уменьшения общности можно считать, что $(\breve{A}'|\breve{A}'') = \breve{A}$ и, соответственно, $(\breve{V}'|\breve{V}'') = \breve{V}$.

Пусть $\hat{\xi} \in \hat{\Gamma}$ — произвольный вектор грани $\hat{\Gamma}$. Представим уравнения (3.23) и (3.24) в виде одного: $\xi\,(\breve{A}'|\breve{A}'') = (\breve{V}'|\breve{V}'')$, подставим в него $\hat{\xi}$ и умножим его справа скалярно на вектор $\hat{\lambda}^0$:

$$\hat{\xi}\,(\breve{A}'|\breve{A}'')\,\hat{\lambda}^0 = (\breve{V}'|\breve{V}'')\,\hat{\lambda}^0\,. \tag{3.26}$$

Левую часть этого выражения преобразуем согласно (3.22):

$$\hat{\xi}\,(\breve{A}'|\breve{A}'')\,\hat{\lambda}^0 = \hat{\xi}\,\breve{A}\,\hat{\lambda}^0 = \hat{\xi}\,\mathbb{I} = \sum_{i\in N} \hat{\xi}_i\,.$$

Правую часть (3.26) представим в виде

$$\begin{aligned}(\breve{V}'|\breve{V}'')\,\hat{\lambda}^0 &= \sum_{j:\, S_j\in U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \hat{\lambda}_j^0\,(v(S_j)-\varepsilon) + \sum_{j:\, S_j\in U(\hat{\Gamma})\cap U(\Gamma)} \hat{\lambda}_j^0\, v(S_j) < \\ &< \sum_{j:\, S_j\in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}_j^0\, v(S_j)\,.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\sum_{i\in N}\hat{\xi}_i < \sum_{j:\, S_j\in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}_j^0\, v(S_j)\,.$$

Так как сумма справа равна оптимальному значению ЗЛП (3.4)–(3.5), совпадающему с оптимальным значением ЗЛП (3.18)–(3.19), то по теореме 3.5 вектор $\hat{\xi}$ не является допустимым вектором ЗЛП (2.2)–(2.3) для игры $(N,\,\hat{v})$. Следовательно, грань $\hat{\Gamma}$ не может быть оптимальной в новой игре, т. е. $\hat{\Gamma}\not\subseteq X^0(\hat{v})$.

Таким образом, в случае, когда кроме грани $\Gamma = X^0(v)$ существует оптимальная грань $\Gamma^*\subseteq X^0(v)$ такая, что $\Gamma^*\not\subseteq\Gamma$, построенная игра $(N,\,\hat{v})$ является искомой игрой из определения 3.1, и, следовательно, грань $\Gamma$ является потенциально-оптимальной. □

Из теоремы 3.6 следует, что для того, чтобы найти множество потенциально-оптимальных граней $P_N^0$, достаточно найти множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр $G^N$, и наоборот.

Так как для каждой потенциально-оптимальной грани $\Gamma$, по определению 3.1, найдется игра из класса $G^N$ такая, что $X^0(v)=\Gamma$, то значение целевой функции (2.2) является постоянной величиной для любого вектора $\xi\in\Gamma$. Поэтому введем для нее специальное обозначение:

$$\sigma(\Gamma)=\sum_{i\in N}\xi_i\,,\quad \forall\,\xi\in\Gamma\,,\quad \Gamma\in P_N^0\,. \tag{3.27}$$

При доказательстве достаточности теоремы 3.6 были получены соотношения (3.12)–(3.14), из которых с учетом $\mathcal{B}=U(\Gamma)$ следует, что для любой потенциально-оптимальной грани $\Gamma$ и соответствующей системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}$ справедливо равенство:

$$\sum_{i\in N}\xi_i = \sum_{j:\, S_j\in U(\Gamma)} \tilde{\lambda}_j\, v(S_j)\,. \tag{3.28}$$

Следующее утверждение дает критерий выбора оптимальной грани $\Gamma = X^0(v)$ из множества $P_N^0$.

**Утверждение 3.1.** *Оптимальное значение ЗЛП (2.2)–(2.3) равно*

$$z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)\,. \tag{3.29}$$

*Доказательство.* Возьмем некоторую потенциально-оптимальную грань $\Gamma^1 \in P_N^0$ и рассмотрим игру $(N, v)$, в которой $X^0(v) = \Gamma^1$. Пусть $\Gamma^2 \in P_N^0$ — любая другая потенциально-оптимальная грань.

По теореме 3.6 множества $U(\Gamma^1)$ и $U(\Gamma^2)$ являются минимальными сбалансированными наборами коалиций, которым соответствуют системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$.

Так как $X^0(v) = \Gamma^1$, то из (3.27), (3.28) и теоремы двойственности 3.4 получаем равенство:

$$\min \sum_{i \in N} \xi_i = \sigma(\Gamma^1) = \sum_{j\colon S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1\, v(S_j) = \max \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,. \tag{3.30}$$

Следовательно, для систем балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$ справедливо неравенство:

$$\sum_{j\colon S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1\, v(S_j) \geq \sum_{j\colon S_j \in U(\Gamma^2)} \tilde{\lambda}_j^2\, v(S_j)\,,$$

эквивалентное неравенству $\sigma(\Gamma^1) \geq \sigma(\Gamma^2)$.

Откуда, ввиду произвольности выбора $\Gamma^2 \in P_N^0$, следует:

$$\sigma(\Gamma^1) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)\,. \tag{3.31}$$

Обозначая оптимальное значение ЗЛП (2.2)–(2.3) через $z^0$, из (3.30) и (3.31) получаем равенство (3.29). □

Из утверждения 3.1 следует, что если наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ достигается только на одной потенциально-оптимальной грани:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \Gamma^*\,,$$

то именно эта грань является множеством оптимальных векторов ЗЛП (2.2)–(2.3): $X^0(v) = \Gamma^*$.

Предположим, что $\sigma(\Gamma)$ достигает своего наибольшего значения на нескольких потенциально-оптимальных гранях:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k\}.$$

Тогда возникает проблема выбора $X^0(v)$ из данной совокупности граней.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(\Gamma)$ достигает наибольшего значения только на двух потенциально-оптимальных гранях $\Gamma^1$, $\Gamma^2 \in P_N^0$. Покажем, что тогда множество векторов, принадлежащих грани $\Gamma^1$, совпадает с множеством векторов, принадлежащих грани $\Gamma^2$.

Возьмем произвольные векторы $\xi^1 \in \Gamma^1$ и $\xi^2 \in \Gamma^2$ и рассмотрим вектор $\xi = \alpha\,\xi^1 + (1-\alpha)\,\xi^2$, где $\alpha \in [0;\,1]$. Так как многогранное множество $M$ является выпуклым, то $\xi \in M$.

Значение целевой функции (2.2) для данного вектора $\xi$ при любом $\alpha \in [0;\,1]$ равно:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} \xi_i &= \alpha \sum_{i\in N} \xi_i^1 + (1-\alpha) \sum_{i\in N} \xi_i^2 = \\ &= \alpha \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) + (1-\alpha) \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma). \end{aligned}$$

Но по условию $\arg \max\limits_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1,\, \Gamma^2\}$. Следовательно, вектор $\xi$ принадлежит либо $\Gamma^1$, либо $\Gamma^2$, либо обеим граням одновременно. Таким образом, между гранями $\Gamma^1$ и $\Gamma^2$ нет никакой другой грани множества $M$ и никаких внутренних векторов из $M$. Тогда

а) либо одна из граней является подмножеством другой: например, $\Gamma^2 \subset \Gamma^1$;

б) либо множества векторов, принадлежащих граням $\Gamma^1$ и $\Gamma^2$, совпадают друг с другом.

Но по определению 3.1 ни одна из потенциально-оптимальных граней не может быть подмножеством другой потенциально-оптимальной грани. Следовательно, п. а) невозможен, и в результате остается только п. б).

Обобщая это рассуждение на несколько потенциально-оптимальных граней, приходим к выводу, что если

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k\}, \tag{3.32}$$

то множества векторов, принадлежащих граням $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k$, совпадают друг с другом. Следовательно, множеством $X^0(v)$ является любая из граней $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k$.

*Замечание* 3.1. Пусть $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k$ — потенциально-оптимальные грани из (3.32). Тогда каждый вектор $\xi^0 \in X^0(v)$ удовлетворяет всем ограничениям типа равенств, которые входят в систему ограничений, описывающую какую-либо из рассматриваемых граней.

## 4. Формулировка метода

На основании теоремы 3.6, утверждения 3.1 и замечания 3.1 получаем следующий метод нахождения $C$-ядра корневой игры с $n$ игроками.

1. Найти, используя индуктивный метод Б. Пелега, множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр $G^N$. По теореме 3.6 каждому минимальному сбалансированному набору коалиций $\mathcal{B}$ взаимно-однозначно соответствует некоторая потенциально-оптимальная грань $\Gamma \in P_N^0$ с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$.

2. Вычислить значения $\sigma(\Gamma)$ для всех $\Gamma \in P_N^0$ и определить наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ на множестве $P_N^0$:

$$z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)\,.$$

   По утверждению 3.1 величина $z^0$ является оптимальным значением ЗЛП (2.2)–(2.3) или общим гарантированным доходом коалиции $N$ в корневой игре: $v_r(N) = z^0$.

3. Выделить все потенциально-оптимальные грани, на которых достигается наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$:

$$\{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k\} = \arg\max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)$$

   и найти множество коалиций

$$Y = U(\Gamma^1) \cup \ldots \cup U(\Gamma^k)\,.$$

4. Составить систему ограничений для множества $X^0(v)$, принимая во внимание замечание 3.1:
$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} \xi_i = v(S) & \text{при } S \subset N \colon S \in Y\,, \\ \sum\limits_{i\in S} \xi_i \geq v(S) & \text{при } S \subset N \colon S \notin Y\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

По утверждению 2.1 система (4.1) описывает $C$-ядро корневой игры $(N,\, v_r)$. Эта система, во-первых, содержит на одно ограничение меньше, чем классическое описание $C$-ядра из теоремы 2.1. Во-вторых, в этой системе имеется максимальное число ограничений типа равенств. Для окончательного нахождения $C$-ядра корневой игры остается найти его крайние точки, исходя из полученной системы.

## 5. Заключение

В этой статье мы показали, что $C$-ядро корневой игры совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ задачи линейного программирования (2.2)–(2.3), а агрегированно-монотонное $C$-ядро, как подмножество множества преддележей, формально геометрически совпадает либо с большим $SC$-ядром, либо с большим теневым $SC$-ядром.

Совпадение $C$-ядра корневой игры с множеством $X^0(v)$ позволило обосновать и сформулировать метод для нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей $C$-ядро корневой игры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Акимова А.Н. *Аналитический метод решения специальной задачи линейного программирования* // Тезисы докладов международного конгресса “Нелинейный динамический анализ”, С.-Петербург, Россия. 2007. С. 315.

2. Бондарева О.Н. *Теория ядра в игре n лиц* // Вестник Ленинградского университета, Серия: мат., мех., астр. 1962. № 13(3). С. 140–142.

3. Бондарева О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. 1963. № 10. С. 119–140.

4. Еремин И.И. *Линейная оптимизация и системы линейных неравенств.* Москва: Издательский центр “Академия”. 2007.

5. Захаров В.В., Акимова А.Н. *О некоторых селекторах C-ядра* // Вестник Санкт-Петербургского Университета, Сер. 1. 2002. № 3. С. 10–16.

6. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* С.-Петербург: Издательство Европейского университета в С.-Петербурге. 2004.

7. Calleja P., Rafels C., Tijs S. *The Aggregate-Monotonic Core* // Games and Economic Behavior. 2009. V. 66. P. 742–748.

8. Megiddo N. *On the nonmonotonicity of the bargaining set, the kernel and the nucleolus of a game* // SIAM J. on Applied Mathematics. 1974. V. 27. P. 355–358.

9. Owen G. *Game theory* (third edition). New York: Academic Press. 1995.

10. Peleg B. *An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets* // Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. № 2. P. 155–162.

11. Shapley L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Research Logistic Quarterly. 1967. V. 14. P. 453–460.

12. Simonnard M. *Linear programming.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. 1966.

13. Zakharov V.V. *About selectors of the core in dynamic games* // Proceedings of the 7th ISDG symposium on Dynamic Game and Applications, Kanagawa, Japan. 1996.

14. Zakharov V.V., Akimova A.N. *Nucleolus as a Selector of Subcore* // Proceedings Volume from the 11th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization” (Zakharov V.V., ed), S.-Petersburg, Russia. Great Britain: Pergamon. 2000. V. 2. P. 675–680.

15. Zakharov V.V., Akimova A.N. *Geometrical Properties of Subcore* // Game Theory and Applications (Petrosjan, L.A., and V.V. Mazalov, eds). 2002. V. 8. P. 279–289.

16. Zakharov V.V., Kwon O-H. *Selectors of the core and consistency properties* // Game Theory and Applications. 1999. V. 4. P. 237–250.

# A METHOD FOR ESTIMATING THE CORE OF ROOT GAME

**Arina N. Akimova**, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, assistant (arina_akimova@mail.ru)
**Vicktor V. Zakharov**, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Dr.Sc., professor (mcvictor@mail.ru).

*Abstract*: It is showen that the base of grand (shadow) subcore coincides with the core of the root game in any TU-cooperative game. Comparing definitions of grand subcore and grand shadow subcore with description of aggregate-monotonic core leads to the formal geometrical coincidence of aggregate-monotonic core with either grand subcore or grand shadow subcore. The method for estimating the simplest set of equations and inequalities describing the core of a root game in TU-game with any number of players ($n \geq 3$) is proposed. To develop the method dual theory and inductive method by B. Peleg are used.

*Keywords*: TU-cooperative game, core, grand (shadow) subcore, root game, aggregate-monotonic core, linear programming, balanced collection of coalitions.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 27-46

УДК 519.86
ББК в.6.3.1.0

# ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ РЕЧНОЙ ВОДЫ

Ольга Ивановна Горбанева
Южный федеральный университет
344091, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 «а»
e-mail: gorbaneva@mail.ru

В статье описана и исследована задача распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды путем нахождения равновесия по Штакельбергу. Система состоит из двух центральных элементов, каждому из которых подчиняются все остальные элементы. Экономический центр распределяет ресурсы, а экологический центр следит за состоянием окружающей среды. Задачу можно разбить на две более простые подзадачи: задачу распределения ресурсов и задачу распределения качеством речной воды. Модель распределения ресурсов рассматривается в случаях отсутствия механизма коррупции, в случаях попустительства и вымогательства при распределении ресурсов и контроле над использованием ресурсов. Модель управления качеством речной воды учитывает различные случаи нарушения норм сброса загрязняющих веществ в речные воды.

*Ключевые слова*: древовидная иерархическая система, механизмы коррупции, теоретико-игровые модели.

## 1. Введение

Рыночная экономика требует высокого уровня использования ресурсов хозяйствующих субъектов. С другой стороны, действия субъектов рынка всегда связаны с риском и конфликтом интересов. Поэтому задачи оптимизации распределения ресурсов следует рассматривать с теоретико-игровых позиций. Основная часть объединений субъектов экономической деятельности представляет собой сложные многоуровневые образования, состоящие из следующих структурных составляющих: Центра, прерогативой которого является определение общих стратегических целей; объектов, организационно подчиненных Центру, имеющие свои собственные цели и довольно большую свободу в выборе своего будущего состояния; и объектов, не подчиняющихся Центру организационно, а связанных с ним неформально в процессе производственной, хозяйственной, финансовой и информационной деятельности (потребители продукции данного предприятия, сервисные организации и т.д.). Нормальной деятельности экономических систем препятствует коррупция [4]. Это сложное явление тесно связано с множеством экономических, политических, социально-психологических и других трудно формализуемых процессов, протекающих в обществе, и требует учета при моделировании.

В данной статье задача распределения ресурсов в иерархических системах управления решается нахождением равновесия по Штакельбергу [2] при наличии двух механизмов коррупции: связанных с величиной распределения ресурсов и с величиной контроля над использованием ресурсов, причем в качестве функций зависимости данных величин от взятки брались линейные. В каждом случае рассматривались как «жесткая», так и «мягкая» разновидности коррупции [4]. Задача рассматривалась при помощи аппарата кооперативных игр. В этом случае найдены доходы и кооперативные эффекты всех коалиций, вычислены векторы Шепли и пропорционального распределения [1].

**2. Задача распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов и ее математическая модель**

Рассматривается иерархически управляемая система (рис.1) включающая в себя следующие элементы:

- два источника воздействия верхнего уровня:
  - Экономический Центр;
  - Экологический Центр;
- N источников нижнего уровня – подразделения экономического Центра, которое мы назовем Подчиненными;
- управляемая система – водный объект.

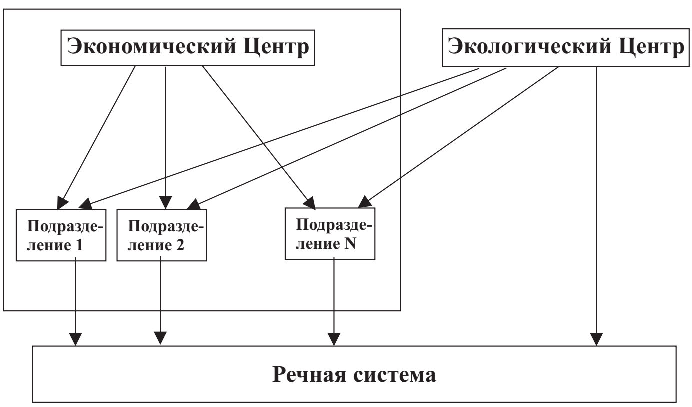


Рисунок 1. Иерархически управляемая система

Центры воздействуют на Подчиненных, а Подчиненные на Речную систему. Экономический Центр на речную систему не воздействует, а Экологический Центр может воздействовать только в том случае, если Подчиненные очистили сточные воды недостаточно для того, чтобы состояние системы осталось в допустимых пределах.
Рассмотрим каждый из этих элементов в отдельности:

1. <u>Экономический Центр.</u> Центру следует распределить ресурсы между Подчиненными таким образом, чтобы в процессе производства Подчиненных получить максимальную прибыль, т.е., чтоб была максимальной величина $\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i)$, где $g_i(u_i r_i)$ — выигрыш системы от деятельности $i$-го Подчиненного, $r_i$ – доля ресурса, выделяемая $i$-му Подчиненному Центром (от $R$), $u_i$ – доля выделенного ресурса, используемая $i$-м Подчиненным для решения общесистемных задач.

   Нужно учесть следующие факторы:

   (a) Центр может задать Подчиненному минимальную долю ресурсов $q_i$, меньше которой он не может потратить на цели всей системы
   $$0 \le q_i \le 1\,,$$
   т.е. $q_i$ – нижняя граница значений $u_i$, контролируемая Центром (от $r_i$);

   (b) Центр также может иметь свою частную несистемную цель, выражаемую производственной функцией $H(x)$, для достижения которой он направляет все ресурсы, которые остались у Центра после распределения Подчиненным – в количестве $\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\right)$. То есть, Центр также стремится максимизировать величину $H\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} r_i\right)$.

   (c) В случае, если Подчиненный предлагает Центру взятку $b_i$, то она может повлиять или на величину распределенных ему ресурсов $r_i = r_i(b_i)$ или на величину контроля над использованием ресурсов $q_i = q_i(b_i)$. Прибыль от получения взятки Центром также нужно учесть в целевой функции Центра.

Итак, целевая функция Центра состоит из трех слагаемых: доход от производства всех Подчиненных, доход от нецелевого использования ресурсов, доход от взятки.

Количество ресурсов, выделенных Центром Подчиненному, будем измерять в процентах или в доле от всех имеющихся у Центра ресурсов. Таким образом, задача Экономического Центра состоит в максимизации целевой функции (2.1) при ограничениях (2.2) – (2.4):

$$J_0 = H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\,(b_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} g_i\,(u_i r_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i\,(b_i) \to \max \quad (2.1)$$

$$0 \le q_i\,(b_i) \le 1 \quad (2.2)$$

$$0 \le r_i\,(b_i) \le 1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\,(b_i) \le 1 \quad (2.4)$$

От выбора Центра зависят следующие величины: величины распределения ресурсов Подчиненным $r_i$ и величины контроля над использованием ресурсов $q_i$.

2. Экологический Центр. Для обеспечения экологической обстановки объекта Экологический Центр назначает Подчиненному следующие виды штрафов:

   (a) штрафы за загрязнения $K_{ch}$, превышающие допустимые пределы, но не превышающие критические пределы,

   (b) штрафы за загрязнения $K_{ca}$, превышающие критические пределы.

   Существуют максимальные пределы штрафов $K_{chmax}$, $K_{camax}$, т.е.

$$0 \le K_{ch} \le K_{chmax}\,,$$
$$0 \le K_{ca} \le K_{camax}\,.$$

   В случае, если объем сброса загрязняющих веществ Подчиненного не превышает допустимый уровень, то Подчиненный штраф за превышение норм сбросов не платит.

   В случае, если объем сброса загрязняющих веществ Подчиненного после очистки превышает допустимый уровень $\widetilde{w_1}$, но не превышают критический уровень $\widetilde{w_2}$, Центр назначает Подчиненному штраф $K_{ch}$ за единицу сброса загрязняющих веществ сверх допустимой нормы $\widetilde{w_1}$, т.е. Подчиненный платит штраф за $(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1})$ единиц загрязняющих веществ, где $s_i$ – функция штрафа Подчиненного за загрязнение воды, назначаемая за пределами рассматриваемой экологической системы, например, государством; $w_i$ – объем сброса загрязняющих веществ до очистки Подчиненным; $p_i$ – уровень очистки Подчиненным сточных вод; $w_i(1-p_i)$ – объем сброса загрязняющих веществ после очистки Подчиненным.

Сточные воды, недостаточно очищенные Подчиненными, очищает сам Экологический Центр. Функция затрат Центра на очистку речных вод – $c_a(y)$, где $y$ – объем загрязняющих веществ всех Подчиненных после очистки, т.е.

$$y=\sum_{i=1}^{n} w_i\left(1-p_i\right) .$$

Итак, задача экологического Центра состоит в максимизации целевой функции

$$G_0=-c_a\left(y\right)+\sum_{j=1}^{n} K_{ch} s_i\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1}\right)\to\max_{K_{ch}} \tag{2.5}$$

при ограничении

$$0\leq K_{ch}\leq K_{chmax} .$$

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ Подчиненного после очистки превышает критический уровень $\widetilde{w_2}$, Центр назначает Подчиненному штраф $K_{ch}$ за единицу сброса загрязняющих веществ сверх допустимой нормы $\widetilde{w_1}$, и штраф $K_{ca}$ за единицу сброса загрязняющих веществ сверх критической нормы $\widetilde{w_2}$. То есть Подчиненный платит первый вид штрафа за $(\widetilde{w_2}-\widetilde{w_1})$ единиц загрязняющих веществ, а второй вид штрафа за $(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_2})$ единиц загрязняющих веществ.

Объем загрязняющих веществ после очистки Подчиненными в размере $(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1})$ очищается Экологическим Центром с функцией затрат $c_a(y)$.

Таким образом, в целевую функцию Центра входят средства, полученные в качестве штрафов Подчиненных, минус средства, потраченные на очистку воды:

$$G_0 = -c_a(y) + \sum_{j=1}^{n} K_{ch} s_i (\widetilde{w_2} - \widetilde{w_1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} K_{ca} s_i (w_i (1 - p_i) - \widetilde{w_2}) \to \max_{K_{ch}, K_{ca}} \qquad (2.6)$$

при ограничении

$$0 \leq \ K_{ch} \leq \ K_{chmax}\,, \qquad (2.7)$$

$$0 \leq \ K_{ca} \leq \ K_{camax}\,. \qquad (2.8)$$

3. Подчиненный. Подчиненный использует ресурсы, выделенные ему Центром, для производства в общесистемных целях, доход от которого выражается производственной функцией $g_i(x)$. Не исключено, что у Подчиненного кроме общесистемных экономических целей имеются и свои частные цели, доход от реализации которых выражается в виде производственной функции $h_i(x)$. Для получения как можно большего количества ресурсов Подчиненный может предложить Экономическому Центру взятку в размере определенной доли $b_i$ от того количества ресурсов $r_i$, которое ему выделит Центр. Из количества ресурсов $r_i$, полученных от Центра, часть средств в размере $u_i r_i$ Подчиненный тратит на общие цели, часть на взятку (в количестве $b_i r_i$), а оставшиеся – на свои частные цели (в размере $r_i - u_i r_i - b_i r_i = (1 - b_i - u_i) r_i$ ), откуда следует, что

$$b_i + u_i \leq 1\,. \qquad (2.9)$$

Подчиненный не может потратить на общие цели ресурсов меньше определенной доли $q_i$, указываемой Центром, т.е.

$$q_i(b_i) \leq u_i \leq 1\,. \qquad (2.10)$$

Так как взятка – доля от ресурсов, выделенных Центром Подчиненному, то

$$0 \leq b_i \leq 1\,. \qquad (2.11)$$

Но при производстве продукции Подчиненный загрязняет реку сточными водами, за что платит штраф, назначаемый государством в размере $s_i$ за единицу сброшенных веществ. Если объем сбросов сточных вод больше допустимого или критического уровней, Подчиненный либо выплачивает дополнительные штрафы, назначаемые Экологическим Центром за превышение лимитов сброса загрязняющих веществ, либо очищает свои сточные воды с выбранным им уровнем очистки $p_i$, измеряемом в доле или процентах от объема сброшенных веществ $w_i$, и функцией затрат $c_p(p_i)$. Уровень очистки $p_i$ может иметь следующие пределы:

$$0 \le p_i \le 1 - \varepsilon\,. \tag{2.12}$$

Полностью сточные воды очистить нельзя, можно приблизиться к 100% очистки только на определенный уровень $\varepsilon$, который определяется техническими средствами, применяемыми для очистки вод Подчиненным.

Если после очистки сточных вод количество загрязняющих веществ все-таки превышает допустимый или критический предел, то Подчиненный платит соответствующий штраф.

Таким образом, в целевую функцию Подчиненного входит доход от деятельности в общих и в своих частных целях за вычетом средств, выплачиваемых государству или Экологическому Центру в качестве штрафов и потраченных на очистку сточных вод.

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки меньше допустимого уровня, т.е. $0 \le w_i(1-p_i) \le \widetilde{w_1}$, целевая функция Подчиненного имеет вид

$$\begin{aligned} y_i^{(0)} = \quad & h_i\left(\left(1-b_i-u_i\right)r_i\right)+g_i\left(u_ir_i\right)- \\ & -w_iC_p\left(p_i\right)-s_iw_i\left(1-p_i\right)\to\max_{u_i,b_i,p_i} \end{aligned} \tag{2.13}$$

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше допустимого уровня, но меньше критического, т.е. $\widetilde{w_1} \le w_i(1-p_i) \le \widetilde{w_2}$, то целевая функция Подчиненного имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_i^{(1)} = \ & h_i\left(\left(1-b_i-u_i\right) r_i\right)+g_i\left(u_i r_i\right)-w_i C_p\left(p_i\right)- \\
& -s_i \widetilde{w_1}-K_{ch} s_i\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1}\right) \rightarrow \max _{u_i, b_i, p_i}
\end{aligned} \quad (2.14)
$$

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше критического уровня, т.е. $w_i\left(1-p_i\right) \geq \widetilde{w_2}$ , то целевая функция Подчиненного имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_i^{(2)} & = h_i\left(\left(1-b_i-u_i\right) r_i\right)+g_i\left(u_i r_i\right)-w_i C_p\left(p_i\right)-s_i \widetilde{w_1}- \\
& -K_{ch} s_i\left(\widetilde{w_2}-\widetilde{w_1}\right)-K_{ca} s_i\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_2}\right) \rightarrow \max _{u_i, b_i, p_i}
\end{aligned} \quad (2.15)
$$

То есть в задачу Подчиненного включается целевая функция (2.13), (2.14) или (2.15) при ограничениях (2.9)-(2.12).

От выбора Подчиненного зависят следующие величины: $u_i$ – доля выделенного ресурса, используемая $i$-м Подчиненным для решения общесистемных задач; $b_i$ – доля выделенного ресурса, возвращаемая $i$-м Подчиненным Центру в качестве взятки (от $r_i$) и $p_i$ – уровень очистки сброшенных в реку сточных вод.

4. Речная система является пассивным объектом, не имеет целевых функций и управляемых величин.

Итак, соотношения (2.1) – (2.15) составляют модель распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов, которая является иерархической игрой $(n+2)$-х лиц: Экономического Центра, Экологического Центра и $n$ Подчиненных.

Заметим, что два Центра: Экологический и Экономический – не зависят от действий друг друга, т.е. стратегии каждого из них никак не влияют ни на значение целевой функции, ни на ограничения другого.

Кроме того, в составе целевой функции Подчиненного можно выделить две части:

1. «экономическая составляющая», которую образуют первые 2 слагаемых $h_i\left(\left(1-b_i-u_i\right) r_i\right)+g_i\left(u_i r_i\right)$. Эта часть целевой функции зависят от стратегий Подчиненного $u_i$ и $b_i$, которые не влияют и не зависят от действий Экологического Центра, и от стратегий Экономического Центра $r_i$ и $q_i$. Кроме того, эта часть

целевой функции Подчиненного не зависит от действий Экологического Центра и, в свою очередь, никак не влияет на его действия.

2. «экологическая составляющая», которая состоит из остальных слагаемых функции (2.13), (2.14) или (2.15). Эта составляющая зависит только от стратегий Экологического Центра $K_{ch}$ и $K_{ca}$ и от стратегии Подчиненного $p_i$, которая не влияет на действия и целевую функцию Экономического Центра и не зависит от них.

Учитывая, что два Центра не влияют на деятельность друг друга, и целевая функция Подчиненного состоит из двух независящих друг от друга частей, модель распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов можно разбить на две модели: модель распределения ресурсов и модель управления качеством речной воды.

Модель распределения ресурсов в древовидной системе управления является игрой $(n+1)$ лиц: Экономического Центра и $n$ Подчиненных. Задача экономического Центра имеет вид (2.1)-(2.4).
Задача Подчиненного имеет вид:

$$J_i = h_i\left(\left(1-b_i-u_i\right)r_i\right) + g_i\left(u_i r_i\right) \to \max \tag{2.16}$$

при ограничениях (2.9)-(2.11).

Стратегиями Экономического Центра являются величины распределения ресурсов Подчиненным $r_i$ и величины контроля над использованием ресурсов $q_i$.

Модель управления качеством речной воды является игрой $(n+1)$ лиц: Экологического Центра и $n$ Подчиненных.

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки меньше допустимого уровня, т.е. $0 \le w_i\left(1-p_i\right) \le \widetilde{w_1}$, задача Подчиненного имеет вид (2.13), (2.12), а выигрыш Экологического Центра находится как

$$G_0 = -C_a\left(y\right) .$$

Здесь Экологический Центр не решает свою задачу оптимизации, так как его стратегиями являются назначение штрафов, до которых здесь дело не доходит, поскольку Подчиненный не нарушает пределы сбросов сточных вод в реку.

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше допустимого уровня, но меньше критического, т.е. $\widetilde{w_1} \leq w_i(1-p_i) \leq \widetilde{w_2}$, то задача Подчиненного имеет вид (2.14), (2.12), а задача Экологического Центра имеет вид (2.5), (2.7).

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше критического уровня, т.е. $w_i(1-p_i) \geq \widetilde{w_2}$, то задача Подчиненного имеет вид (2.15), (2.12), а задача Экологического Центра имеет вид (2.6)-(2.8).

Таким образом стратегиями Экологического Центра являются назначение штрафов $K_{ch}$ и $K_{ca}$, а стратегией Подчиненного — уровень очистки сточных вод $p_i$.

## 3. Математические модели распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов с использованием методов теории игр в нормальной форме

В данном разделе рассматривается двухуровневая древовидная модель управления качеством водных объектов [2-3], состоящая из одного Центра и $n$ подчиненных ему подразделений. Центр имеет некоторое количество ресурсов $R$, которое необходимо распределить между Подчиненными. Не исключено, что Центр оставляет часть ресурсов на собственные цели, и что Подчиненные, в свою очередь, могут распределить доставшееся им количество ресурсов как на общесистемные цели, так и на свои частные цели. Учтена возможность влияния Подчиненных на количество распределенных им ресурсов при помощи механизма коррупции. И Центр, и Подчиненные стремятся максимизировать свои целевые функции от использования ресурсов $J_0$ и $J_i$, $i=1,\ldots,n$, соответственно. Для простоты примем количество $R=1$.

В целевую функцию Центра включаются средства, полученные от использования ресурсов Подчиненными в общих целях, средства, полученные от использования оставшихся ресурсов в своих собственных интересах, и средства, полученные от Подчиненных в качестве взятки.

Целевая функция Подчиненного состоит из дохода от его деятельности, направленной на общесистемные цели, и от деятельности, направленной на свои частные цели [3].

Задачи (2.1)–(2.4), (2.16), (2.9)–(2.11) – иерархическая игра $(n{+}1)$-го лица в нормальной форме: Центра и $n$ Подчиненных. Центр имеет право первого хода. Стратегиями Центра являются распределение ресурсов $r_i$ и назначение контроля над использованием ресурсов $q_i$. Стратегиями Подчиненных являются следующие величины: доля ресурса $u_i$, выделенного Центром, используемая на общесистемные цели, и доля ресурсов $b_i$, возвращаемая Центру в качестве взятки.

Рассматриваются следующие механизмы коррупции [4]:

1. $r_i = r_i\left(b_i\right)$ – коррупция при выделении ресурсов;

2. $q_i = q_i\left(b_i\right)$ – коррупция при контроле выполнения общесистемных требований.

И $q$-коррупция, и $r$-коррупция рассматривается в двух случаях: в случаях мягкой коррупции (попустительство) и жесткой коррупции (вымогательства) (рис.2).

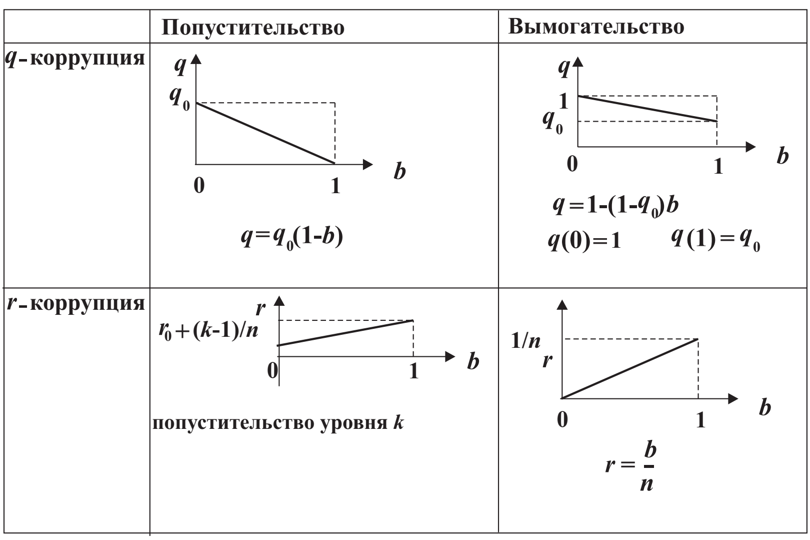


Рисунок 2. Виды коррупции

### 3.1. Распределение ресурсов при отсутствии коррупции ($r_i(b_i) \equiv r_{i0}$)

Теоретико-игровая модель выглядит следующим образом:
задача Центра

$$J_0 = H\left(1-\sum_{i=1}^{n} r_i\right)+\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \to \max \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} 0 &\le q_i \le 1 \\ 0 &\le r_i \le 1 \\ &\sum_{i=1}^{n} r_i \le 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

задача Подчиненного

$$J_i = g_i(u_i r_i) + h_i((1-b_i-u_i)r_i) \to \max \tag{3.3}$$

$$q_i \le u_i \le 1,\ i=1,\dots,n.$$

Равновесием игры по Штакельбергу (3.1)-(3.3) является следующий набор стратегий участников системы:
при $\beta = 1$, $u_i = 1$, $b_i = 0$, $q_i = 1$, $r_i = \begin{cases} 1, i = im, \\ 0, i \ne im, \end{cases}$
где $g_{im}(1) \ge g_i(1)$, $i = 0,\dots,n$, (т.е. в $im$ достигается $\max\limits_{i=0,\dots,n} g_i(1)$),
при $\beta \ne 1$, $u_i = 1$, $b_i = 0$, $q_i = 1$, $r_i^* = \dfrac{\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}+\sqrt[1-\beta]{H(x)}}$.

Содержательный смысл: Центр назначает величину контроля над использованием ресурсов – 100%, т.е. не менее 100%, полученных от Центра ресурсов Подчиненный должен потратить на общесистемные цели. В случае $\beta = 1$ (т.е. когда эластичность производства равна 1) Центру выгодно все ресурсы отдать тому Подчиненному, у которого производственная мощность больше. В том числе здесь (при $\beta = 1$) возможен случай, когда все ресурсы Центру выгоднее всего оставить себе, если его производственная мощность нецелевой деятельности больше производственных мощностей всех Подчиненных.

В случае попустительства при контроле над использованием ресурсов Центр может способствовать тому, чтобы все полученные от Центра ресурсы Подчиненный использовал на достижение общесистемных целей, поскольку возможности использования ресурсов для достижения личных целей у Подчиненного нет, а взятку платить Подчиненному невыгодно, т.к. на количество выданных ресурсов эта взятка не повлияет.

### 3.2. Распределение ресурсов при вымогательстве ($r_i\left(b_i\right)=\frac{b_i}{n}$)

Равновесием по Штакельбергу в игре:

$$
\begin{gathered}
J_0=H\left(1-\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{n}\right)+\sum_{i=1}^n g_i\left(\frac{u_i b_i}{n}\right)+\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{n^2} \rightarrow \max \\
0 \leq q_i \leq 1 \\
0 \leq \frac{b_i}{n} \leq 1 \\
\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{n} \leq 1 \\
J_i=g_i\left(\frac{u_i b_i}{n}\right)+h_i\left(\frac{\left(1-b_i-u_i\right) b_i}{n}\right) \rightarrow \max \\
q_i \leq u_i \leq 1, b_i+u_i \leq 1, i=1, \ldots, n .
\end{gathered}
$$

является следующий набор стратегий участников системы при $\beta \neq 1$ $r_i=\max \left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}}{2\left(\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}+\sqrt[1-\beta]{h_i(x)}\right)}, q_i\right\}$, где стратегия $q_i$ находится методом последовательных приближений с заданной точностью,

$$
b_i=\begin{cases}\frac{1}{2}, & u_i \neq q_i, \\ \text{находится методом дихотомии}, & u_i=q_i .\end{cases}
$$

Содержательный смысл: если Центр не препятствует Подчиненному в достижении наибольшего значения его целевой функции (т.е. принуждает Подчиненного использовать в общих целях количество ресурсов, не большее чем выгодно Подчиненному, то 50% ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки [3]

Доказано, что задачу Центра можно решить при помощи метода итераций, а задачу Подчиненного решается методом дихотомии.

В статье также исследован случай введения механизма коррупции (попустительства) $q_i\left(b_i\right)=q_{i0}\left(1-b_i\right)$ на величину контроля над использованием ресурсовы, и в этом случае равновесие по Штакельбергу в игре выглядит следующим образом:

$q_{i0} = 1, b_i = \frac{1}{2}$. Следовательно, $r_i = \frac{1}{2n}$.
Заметим, что:

1. Центр здесь не оставляет Подчиненным возможности использовать ресурсы на свои частные цели, т.к. все ресурсы, не пошедшие на общесистемные цели, Центр забирает себе в качестве взятки;

2. Ровно половину ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки.

### 3.3. Распределение ресурсов при попустительстве $\left(r_i\left(b_i\right) = r_{i0} + \frac{(k-1)b_i}{n}\right)$

Теоретико-игровая модель выглядит следующим образом:

$$J_0 = H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_{i0} - \frac{k-1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} g_i\left(u_i\left[r_{i0} + \frac{(k-1)\,b_i}{n}\right]\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(r_{i0} + \frac{(k-1)\,b_i}{n}\right) \to \max \quad (3.4)$$
$$0 \leq q_i \leq 1$$
$$0 \leq r_{i0} + \frac{(k-1)\,b_i}{n} \leq 1 \quad (3.5)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i0} + \frac{(k-1)\,b_i}{n}\right) \leq 1 \quad (3.6)$$

– задача Центра,

$$J_i = g_i\left(u_i\left[r_{i0} + \frac{(k-1)\,b_i}{n}\right]\right) +$$
$$h_i\left(\left(1 - b_i - u_i\right)\left[r_{i0} + \frac{(k-1)\,b_i}{n}\right]\right) \to \max \quad (3.7)$$
$$q_i \leq u_i \leq 1, b_i + u_i \leq 1, i = 1, \ldots, n$$

– задача Подчиненного.

Оптимальной стратегией Подчиненного в игре (3.4)-(3.7), соответствующей заданной стратегии Центра $\left(q_i, r_{i0}\right), i = 1, \ldots, n$ является

$$u_i = \max\left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{g_i\left(x\right)}}{2\left(\sqrt[1-\beta]{g_i\left(x\right)} + \sqrt[1-\beta]{h_i\left(x\right)}\right)}\left(1 + \frac{nr_{i0}}{k-1}\right), q_i\right\}$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{nr_{i0}}{2(k-1)}, & u_i \neq q_i, \\ \text{находится методом дихотомии}, & u_i = q_i. \end{cases}$$

Таким образом, если Центр не препятствует Подчиненному в достижении наибольшего значения его целевой функции (т.е. принуждает Подчиненного использовать в общих целях количество ресурсов, не большее чем выгодно Подчиненному), то менее 50% ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки, что меньше, чем в случае вымогательства при распределении ресурсов [3].

В работе также исследован случай введения механизма коррупции (попустительства) $q_i\left(b_i\right) = q_{i0}\left(1 - b_i\right)$ на величину контроля над использованием ресурсов, и в том случае равновесие по Штакельбергу выглядит следующим образом:
$q_{i0} = 1, b_i = \frac{1}{2} - \frac{nr_{i0}}{2(k-1)}$. Следовательно, $r_i = \frac{nr_{i0}+k-1}{2n}$.

Заметим, что:

1. Центр здесь не оставляет Подчиненным возможности использовать ресурсы на свои частные цели, т.к. все ресурсы, не пошедшие на общесистемные цели, Центр забирает себе в качестве взятки;

2. Менее половины ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки.

## 4. Математические модели распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов с использованием теории кооперативных игр

В статье найдены величины выигрышей всех возможных коалиций, их кооперативные эффекты, и оптимальные дележи в виде вектора Шепли и вектора пропорционального распределения [1] в игровой модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством водных объектов.

Значения выигрышей всех возможных коалиций в игре (2.1)-(2.4), (2.13), (2.9)-(2.11) в случае $\beta \neq 1$.

$$v\left(0\right) = J_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + H\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta},$$

$$v(i) = J_i = \frac{g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}}, i = 1, \ldots, n,$$

$$v(L) = \frac{\sum\limits_{i\in L} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}},$$

$$v\left(\{0\}\bigcup\{i\}\right) = \left(\sum_{j\neq i} \sqrt[1-\beta]{g_j(1)} + \sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{H}\right)^{1-\beta},$$

$$v\left(\{0\}\bigcup L\right) = \left(\sum_{i\notin L} \sqrt[1-\beta]{g_i(1)} + \sum_{i\in L}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \sqrt[1-\beta]{H}\right)^{1-\beta},$$

$$v(N) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \sqrt[1-\beta]{H}\right)^{1-\beta},$$

Здесь Центр в качестве производственных мощностей входящих с ним в одну коалицию Подчиненных принимает удвоенные величины плюс фактическую величину мощности при нецелевом использовании ресурсов, за счет чего повышает долю ресурсов, выделенных данным Подчиненным.

Вектор Шепли для всех участников системы имеет вид [2-3]:

$$\Phi_0 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta} -$$

$$- \frac{n-1}{2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[1-\beta]{h_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \gamma(s) \sum_{\forall K,|K|=s-1} \left(\sum_{i\ni K} \sqrt[1-\beta]{g_i(1)} + \sum_{i\in K}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta}$$

$$\Phi_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{i\in M} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + H\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}} +$$

$$+\sum_{s=2}^{n}\gamma\left(s\right)\sum_{\forall K,|K|=s-1,l\in K}\left[\left(\sum_{i\notin K}\sqrt[1-\beta]{g_i\left(1\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i\in K}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i\left(1\right)}+\sqrt[1-\beta]{h_i\left(1\right)}+\sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)\right)^{1-\beta}-\right.$$

$$-\sum_{s=2}^{n}\gamma\left(s\right)\sum_{\forall K,|K|=s-1}\left(\sum_{i\ni K-\{l\}}\sqrt[1-\beta]{g_i\left(1\right)}+\sum_{i\in K-\{l\}}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i\left(1\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt[1-\beta]{h_i\left(1\right)}\sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta}\right)\right]$$

$$l = 1, \ldots, n.$$

Здесь Центр в качестве производственных мощностей входящих с ним в одну коалицию Подчиненных принимает удвоенные величины плюс фактическую величину мощности при нецелевом использовании ресурсов, за счет чего повышает долю ресурсов, выделенных данным Подчиненным [2-3].

Вектор пропорционального распределения [1] для всех участников имеет вид:

$$x_0 = \left(\sum_{i\in N}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i\left(1\right)}+\sqrt[1-\beta]{h_i\left(1\right)}\right)+\sqrt[1-\beta]{H\left(1\right)}\right)^{1-\beta}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + H\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + H\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}}$$

$$x_l = \left(\sum_{i\in N}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i\left(1\right)}+\sqrt[1-\beta]{h_i\left(1\right)}\right)+\sqrt[1-\beta]{H\left(1\right)}\right)^{1-\beta}\cdot$$

$$\cdot\frac{g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + H\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}}.$$

Итак, больше половины выигрыша коалиции Центр забирает себе.

## 5. Модель управления качеством речной воды в эколого-экономической системе

Решением задачи (2.13), (2.12) является следующая стратегия Подчиненного

$$p_i = \begin{cases} \max\{1-\frac{\widetilde{w_1}}{w_i}, 0\}, & s_i < \frac{D}{(1-v)}\cdot\max^2\{\frac{\widetilde{w_1}}{w_i}, 1\}, \\ 1-\sqrt{\frac{D}{(1-v)s_i}}, & \frac{D}{(1-v)}\cdot\max^2\{\frac{\widetilde{w_1}}{w_i}, 1\} \le s_i \le \frac{D}{(1-v)\varepsilon^2}, \\ 1-\varepsilon, & s_i > \frac{D}{(1-v)\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия Подчиненного в задаче (2.5), (2.7), (2.14), (2.12)

$$p_i = \begin{cases} \max\{1-\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, 0\}, & K_{ch} < \frac{D}{s_i}\cdot\max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, 1\}, \\ 1-\sqrt{\frac{D}{K_{ch}s_i}}, & \frac{D}{s_i}\cdot\max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, 1\} \le K_{ch} \le \frac{D}{s_i\varepsilon^2}, \\ 1-\varepsilon, & K_{ch} > \frac{D}{s_i\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Оптимальные стратегии участников в задаче (2.6) - (2.8), (2.15), (2.12)

$$p_i = \begin{cases} 0, & K_{ca} < \frac{D}{s_i}, \\ 1-\sqrt{\frac{D}{K_{ca}s_i}}, & \frac{D}{s_i} \le K_{ca} \le \frac{D}{s_i\max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, \varepsilon\}}, \\ 1-\varepsilon, & K_{ca} > \frac{D}{s_i\max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, \varepsilon\}}. \end{cases}$$

## 6. Заключение

В работе рассмотрена игровая модель распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством водных ресурсов. Данная модель распадается на две частные модели взаимодействия субъектов эколого-экономической системы, включающей Экономический Центр, Экологический Центр и Подчиненных. В первой модели изучено распределение ресурсов Экономическим Центром между Подчиненными с учетом возможности нецелевого использования и коррупции. Исследован новый случай введения коррупции: коррупция при контроле над использованием ресурсов. Найдены выигрыши всех возможных коалиций между всеми участниками системы. Во второй модели исследована возможность обеспечения экологических требований путем экономического воздействия Экологическим Центром на Подчиненного.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агиева М.Т., Мальсагов Г.А., Угольницкий Г.А. *Моделирование иерархической структуры управления образованием*, Издательство ООО “ЦВВР”. Ростов-на-Дону. 2003.

2. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее приложения* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1. 2007. С. 24–29.

3. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.*Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН. № 26. 2009. С. 64–80.

4. Рыбасов Е.А., Угольницкий Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции* // Компьютерное моделирование. Экология. Вып. 2., Москва: Вузовская книга, 2004.

# RESOURCE ALLOCATION GAME-MODELS IN THE HIERARCHICAL SYSTEMS OF RIVER WATER QUALITY CONTROL

**Olga I. Gorbaneva**, Southern Federal University, Cand.Sc. (gorbaneva@mail.ru).

*Abstract*: The resource allocation problem in the hierarchical systems of river water quality control described and investigated by Stackelberg equilibrium finding. The problem may be divided into two subproblems: the resource allocation problem in hierarchical systems and the river water quality control problem. Three cases of allocation resource model are considered: no corruption mechanism, connivance and racket under resource allocation and the resource using controlling.

*Keywords*: tree-type hierarchical system, corruption mechanisms, game-theoretic models.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 47-66

УДК 519.83

ББК 22.18

# ОПТИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОАЛИЦИОННЫХ ИГР

Ксения Владимировна Григорьева
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр. 35
e-mail: kseniya196247@mail.ru

В работе рассмотрен один из классов многошаговых стохастических игр с различными коалиционными разбиениями. Исследуемая здесь игра задается на древовидном графе, где в каждой вершине z определяется коалиционное разбиение игроков, функция выигрыша коалиций и вероятности перехода в следующие вершины в зависимости от ситуации, реализовавшейся в игре, заданной в вершине z. Предложен новый математический метод решения стохастических коалиционных игр на основе вычисления обобщенного PMS-вектора как решения коалиционных игр. Предложенный метод иллюстрируется на примере трехшаговой стохастической игры трех лиц с переменной коалиционной структурой.

*Ключевые слова*: оптимизация, многошаговые игры, стохастические игры, равновесие по Нэшу, PMS-вектор.

## 1. Введение

В работе рассмотрен один из классов многошаговых стохастических игр с различными коалиционными разбиениями, предложен новый математический метод решения стохастических коалиционных игр на основе вычисления обобщенного PMS-вектора, введенного впервые в [4, 6] как решения коалиционных игр. Предложенный метод иллюстрируется на примере двухшаговой стохастической игры трех лиц с переменной коалиционной структурой.

Напомним, что *коалиционной игрой* является игра, в которой принимающие решение игроки объединены в фиксированные коалиции с целью получения максимально возможного выигрыша, а *стохастической игрой* является многошаговая игра со случайными переходами из состояния в состояние, разыгрываемая одним и более игроками.

## 2. Постановка задачи

Пусть задан конечный древовидный граф $\Gamma = (Z,\ L)$, где $Z$ – множество вершин графа, а $L$ – точечно-множественное отображение, заданное на множестве $Z$: $L\,(z) \subset Z,\ z \in Z$. Конечный древовидный граф с начальной вершиной $z_0$ будем обозначать через $\Gamma\,(z_0)$.

В каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma\ (z_0)$ задана *игра в нормальной форме*

$$G\,(z) = \langle N, X_1, \ldots, X_n,\ K_1, \ldots, K_n \rangle\,,$$

где

- $N = \{1,\ \ldots,\ n\}$ – множество игроков, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- $X_j = \left\{ x_j^z \middle|\ x_j^z = k\,,\ k = \overline{1\,,\,m_j} \right\}$ – множество чистых стратегий игрока $j \in N$, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
  - $m_j$ – число чистых стратегий игрока $j \in N$ в множестве $X_j$;
  - $x_j^z$ – чистая стратегия игрока $j \in N$ в вершине $z \in Z$;
  - $\mu_j^z = \left\{ \mu_k^j \right\}_{k=\overline{1,m_j}} \in \Sigma_j$ – смешанная стратегия игрока $j \in N$ в вершине $z \in Z$, где $\mu_k^j$ – вероятность выбора $j$-м игроком $k$-й чистой стратегии: $\mu_k^j \geq 0\,,\ \ j = \overline{1\,,\,n}\,,\ \ k = \overline{1\,,\,m_j}\ ,\ \ \sum\limits_{k=1}^{m_j} \mu_k^j = 1;$

- $\Sigma_j$ – множество всех смешанных стратегий $j$-го игрока;
- набор чистых стратегий $x^z = (x_1^z, \ldots, x_n^z) \in X$, $x_j^z \in X_j$, $j = \overline{1,\, n}$, называется *ситуацией игры* $G\,(z)$ в вершине $z \in Z$;
- $X = \prod\limits_{i=\overline{1,\, n}} X_i$ – множество ситуаций, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- набор смешанных стратегий $\mu^z = (\mu_1^z, \ldots, \mu_n^z) \in \Sigma$, $\mu_j^z \in \Sigma_j$, $j = \overline{1,\, n}$, называется *ситуацией игры* $G\,(z)$ *в смешанных стратегиях* в вершине $z \in Z$;
- $\Sigma = \prod\limits_{j=\overline{1,\, n}} \Sigma_j$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;

- $K_j\,(x^z)$ , $x^z \in X$, – функция выигрыша $j$-го игрока, одна и та же для всех вершин $z \in Z$; предполагается, что $K_j\,(x^z) \geq 0$ $\forall\, x^z \in X$ и $\forall\, j \in N$.

Далее, пусть в каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma\ (z_0)$ задано коалиционное разбиение множества $N$

$$\Sigma_z = \{S_1,\, \ldots,\, S_l\}\ ,\ l \leq n\,,\ S_i \cap S_j = \emptyset\,,\ \forall\ i \neq j\,,\ \bigcup_{i=1}^{l} S_i = N\,,$$

т.е. множество игроков $N$ разделено на $l$ коалиций, каждая из которых действует как один игрок. Коалиционные разбиения, вообще говоря, различны для разных вершин $z$.

Тогда в каждой вершине $z \in Z$ мы имеем *одновременную коалиционную игру* $l$ *лиц в нормальной форме ассоциированную с игрой* $G\,(z)$

$$G\,(z\,,\ \Sigma_z) = \left\langle N, \tilde{X}_{S_1}^z, \ldots, \tilde{X}_{S_l}^z,\ H_{S_1}^z, \ldots, H_{S_l}^z \right\rangle,$$

где

- $\tilde{X}_{S_i}^z = \prod\limits_{j \in S_i} X_j$ – множество стратегий $\tilde{x}_{S_i}^z$ коалиции $S_i, i = \overline{1,\, l}$, где *стратегия* $\tilde{x}_{S_i}^z \in \tilde{X}_{S_i}^z$ *коалиции* $S_i$ – это набор стратегий игроков из коалиции $S_i$, т.е. $\tilde{x}_{S_i}^z = \left\{\, x_j^z \in X_j \middle|\ j \in S_i \right\}$;

- набор стратегий $\tilde{x}^z = \left(\tilde{x}^z_{S_1}, \ldots, \tilde{x}^z_{S_l}\right) \in \tilde{X}^z$, $\tilde{x}^z_{S_i} \in \tilde{X}^z_{S_i}$, $i = \overline{1,\, l}$, называется *ситуацией в игре* $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$;
- $\tilde{X}^z = \prod\limits_{i=\overline{1,\,l}} \tilde{X}^z_{S_i}$ – множество ситуаций в одновременной игре $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$;
- $\tilde{\mu}^z_i$ – смешанная стратегия коалиции $S_i\,,\ i = \overline{1,\, l}$, в вершине $z \in Z$;
- $\tilde{\Sigma}^z_i$ – множество смешанных стратегий коалиции $S_i\,,\ i = \overline{1,\, l}$, в вершине $z \in Z$;
- набор смешанных стратегий $\tilde{\mu}^z = (\tilde{\mu}^z_1, \ldots, \tilde{\mu}^z_l) \in \tilde{\Sigma}^z\,,\ \tilde{\mu}^z_i \in \tilde{\Sigma}^z_i$, $i = \overline{1,\, l}$, называется *ситуацией игры* $G\,(z)$ *в смешанных стратегиях* в вершине $z \in Z$;
- $\tilde{\Sigma}^z = \prod\limits_{i=\overline{1,\,l}} \tilde{\Sigma}^z_i$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях в вершине $z \in Z$;

- функция выигрыша коалиции $S_i$ определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции $S_i$, т.е.

$$H^z_{S_i}\,(\tilde{x}^z) = \sum_{j \in S_i} K_j\,(x)\ ,\ \ i = \overline{1,\, l}\,,$$

  где $x^z = (x^z_1, \ldots, x^z_n)$ и $\tilde{x}^z = \left(\tilde{x}^z_{S_1},\ \ldots\ ,\ \tilde{x}^z_{S_l}\right)$ – одна и та же ситуация в играх $G\,(z)$ и $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$ , такая, что для каждой компоненты $x^z_j,\ \ j = \overline{1,\, n}$, из ситуации $x^z$ следует, что эта же компонента $x^z$, $j \in S_i$, входит в состав стратегии $\tilde{x}^z_{S_i}$ из ситуации $\tilde{x}^z$.

Примем единое обозначение $x^z$ для ситуации в играх $G\,(z)$ и $G\,(z, \Sigma_z)$. Из этого однако не следует, что $\mu^z = \tilde{\mu}^z$.

Далее, для каждой вершины $z \in Z$ графа $\Gamma\ (z_0)$ определены вероятности перехода $p\,(z,\ y\,;\ x^z)$ в следующие вершины $y \in L\,(z)$ графа $\Gamma\ (z_0)$, которые зависят от ситуации $x^z$, реализовавшейся в игре $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$ с фиксированным в ней коалиционным разбиением:

$$p\,(z,\ y\,;\ x^z) \geq 0\,,$$
$$\sum_{y \in L(z)} p\,(z,\ y\,;\ x^z) = 1\,.$$

**Определение 2.1.** *Конечношаговой коалиционной стохастической игрой* $\tilde{\Gamma}(z_0)$ *будем называть игру на конечном древовидном графе* $\Gamma(z_0)$ *с начальной вершиной* $z_0$*:*

$$\tilde{\Gamma}(z_0) = \left\langle N, \Gamma(z_0), \{G(z, \Sigma_z)\}_{z \in Z}, \{p(z, y; x^z)\}_{z \in Z, y \in L(z), x^z \in X^Z}, k_{\tilde{\Gamma}} \right\rangle,$$

*где*

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *– множество игроков, одинаковое для всех вершин* $z \in Z$*;*
- $\Gamma(z_0)$ *– древовидный граф с начальной вершиной* $z_0$*;*
- $\{G(z, \Sigma_z)\}_{z \in Z}$ *– одновременные коалиционные игры* $l$ *лиц в нормальной форме, заданные в каждой вершине* $z \in Z$ *графа* $\Gamma(z_0)$*;*
- $\{p(z, y; x^z)\}_{z \in Z, y \in L(z), x^z \in X^Z}$ *– вероятности реализации коалиционной игры* $G(y, \Sigma_y)$ *в вершине* $y \in L(z)$ *при условии, что на предыдущем шаге в одновременной игре* $G(z, \Sigma_z)$ *реализовалась ситуация* $x^z$*;*
- $k_{\tilde{\Gamma}}$ *– число шагов в стохастической игре* $\tilde{\Gamma}(z_0)$*, конечное и фиксированное; шаг* $k$ *в вершине* $z_k \in Z$ *определяется из условия* $z_k \in (L(z_0))^k$*, т.е. вершина* $z_k$ *достигается из вершины* $z_0$ *за* $k$ *шагов.*

Состояниями в данной позиционной стохастической игре $\tilde{\Gamma}$ являются вершины графа $z \in Z$ с заданными в них коалиционными разбиениями $\Sigma_z$, т.е. пара вида $(z, \Sigma_z)$. Игра $\tilde{\Gamma}$ является стохастической, так как переход из состояния $(z, \Sigma_z)$ в состояние $(y, \Sigma_y)$, $y \in L(z)$, определяется заданной вероятностью перехода $p(z, y; x^z)$.

Игра происходит следующим образом. Игра $\tilde{\Gamma}(z_0)$ начинается в вершине $z_0$, где реализуется игра $G(z_0, \Sigma_{z_0})$ с некоторым коалиционным разбиением $\Sigma_{z_0}$. Игроки выбирают свои стратегии, образуется ситуация игры $x^{z_0}$. Затем с заданными вероятностями $p(z_0, z_1; x^{z_0})$ в зависимости от ситуации $x^{z_0}$ осуществляется переход из вершины $z_0$ на древовидном графе $\Gamma(z_0)$ в игры $G(z_1, \Sigma_{z_1})$, $z_1 \in L(z_0)$. В игре $G(z_1, \Sigma_{z_1})$ игроки снова выбирают свои стратегии, образуется ситуация игры $x^{z_1}$. Затем из вершины $z_1 \in L(z_0)$ делается переход на графе в вершину $z_2 \in (L(z_0))^2$, снова образуется ситуация игры $x^{z_2}$, и так до тех пор, пока не будут достигнуты вершины $z_{k_{\tilde{\Gamma}}} \in (L(z_0))^{k_{\tilde{\Gamma}}}$, $L\left(z_{k_{\tilde{\Gamma}}}\right) = \emptyset$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}(z)$ подыгру игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$, берущую начало в вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$, т.е. с коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$. Подыгра $\tilde{\Gamma}(z)$ очевидно также является стохастической игрой.

Введем обозначения:

- $u_j^z(\cdot)$ – стратегия игрока $j$, $j = \overline{1, n}$, в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, которая каждой вершине $y \in Z$ ставит в соответствие стратегию $x_j^y$ игрока $j$ в одновременной игре $G(y, \Sigma_y)$ при $y \in \Gamma(z)$, т.е.

$$u_j^z(y) = \left\{ x_j^y \,\middle|\, y \in \Gamma(z) \right\};$$

- $u_{S_i}^z(\cdot)$ – стратегия коалиции $S_i$ в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, которая есть набор стратегий $u_j^z(\cdot)$ , $j \in S_i$;
- $u^z(\cdot) = (u_1^z(\cdot), \ldots, u_n^z(\cdot)) = \left(u_{S_1}^z(\cdot), \ldots, u_{S_n}^z(\cdot)\right)$ – ситуация в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$.

Нетрудно показать, что выигрыш $E_j^z(u^z(\cdot))$ игрока $j$, $j = \overline{1, n}$, в любой подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ определяется как математическое ожидание выигрыша игрока $j$ по следующей формуле ([2], с. 158):

$$E_j^z(u^z(\cdot)) = K_j(x^z) + \sum_{y \in L(z)} \left[p(z, y; x^z)\, E_j^y(u^y(\cdot))\right]. \qquad (2.1)$$

Выигрыш $H_{S_i}^z(x^z)$ коалиции $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, в каждой коалиционной игре $G(z, \Sigma_z)$ игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ в вершине $z \in Z$ в каждой ситуации $x^z$ определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции $S_i$:

$$H_{S_i}^z(x^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x^z). \qquad (2.2)$$

Выигрыш коалиции $H_{S_i}^z\left(u^z\left(\cdot\right)\right),\ S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$, в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ игры $\tilde{\Gamma}\left(z_0\right)$ в вершине $z\in Z$ определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции $S_i$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ в вершине $z\in Z$:

$$H_{S_i}^z\left(u^z\left(\cdot\right)\right)=\sum_{j\in S_i}E_j^z\left(u^z\left(\cdot\right)\right)=$$

$$=\sum_{j\in S_i}\left\{K_j\left(x^z\right)+\sum_{y\in L(z)}\left[p\left(z,\,y\,;\,x^z\right)\,E_j^y\left(u^y\left(\cdot\right)\right)\right]\right\}. \qquad (2.3)$$

Очевидно, что в любой вершине $z\in Z$ при коалиционном разбиении $\Sigma_z$ игра $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами $E_j^z$ игроков $j=\overline{1,\,n}$, определенными формулой (2.1), является бескоалиционной игрой между коалициями $S_i\in\Sigma_z$ с выигрышами коалиций $H_{S_i}^z\left(u^z\left(\cdot\right)\right)$, определенными формулой (2.3). Для конечных бескоалиционных игр существование ситуации равновесия в смешанных стратегиях доказано [3, с. 137].

Напомним, что ситуацией равновесия по Нэшу (Nash Equilibrium, NE) называется ситуация $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$:

$$H_{S_i}^z\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)\geq H_{S_i}^z\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\ ||\ u_{S_i}^z\left(\cdot\right)\right)\quad\forall\ u_{S_i}^z\left(\cdot\right)\in U_{S_i}^z,\ \ \forall\ S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}\,,$$

где $U_{S_i}^z$ – множество стратегий $u_{S_i}^z\left(\cdot\right)$ коалиции $S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$, а запись $\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\ ||\ u_{S_i}^z\left(\cdot\right)\right)$ означает, что коалиция $S_i$ отклоняется от ситуации $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$, выбирая стратегию $u_{S_i}^z\left(\cdot\right)$ вместо стратегии $\bar{u}_{S_i}^z\left(\cdot\right)\in\bar{u}^z\left(\cdot\right)$.

Поскольку выигрыши игроков $j,\ j=\overline{1,\,n}$, не выделены из коалиционного выигрыша в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$, то на следующем шаге в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(y\right),\ y\in L\left(z\right)$, при другом коалиционном разбиении в вершине $y$, выбор игрока $j$ может оказаться нетривиальным и отличным от соответствующего выбора, входящего в равновесную стратегию $\bar{u}_j^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$.

Таким образом, решить коалиционную стохастическую подыгру $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ означает *построить* ситуацию равновесия $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с учетом наличия коалиционных структур в подыграх, включенных в подыгру $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$, в частности, путем вычисления PMS-вектора выигрышей игроков во всех подыграх, включенных в подыгру $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$.

Поставим следующую задачу: построить решение коалиционной стохастической игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$, построив ситуацию равновесия $\bar{u}^z(\cdot)$ в игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$, используя в качестве оптимального решения коалиционных игр обобщенный PMS-вектор, см. [4].

## 3. Построение решения в многошаговой стохастической игре

Предложим способ построения решения многошаговой стохастической игры $\tilde{\Gamma}(z)$ своего рода методом обратной индукции, т.е. двигаясь от окончательной позиции к начальной аналогично схеме построения абсолютного равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией [2, 3]. В качестве оптимального решения коалиционных игр будем использовать обобщенный PMS-вектор ([4, 6]).

Напомним алгоритм построения обобщенного PMS-вектора в коалиционной игре. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$ значения выигрыша $H^z_{S_i}(x^z)$ по формуле (2.2):

$$H^z_{S_i}(x^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x^z) \; .$$

Предполагая рациональность в поведении игроков, в игре $G(z, \Sigma_z)$ найдем ситуацию NE $\bar{x}^z = \left(\bar{x}^z_{S_1}, \ldots, \bar{x}^z_{S_l}\right)$ или $\bar{\mu}^z = \left(\bar{\mu}^z_{S_1}, \ldots, \bar{\mu}^z_{S_l}\right)$. Ситуаций NE в игре может быть много [5], тогда решение коалиционной игры определяется неоднозначно.

Отметим, что в случае $l = 1$ задача поиска ситуации равновесия является задачей максимизации суммарного выигрыша игроков из коалиции $S_1$, в случае $l = 2$ – задачей поиска ситуации равновесия в биматричной игре, во всех остальных случаях – задачей поиска ситуации равновесия в бескоалиционной игре.

Выигрыш каждой коалиции в ситуации равновесия $H^z_{S_i}(\bar{\mu}^z)$ разделим в соответствии с вектором Шепли [7] $Sh(S_i) = (Sh(S_i : 1), \ldots, Sh(S_i : s))$:

$$Sh(S_i : j) = \sum_{\substack{S' \subset S_i \\ S' \ni j}} \frac{(s'-1)\,!\,(s-s')\,!}{s\,!} \left[v(S') - v(S' \setminus \{j\})\right] \quad \forall\; j = \overline{1, s}\,,$$

где $s = |S_i|$ $(s' = |S'|)$ – количество элементов множеств $S_i$ $(S')$, а $v(S')$ – максимальный гарантированный выигрыш коалиции $S' \subset S_i$ ([2], с. 51). При этом

$$v(S_i) = \sum_{j=1}^{s} Sh(S_i : j).$$

Тогда PMS-вектор в ситуации NE в смешанных стратегиях в игре $G(z\,,\ \Sigma_z)$ определяется как

$$\mathrm{PMS}(\bar{\mu}^z) = (\mathrm{PMS}_1(\bar{\mu}^z), \ldots, \mathrm{PMS}_n(\bar{\mu}^z))\ ,$$

где

$$\mathrm{PMS}_j(\bar{\mu}^z) = Sh(S_i : j), j \in S_i,\ i = \overline{1, l}.$$

Более подробно об этом см. [4].

*Замечание* 3.1. Найти ситуацию NE – отдельная сложная задача, тогда вычисление PMS-вектора, соответственно, технически затруднено. В этом случае в качестве решения коалиционной игры можно предложить использовать любое другое «оптимальное» решение, например, оптимальность по Парето или арбитражную схему Нэша [1].

Перейдем непосредственно к построению решения в игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$.

**Шаг 1.** Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z,\ i = \overline{1,\, l}$, каждой коалиционной игры $G(z\,,\ \Sigma_z)$, $L(z) = \emptyset$, PMS-вектор в ситуации NE в смешанных стратегиях:

$$\mathrm{PMS}(z) = (\mathrm{PMS}_1(z), \ldots, \mathrm{PMS}_n(z))\ ,$$

где $\mathrm{PMS}(z) := \mathrm{PMS}(\bar{\mu}^z)$ и $\mathrm{PMS}_j(z) := \mathrm{PMS}_j(\bar{\mu}^z)$ – PMS-вектор и PMS-компоненты соответственно в одношаговой коалиционной игре $G(z\,,\ \Sigma_z)$, $L(z) = \emptyset$.

**Шаг 2.** Пусть игроки действуют не только на последнем шаге игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ оптимально, а на протяжении всей игры. Тогда рассмотрим с конца игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ все двухшаговые подыгры $\tilde{\Gamma}(z)$ , $y \in L(z)$ , $L(y) = \emptyset$ , с выигрышами коалиций

$$H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right) = \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j\left(x^z\right) + \sum_{y \in L(z)} \left[ p\left(z,\, y\,;\, x^z\right)\, \mathrm{PMS}_j\left(y\right) \right] \right\} \qquad (3.1)$$

$\forall\ S_i \in \Sigma_z,\ i = \overline{1,\, l}$ . Найдем ситуацию NE $\bar{x}^z$ или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами, определенными формулой (3.1). Заметим, что полученная здесь ситуация $\bar{x}^z$ в общем случае не является NE в одновременной игре $G\left(z\,,\ \Sigma_z\right)$. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z,\ i = \overline{1,\, l}$, PMS-вектор в ситуации NE $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$:

$$\overline{\mathrm{PMS}}\left(z\right) = \left(\overline{\mathrm{PMS}}_1\left(z\right), \ldots, \overline{\mathrm{PMS}}_n\left(z\right)\right)\ ,$$

где $\overline{\mathrm{PMS}}\left(z\right) := \overline{\mathrm{PMS}}\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)$ и $\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z\right) := \overline{\mathrm{PMS}}_j\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)$ – PMS-вектор и PMS-компоненты соответственно.

**Шаг $k$.** Рассмотрим теперь с конца все $k$-шаговые подыгры $\tilde{\Gamma}(z)$, $y \in [L(z)]^{k-1}\,,\ L(y) = \emptyset$. Пусть уже построено NE $\bar{u}^{z'}(\cdot)$ и найден PMS-вектор $\overline{\mathrm{PMS}}(z')$ во всех $(k-1)$-шаговых подыграх $\tilde{\Gamma}(z')\,,\ z' \in L(z)$. Вычислим выигрыши коалиций

$$H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right) = \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j\left(x^z\right) + \sum_{z' \in L(z)} \left[ p\left(z,\, z'\,;\, x^z\right)\, \overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z'\right) \right] \right\} \qquad (3.2)$$

$\forall\ S_i \in \Sigma_z,\ i = \overline{1,\, l}$ . Найдем ситуацию NE $\bar{x}^z$ или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами, определенными формулой (3.2).

Введем *оператор* PMS$\oplus$, который каждому коалиционному разбиению $\Sigma_z$ и набору выигрышей $H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right)$ коалиций из этого разбиения ставит в соответствие компоненты PMS-вектора соответствующей коалиционной игры $G\left(z,\ \Sigma_z\right)$:

$$\overline{\mathrm{PMS}}_j(z) = \mathrm{PMS} \oplus \sum_{j \in S_i} \left\{ K_j\left(x^z\right) + \sum_{z' \in L(z)} \left[ p\left(z,\, z'\,;\, x^z\right)\ \overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z'\right) \right] \right\} \quad (3.3)$$

где $\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z\,\right) := \overline{\mathrm{PMS}}_j\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)$, $\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z'\,\right) := \overline{\mathrm{PMS}}_j\left(\bar{u}^{z'}\left(\cdot\right)\right),\ j = \overline{1\,,\, n}.$

Действие оператора PMS$\oplus$ сводится к вычислению NE $\bar{x}^z$ или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами коалиций, определенными формулой (3.2), а затем к вычислению PMS-компонент коалиции $S_i \in \Sigma_z,\ i = \overline{1,\, l}$, в ситуации $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$.

Таким образом, для любого $k = \overline{3,\, k_{\tilde{\Gamma}}}$ применение оператора PMS$\oplus$ к правой части формулы (3.2), т.е. формула (4.1), определяет рекуррентное вычисление PMS-вектора на каждом последующем шаге $k$ игры $\tilde{\Gamma}\,(z_0)$ в зависимости от предыдущего $k-1$.

## 4. Выигрыш игрока на каждом шаге в коалиционной стохастической игре

Пусть найдено решение в многошаговой стохастической коалиционной игре $\tilde{\Gamma}\,(z_0)$. Игроки начинают игру в вершине $z_0$ в соответствии с этим решением. Вопрос: как определить, какой выигрыш они получат на каждом шаге игры?

Игроки $j = \overline{1,\, n}$ на каждом шаге игры $\tilde{\Gamma}\,(z_0)$ в качестве компонент дележа выигрыша соответствующей коалиции будут получать величину $w_j$, равную значению разности между выигрышем игрока $j = \overline{1,\, n}$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\,(z)$ и математическим ожиданием выигрышей игрока $j = \overline{1,\, n}$ в подыграх $\tilde{\Gamma}\,(y)$ на следующем шаге:

$$w_j\,(\bar{x}^z) = \overline{\mathrm{PMS}}_j(z) - \sum_{y \in L(z)} \left[ p(z,\, y\,;\, \bar{x}^z)\, \overline{\mathrm{PMS}}_j(y) \right], \qquad (4.1)$$

где $\bar{x}^z \in \bar{u}^z(\cdot)$.

## 5. Примеры

*Пример 5.1.* Пусть в игре участвуют три игрока, у каждого из которых по две стратегии, а также определены выигрыши каждого игрока во всех ситуациях игры, см. табл. 1.

**Таблица 1.**

| Стратегии игроков | | | Выигрыши игроков | | | Выигрыши коалиций | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | II | III | I | II | III | (I, II) | (I, II, III) |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 5 | 4 | 9 |
| 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 9 |
| 2 | 1 | 1 | 5 | 3 | 1 | 8 | 9 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 4 | 7 |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 | 4 | 6 |

1. Решим коалиционную игру $G(\Sigma_1)$, $\Sigma_1 = \{S = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}, N \backslash S = \{\mathrm{III}\}\}$, вычислив PMS-вектор ([4]) следующим образом.

1.1. Найдем NE в смешанных стратегиях в игре:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \eta = 3/7 & 1-\eta = 4/7 \\
 & & 1 & 2 \\
0 & (1,\ 1) & [6,\ 1] & [3,\ 2] \\
0 & (2,\ 2) & [4,\ 3] & [4,\ 2] \\
\xi = 1/3 & (1,\ 2) & [4,\ 5] & [6,\ 3] \\
1-\xi = 2/3 & (2,\ 1) & [8,\ 1] & [3,\ 2].
\end{array}$$

Очевидно, что первая строка доминируется последней, а вторая - третьей. Используя теорему о вполне смешанном равновесии [3, p. 135], получим

$$\bar{y} = (\ 3/7,\ \ 4/7\ ),\ \bar{x} = (\ 0,\ \ 0,\ \ 1/3,\ \ 2/3\ )\ .$$

Реализация выигрышей коалиций $S$ и $N \backslash S$ в смешанных стратегиях имеет место со следующими вероятностями:

$$\begin{array}{ccc}
 & \eta_1 & \eta_2 \\
\xi_1 & 0 & 0 \\
\xi_2 & 0 & 0 \\
\xi_3 & 1/7 & 4/21 \\
\xi_4 & 2/7 & 8/21
\end{array}$$

Вычислим математическое ожидание выигрышей в NE в смешанных стратегиях:

$$E\left(\bar{x},\, \bar{y}\right) = \frac{1}{7}\left[4,\, 5\right] + \frac{2}{7}\left[8,\, 1\right] + \frac{4}{21}\left[6,\, 3\right] + \frac{8}{21}\left[3,\, 2\right] = \left[\frac{36}{7},\, \frac{7}{3}\right] = \left[5\frac{1}{7},\; 2\frac{1}{3}\right].$$

1.2. Найдем гарантированные выигрыши $v\left\{\mathrm{I}\right\}$ и $v\left\{\mathrm{II}\right\}$ игроков I и II, см. табл. 2. Для этого зафиксируем смешанную стратегию игрока III

$$\bar{y} = \left(\; 3/7\,,\quad 4/7\; \right)\,.$$

Тогда математическое ожидание выигрышей игроков коалиции $S$ при фиксированной стратегии коалиции $N \backslash S$ имеет вид:

$$\begin{array}{l}
E_{S(1,\,1)}\left(\bar{y}\right) = \left(\frac{3}{7}\cdot 4 + \frac{4}{7}\cdot 1\,,\; \frac{3}{7}\cdot 2 + \frac{4}{7}\cdot 2\right) \,=\left(2\frac{2}{7},\, 2\right)\;;\\
E_{S(1,\,2)}\left(\bar{y}\right) = \left(\frac{3}{7}\cdot 3 + \frac{4}{7}\cdot 5\,,\; \frac{3}{7}\cdot 1 + \frac{4}{7}\cdot 1\right) \,=\left(4\frac{1}{7},\, 1\right)\;;\\
E_{S(2,\,1)}\left(\bar{y}\right) = \left(\frac{3}{7}\cdot 5 + \frac{4}{7}\cdot 1\,,\; \frac{3}{7}\cdot 3 + \frac{4}{7}\cdot 2\right) \,=\left(2\frac{5}{7},\, 2\frac{3}{7}\right)\;;\\
E_{S(2,2)}\left(\bar{y}\right) = \left(\frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot 0\,,\; \frac{3}{7}\cdot 4 + \frac{4}{7}\cdot 4\right) \,= \left(0,\, 4\right)\,.
\end{array}$$

Следовательно, гарантированные выигрыши вычисляются следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}
\min H_1\left(x_1 = 1,\, x_2,\, \bar{y}\right) = \min\left\{2\frac{2}{7};\, 4\frac{1}{7}\right\} = 2\frac{2}{7}\,;\\
\min H_1\left(x_1 = 2,\, x_2,\, \bar{y}\right) = \min\left\{2\frac{5}{7};\, 0\right\} = 0;
\end{array}\right| \; v\left\{\mathrm{I}\right\} = \max\left\{2\frac{2}{7};\, 0\right\} = 2\frac{2}{7};$$

$$\left.\begin{array}{l}
\min H_2\left(x_1,\, x_2 = 1,\, \bar{y}\right) = \min\left\{2;\, 2\frac{3}{7}\right\} = 2\,;\\
\min H_2\left(x_1,\, x_2 = 2,\, \bar{y}\right) = \min\left\{1;\, 4\right\} = 1;
\end{array}\right| \; v\left\{\mathrm{II}\right\} = \max\left\{2;\, 1\right\} = 2.$$

Таким образом, гарантированные выигрыши равны: $v\left\{\mathrm{I}\right\} = 2\frac{2}{7}$, $v\left\{\mathrm{II}\right\} = 2$.

1.3. Разделим выигрыш $E_1\left(\bar{x},\, \bar{y}\right) = 5\frac{1}{7}$ по вектору Шепли [7]:

$$Sh_1 = v\left\{\mathrm{I}\right\} + \frac{1}{2}\left(v\left\{\mathrm{I,II}\right\} - v\left\{\mathrm{II}\right\} - v\left\{\mathrm{I}\right\}\right) = 2\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\left(5\frac{1}{7} - 2\frac{2}{7} - 2\right) = 2\frac{5}{7};$$

$$Sh_2 = v\left\{\mathrm{II}\right\} + \frac{1}{2}\left(v\left\{\mathrm{I,II}\right\} - v\left\{\mathrm{II}\right\} - v\left\{\mathrm{I}\right\}\right) = 2\frac{3}{7}.$$

Таким образом, PMS-вектор равен:

$$\mathrm{PMS}_1 = 2\frac{5}{7};\;\; \mathrm{PMS}_2 = 2\frac{3}{7};\;\; \mathrm{PMS}_3 = 2\frac{1}{3}\,.$$

2. Решим кооперативную игру $G\left(\Sigma_2\right)$, $\Sigma_2 = \left\{N = \left\{\mathrm{I, II,\, III}\right\}\right\}$, см. табл. 3. Найдем максимальный выигрыш $H_N$ коалиции $N$ и разделим его по вектору Шепли [7]:

$$Sh_1 = \frac{1}{6}\left[v\left\{\mathrm{I,II}\right\} + v\left\{\mathrm{I,III}\right\} - v\left\{\mathrm{II}\right\} - v\left\{\mathrm{III}\right\}\right] + \frac{1}{3}\left[v\left\{N\right\} - v\left\{\mathrm{II,III}\right\} + v\left\{\mathrm{I}\right\}\right]\;;$$

**Таблица 2.**

| Strategies of $S$ | Math. Expectation | | $x$ | $y$ | **0,43** | | | **0,57** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | | S | 2 | | S |
| | 2,286 | 2,000 | **0,00** | 1, 1 | **4** | **2** | 6 | **1** | **2** | 3 |
| | 4,143 | 1,000 | **0,33** | 1, 2 | **3** | **1** | 4 | **5** | **1** | 6 |
| | 2,714 | 2,429 | **0,67** | 2, 1 | **5** | **3** | 8 | **1** | **2** | 3 |
| | 0,000 | 4,000 | **0,00** | 2, 2 | **0** | **4** | 4 | **0** | **4** | 4 |
| | **v1** | **v2** | | | **v1** | **v2** | | **v1** | **v2** | |
| | 2,286 | 2,000 | | min 1 | 3 | 2 | | 1 | 2 | |
| | 0,000 | 1,000 | | min 2 | 0 | 1 | | 0 | 1 | |
| | **2,286** | **2** | | max | **3** | **2** | | **1** | **2** | |

The strategies of $N\backslash S$, the payoffs of $S$

$$Sh_2=\frac{1}{6}\left[v\{\mathrm{II},\mathrm{I}\}+v\{\mathrm{II},\mathrm{III}\}-v\{\mathrm{I}\}-v\{\mathrm{III}\}\right]+\frac{1}{3}\left[v\{N\}-v\{\mathrm{I},\mathrm{III}\}+v\{\mathrm{II}\}\right];$$

$$Sh_3=\frac{1}{6}\left[v\{\mathrm{III},\mathrm{I}\}+v\{\mathrm{III},\mathrm{II}\}-v\{\mathrm{I}\}-v\{\mathrm{II}\}\right]+\frac{1}{3}\left[v\{N\}-v\{\mathrm{I},\mathrm{II}\}+v\{\mathrm{III}\}\right].$$

Найдем гарантированные выигрыши:

$$v\{\mathrm{I},\mathrm{II}\}=\max\{4,\ 3\}=4;\ v\{\mathrm{I},\mathrm{III}\}=\max\{3,\ 2\}=3;$$

$$v\{\mathrm{II},\mathrm{III}\}=\max\{3,\ 4\}=4;$$

$$v\{\mathrm{I}\}=\max\{1,\ 0\}=1;\ v\{\mathrm{II}\}=\max\{2,\ 1\}=2;\ v\{\mathrm{III}\}=\max\{1,\ 2\}=2.$$

**Таблица 3.**

| Стратегии игроков | | | Выигрыши игроков | | | Выигрыш коалиции | Вектор Шепли | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | II | III | I | II | III | $H_N$(I, II, III) | $\lambda_1 H_N$ | $\lambda_2 H_N$ | $\lambda_3 H_N$ |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 7 | | | |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 5 | | | |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 5 | 9 | 2.5 | 3.5 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 3 | 9 | 2.5 | 3.5 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 5 | 3 | 1 | 9 | 2.5 | 3.5 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 5 | | | |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 7 | | | |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 | 6 | | | |

Тогда

$$Sh_1^{(2,1,1)} = Sh_1^{(1,2,2)} = Sh_1^{(1,2,1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}[9-4] + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{2},$$

$$Sh_2^{(2,1,1)} = Sh_2^{(1,2,2)} = Sh_2^{(1,2,1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}[9-3] + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 3\frac{1}{2},$$

$$Sh_3^{(2,1,1)} = Sh_3^{(1,2,2)} = Sh_3^{(1,2,1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}[9-4] + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = 3.$$

3. Решим бескоалиционную игру $G(\Sigma_3)$, $\Sigma_3 = \{S_1 = \{\mathrm{I}\}, S_2 = \{\mathrm{II}\}, S_3 = \{\mathrm{III}\}\}$. В чистых стратегиях NE не существует.

Воспользуемся вычисленными в п. 2 гарантированными выигрышами $v\{\mathrm{I}\} = 1$; $v\{\mathrm{II}\} = 2$; $v\{\mathrm{III}\} = 2$. Найдем оптимальные стратегии, согласно арбитражной схеме Нэша ([1]), см. табл. 4, где «$-$» означает, что стратегии не оптимальны по Парето, а «$+$» – оптимальны по Парето. Тогда оптимальными будем считать ситуации (1, 1, 2) и (2, 1, 2), которые дают одинаковый выигрыш (1, 2, 2) в обеих ситуациях.

Таким образом, получен следующие результаты:

- Для $\Sigma_1 = \{S = \{\mathrm{I,II}\}, N \backslash S = \{\mathrm{III}\}\}$, имеем выигрыш $\left(\left(2\frac{5}{7}, 2\frac{3}{7}\right), 2\frac{1}{3}\right)$.
- Для $\Sigma_2 = \{N = \{\mathrm{I, II, III}\}\}$ – $\left(2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 3\right)$.
- Для $\Sigma_3 = \{S_1 = \{\mathrm{I}\}, S_2 = \{\mathrm{II}\}, S_3 = \{\mathrm{III}\}\}$ – оптимальный выигрыш (1, 2, 2) в ситуациях (1, 1, 2) и (2, 1, 2).

**Таблица 4.**

| Стратегии игроков | | | Выигрыши игроков | | | Оптимальность по Парето (P) и арбитражная схема Нэша | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | II | III | I | II | III | Арбитражная схема Нэша | P |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | $(4-1)(2-2)(1-2)<0$ | - |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | $(1-1)(2-2)(2-2)=0$ | + |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 5 | $(3-1)(1-2)(5-2)<0$ | - |
| 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 3 | $(5-1)(1-2)(3-2)<0$ | - |
| 2 | 1 | 1 | 5 | 3 | 1 | $(5-1)(3-2)(1-2)<0$ | - |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | $(1-1)(2-2)(2-2)=0$ | + |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | $(0-1)(4-2)(3-2)<0$ | - |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 | $(0-1)(4-2)(2-2)<0$ | - |

*Пример 5.2.* Рассмотрим на примере 5.1 двухшаговую стохастическую игру $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$, см. рис. 1. На графе, изображенном на рис. 1, указаны вероятности перехода из одной одновременной игры $G$ в другую одновременную игру, при этом тройка $(p_1,\, p_2,\, p_3)$ определяется из табл. 5. Оптимальные выигрыши игроков в каждой игре $G$ получены в примере 5.1:

$$\mathrm{PMS}_{G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})}}=\left(2\frac{5}{7},\ 2\frac{3}{7},\ 2\frac{1}{3}\right),\ \mathrm{PMS}_{\text{кооп}}=\left(2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 3\right),$$

$$\mathrm{PMS}_{\text{бескоал}}=(1,\ 2,\ 2)\,.$$

1. Выпишем вектор выигрышей в игре $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$, см. формулу (3.2):

$$E_{\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)}(2,\,2,\,2)=K\,(2,\,2,\,2)+$$
$$+p_1\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\|\,G_{\text{бескоал}},\ (2,\,2,\,2)\right)\,\mathrm{PMS}_{\text{бескоал}}+$$
$$+p_2\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\|\,G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})},\ (2,\,2,\,2)\right)\mathrm{PMS}_{G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})}}+$$
$$+p_3\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\|\,G_{\text{кооп}},\ (2,\,2,\,2)\right)\,\mathrm{PMS}_{\text{кооп}}\,.$$

Из табл. 5 следует, что $K\,(2,\,2,\,2)=(0,\ 4,\ 2)$. Тогда

$$E_{\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)}(2,\,2,\,2)=(0,\ 4,\ 2)+0.25\cdot(1,\ 2,\ 2)+0.5\cdot\left(2\tfrac{5}{7},\ 2\tfrac{3}{7},\ 2\tfrac{1}{3}\right)+$$
$$+0.25\cdot(2.5,\ 3.5,\ 3)\approx(2.23,\ 6.59,\ 4.42)\ .$$

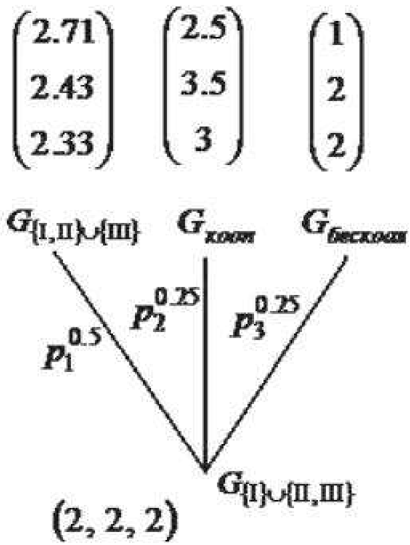


Рисунок 1. Исходная игра

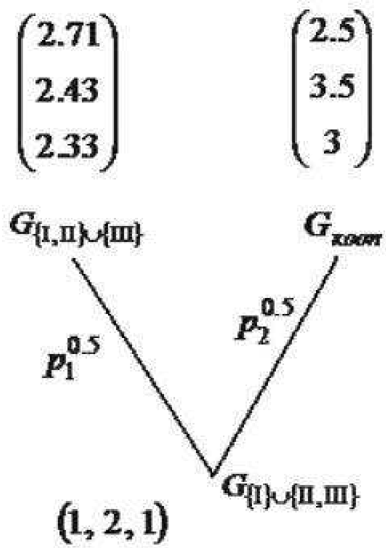


Рисунок 2. Решенная игра

**Таблица 5.**

| Стратегии игроков | | | Выигрыши игроков | | | Переходные вероятности в игры $G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})}$, $G_{\text{кооп}}$, $G_{\text{бескоал}}$ | | | Выигрыши игроков и коалиций в игре $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | II | III | I | II | III | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $H(\mathrm{II},\mathrm{III})$ |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0.5 | 0.5 | 5.75 | 4.75 | 3.50 | 8.25 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0.5 | 0 | 0.5 | 2.86 | 4.21 | 4.17 | 8.38 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 5 | 0.5 | 0.5 | 0 | 5.61 | 3.96 | 7.67 | 11.63 |
| 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 3 | 0.33 | 0.33 | 0.33 | 7.05 | 3.62 | 5.42 | 9.04 |
| 2 | 1 | 1 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0.33 | 0.67 | 6.50 | 5.50 | 3.33 | 8.83 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0.33 | 0 | 0.67 | 2.57 | 4.14 | 4.11 | 8.25 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 0.67 | 0 | 0.33 | 2.15 | 6.29 | 5.22 | 11.51 |
| 2 | 2 | 2 | 0 | 4 | 2 | 0.5 | 0.25 | 0.25 | 2.23 | 6.59 | 4.42 | 11.01 |

Аналогично вычислим по формулам (3.1)-(3.2) вектор выигрышей в игре $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$ во всех остальных ситуациях, см. табл. 5.

2. Решим коалиционную игру $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$ с выигрышами $H$ (II, III) и $E_1$, табл. 5.

2.1. Найдем NE в смешанных стратегиях в биматричной игре:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cc} \eta = 1 & 1-\eta = 0 \\ +1 & -2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \xi = 0 \\ 1-\xi = 1 \end{array} & \begin{array}{c} -(1\,,\,1) \\ -(2\,,\,2) \\ -(1\,,\,2) \\ +(2\,,\,1) \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (8.25\,,\ 5.75) & (8.83\,,\ 6.5) \\ (9.04\,,\ 7.05) & (11.01\,,\ 2.23) \\ (8.38\,,\ 2.86) & (8.25\,,\ 2.57) \\ (\mathbf{11.63}\,,\ \mathbf{5.61}) & (11.51\,,\ 2.15) \end{array}\right)
\end{array}$$

Первая, вторая и третья строки доминируются четвертой. Второй столбец доминируется первым. Здесь имеет место ситуация равновесия в чистых стратегиях: $\mu^1 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ ; $\mu^2 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Гарантированные выигрыши соответственно равны $v\,\{\mathrm{II}\} = 4.21$, $v\,\{\mathrm{III}\} = 4.17$.

2.3. Разделим средний выигрыш коалиции $\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ в ситуации NE $E\left(\mu^1, \mu^2\right) = 11.63$ между ее игроками в соответствии с вектором Шепли:

$$Sh_2 = v\{\mathrm{II}\} + \frac{1}{2}\left[v\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\} - v\{\mathrm{II}\} - v\{\mathrm{III}\}\right] = 5.84,$$

$$Sh_3 = v\{\mathrm{III}\} + \frac{1}{2}\left[v\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\} - v\{\mathrm{II}\} - v\{\mathrm{III}\}\right] = 5.8.$$

PMS-вектор игроков II и III коалиции $\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ принимает следующие значения:

$$\mathrm{PMS}_1 = 5.61; \;\; \mathrm{PMS}_2 = 5.84; \;\; \mathrm{PMS}_3 = 5.8\,.$$

3. Поскольку игра $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$ – двухшаговая, то, применяя формулу (4.1), на первом шаге игроки получат следующий выигрыш:

$$w = \left(\; 3.86, \;\; 3.09, \;\; 3.3 \;\right).$$

Кроме того, в оптимизированном варианте рассмотренная двухшаговая стохастическая игра имеет вид, отличный от графа, представленного на рис. 1. Изобразим решенную игру на рис. 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Григорьева К.В. *Арбитражная схема Нэша в решении биматричных коалиционных игр* // Межвузовский тематический сборник трудов СПбГАСУ. 2009. № 15. С. 56–61.

2. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте.* Санкт-Петербург: Высшая Школа Менеджмента. 2009.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е. *Теория игр*, Москва: Высшая Школа. 1998.

4. Grigorieva X., Mamkina S. *Solutions of Bimatrix Coalitional Games* // Contributions to game and management. Collected papers printed

on the Second International Conference «Game Theory and Management» [GTM'2008], Edited by Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich.
Graduate School of Management, SpbSU. 2009. P. 147–153.

5. Nash J. *Non-cooperative Games* // Ann. Mathematics. 1951. V. 54. P. 286–295.

6. Petrosjan L., Mamkina S. *Dynamic Games with Coalitional Structures* // Intersectional Game Theory Review. 2006. V. 8(2). P. 295–307.

7. Shapley L.S. *A Value for n-Person Games* // In: Contributions to the Theory of Games( Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, eds.). Princeton University Press. 1953. P. 307–317.

# SOLUTIONS FOR A CLASS STOCHASTIC COALITIONAL GAMES

**Kseniya V. Grigorieva**, Saint-Petersburh State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (kseniya196247@mail.ru).

*Abstract*: In the paper one of classes of multistage stochastic games with various coalition structures is considered. Game researched here is set on the tree graph where in each vertex z coalition structures of players, function of a payoff of coalitions and probability of transition in following vertexes depending on a situation realised in game, set in vertex z is defined. A new mathematical method of the decision of stochastic coalition games on the basis of calculation of the generalised PMS-vector as decisions of coalition games is offered. The offered method is illustrated by example of three-step stochastic game of three persons with variable coalition structure.

*Keywords*: optimization, multistage games, stochastic games, Nash equilibrium, PMS-vector.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 67-92

УДК 517.977.8+519.834
ББК 22.18

# УСТОЙЧИВЫЙ ВЕКТОР ШЕПЛИ В КООПЕРАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА*

Николай Анатольевич Зенкевич
Надежда Владимировна Козловская
Высшая школа менеджмента
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Волховский пер. д. 3
e-mail: zenkevich@gsom.pu.ru, kknn@yandex.ru.

В статье исследована теоретико-игровая модель территориального экологического производства. Процесс управления выбросами моделируется неантагонистической дифференциальной игрой. Предложен устойчивый механизм перераспределения прибыли в случае кооперации предприятий с целью уменьшения общего загрязнения окружающей среды. Найдено абсолютное равновесие по Нэшу. В качестве кооперативного решения игры построен и исследован устойчивый вектор Шепли, который обладает свойствами динамической устойчивости, стратегической устойчивости и устойчивости против иррационального поведения. Приведен численный пример.

*Ключевые слова*: дифференциальная игра, кооперативная игра, динамическое программирование, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, вектор Шепли, равновесие по Нэшу, абсолютное равновесие,

---



* Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ, СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-1-00301-а).

устойчивость кооперативного решения, динамическая устойчивость, стратегическая устойчивость, устойчивость против иррационального поведения.

## 1. Введение

В статье исследована теоретико-игровая модель территориального экологического производства, которая основана на работе Л.А. Петросяна и Г. Заккура [8]. В статье [8] моделировалось международное экологическое соглашение, результатом которого явилось динамически устойчивое (состоятельное во времени) распределение совокупных затрат при условии снижения общего уровня загрязнения. Затраты складывались из двух составляющих: выраженный в денежном эквиваленте экономический ущерб, включающий материальный ущерб, ущерб здоровью граждан и окружающей среде, и затраты на снижение выбросов с максимального уровня до некоторого допустимого. Такая постановка оправдана и логична, когда речь идет о межгосударственных соглашениях, направленных на заботу о благосостоянии и экологической безопасности граждан.

В том случае, если экологические проблемы рассматриваются на региональном уровне, а участниками конфликтно-управляемого процесса являются непосредственные виновники загрязнения - промышленные предприятия, проведение природоохранных мероприятий и плата за нанесенный ущерб окружающей среде остаются важнейшими задачами наряду с получением прибыли от хозяйственной деятельности.

В настоящее время мы наблюдаем недостаточную эффективность рыночного механизма применительно к ресурсам общего пользования, таким как вода и воздух. В данной работе мы рассматриваем процесс регулирования выбросов в атмосферу, в результате которого издержки внешнего эффекта переносятся на его виновника. Такой процесс называется интернализацией [4]. Несмотря на то, что экологическое регулирование является сложной системой инструментов управления, которая включает различные рычаги, стимулы, стандарты и нормативы, большинство известных механизмов неэффективно в силу специфичности самого объекта исследования.

В статье исследована проблема кооперативного социально- ответственного соглашения, когда предприятия добровольно принимают решения о дополнительном регулировании, в результате которого они существенно снижают объемы выбросов по сравнению с законодательно допустимым уровнем. Добровольный подход к экологическому регулированию успешно применяется в ряде экономически развитых стран [3]. Добровольное регулирование, как правило, приводит как к кооперации участников соглашения между собой, так и к сотрудничеству с государством. Ранее подобные модели экологического регулирования исследовались в работах [6, 11].

В работе [9] также исследовано расширение модели [8] на случай асимметрии игроков, что привело к существенным техническим усложнениям. В данной статье рассматривается задача, когда основная цель предприятий заключается не в минимизации затрат, а в максимизации прибыли. Для этого вводятся функция прибыли и функция цены, где последняя является обратной функции спроса. Предполагается, что региональные предприятия конкурируют по Курно. В модели найдено равновесие по Нэшу [7], которое является абсолютным, т.е. оно остается равновесием по Нэшу в любой подыгре, начинающейся с любого промежуточного момента времени из любого начального состояния. Для нахождения регионального кооперативного соглашения специальным образом построена характеристическая функция игры и доказана её супераддитивность. Цель данного исследования – построение устойчивого механизма перераспределения прибыли при долгосрочной кооперации. В качестве кооперативного решения дифференциальной игры выбран динамический вектор Шепли [10], который оказывается устойчивым.

Используемая концепция устойчивости кооперативного решения восходит к работе [2], где выделены три свойства устойчивой кооперации: динамическая устойчивость (состоятельность во времени), стратегическая устойчивость и устойчивость против иррационального поведения. Первое свойство - это динамическая устойчивость кооперативного решения. Впервые понятие динамической устойчивости было введено Л.А. Петросяном в работе [1]. При этом решение является динамически устойчивым, если оно обладает таким свойством, что в каждый момент времени при движении вдоль оптимальной траектории игроки придерживаются заранее выбранного принципа оптимальности. Кооперативное решение является стратегически устойчивым в том случае, если индивидуальные отклонения игроков оказываются не выгодны, т. е. существует равновесие по Нэшу которое осуществляет поддержку данного кооперативного решения. Устойчивость от иррационального поведения должна рассматриваться, поскольку нет уверенности в том, что все участники кооперации будут вести себя рационально на всем продолжительном промежутке реализации кооперативного соглашения. Участники должны быть уверены, что даже в случае реализации наихудшего сценария (например, аннулирования кооперативного соглашения) их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении.

## 2. Решение задачи в случае конкуренции предприятий

### 2.1. Математическая модель задачи

Предположим, что на региональном рынке $n$ предприятий (игроков) производят однородный товар. Обозначим множество игроков через $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Обозначим также $q_i = q_i(t)$ – объем выпуска предприятия $i$ в момент времени $t$. Будем предполагать, что цена товара $p = p(t)$ в каждый момент времени $t$ имеет вид:

$$p(t) = a - bQ(t), \tag{2.1}$$

где $a > 0,\ b > 0$ – параметры, $Q(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(t)$ – общий объем выпуска продукции. Здесь функция цены $p(t)$ является функцией обратной функции спроса:

$$Q = Q(t) = \frac{a - p(t)}{b}.$$

Производственные издержки предприятий предполагаются линейными:

$$C_i(q_i(t)) = cq_i(t), \quad c > 0,\ i \in I.$$

Будем предполагать, что игра начинается в момент времени $t_0$ из начального состояния $s_0$, где $s_0$ – это объем загрязнения в момент $t_0$, и имеет неограниченную продолжительность. Обозначим через $e_i(t)$ – выбросы предприятия $i$ в момент времени $t$. Предполагается, что выбросы линейно зависят от объема производства предприятия $i$:

$$e_i(q_i(t)) = \alpha q_i(t), \quad \alpha > 0. \tag{2.2}$$

Под параметром $\bar{e}_i$ будем понимать норматив допустимого воздействия на окружающую среду, а именно показатель ПДВ (предельно допустимый выброс), определяющий максимально разрешенный уровень выбросов для предприятия $i$ [1]:

$$0 \leq e_i(q_i(t)) \leq \bar{e}_i. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) следует, что максимальный допустимый объем производства фирмы $i$ равен:

$$q_i^{max} = \frac{\bar{e}_i}{\alpha},$$

тогда максимально допустимый общий объем выпуска равен:

$$Q^{max} = \frac{\bar{e}}{\alpha},$$

где $\bar{e} = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{e}_i$. Будем полагать, что параметры модели таковы, что верно неравенство:

$$a - c - \frac{b}{\alpha}\bar{e} \geq 0,$$

которое гарантирует неотрицательность цены (2.1).

Обозначим через $s = s(t)$ – общее загрязнение к моменту $t$. Предполагается, что динамика накопления загрязнения определяется дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) =& \alpha \sum_{k=1}^{n} q_i(t) - \delta s(t), \\ s(t_0) =& s_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\delta$ – коэффициент, определяющий долю природно поглощенного загрязнения, $\alpha > 0$ – параметр. Предполагается также, что кроме производственных издержек, каждое предприятие несет ещё два типа издержек, не связанных с основной деятельностью: издержки на

---

[1] В соответствии с российским природоохранным законодательством, предельно допустимые выбросы разрабатываются самостоятельно каждым предприятием, а потом утверждаются региональным экологическим комитетом, поэтому их значения различны для каждого предприятия (Федеральный закон от 10.01.2002 „Об охране окружающей среды ”, ст. 23.).

природоохранные мероприятия и издержки на возмещение ущерба от загрязнения. Будем считать, что издержки на природоохранные мероприятия в момент времени $t$ имеют вид:

$$E_i(t) = \frac{\gamma}{2}e_i(t)(2\bar{e}_i - e_i(t)) = \frac{\gamma}{2}\alpha q_i(2\bar{e}_i - \alpha q_i),$$
$$\gamma > 0, \qquad 0 \le e_i(t) \le \bar{e}_i.$$

Понятно, что функция издержек $E_i(t)$ является возрастающей и достигает максимального значения в точке $q_i = \bar{e}_i$. Эта функция также выпукла вверх, что содержательно можно трактовать так: при снижении на единицу объема производства затраты на природоохранные мероприятия увеличиваются.

Будем считать, что издержки на возмещение ущерба от загрязнения линейно зависят от объема загрязнения:

$$D_i(s(t)) = \pi_i s(t), \qquad \pi_i > 0, \qquad i \in I.$$

Под ущербом от загрязнения будем понимать экономический ущерб, т.е. совокупность материального ущерба, ущерба здоровью граждан и ущерба, нанесенного окружающей среде производственной деятельностью, в денежном выражении. Будем предполагать, что каждое предприятие стремится максимизировать свою общую прибыль, дисконтированную на начальный момент $t_0$:

$$\Pi_i(s_0, t_0; q) = \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}\{pq_i - C_i(q_i) - D_i(s) - E_i(q_i)\}dt, \tag{2.5}$$

где $q = q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$, $t \ge t_0$ – траектория выпуска продукции, а $0 < \rho < 1$ – процентная ставка.

## 2.2. Вычисление равновесия по Нэшу

В равновесии по Нэшу каждый игрок стремится максимизировать свою прибыль (2.5):

$$W(\{i\}, s, t) = \max_{q_i} \Pi_i(s, t; q) = \max_{q_i} \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)}\{q_i(a - bQ) -$$
$$-cq_i - \pi_i s + \frac{\gamma}{2}\alpha q_i(\alpha q_i - 2\bar{e}_i)\}d\tau, \quad i \in I,$$

где динамика накопления загрязнения $s$ задается (2.4). Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Обозначим функцию Беллмана для этой задачи через $W_i = W(\{i\}, s, t)$. Вышеупомянутая система уравнений может быть записана следующим образом:

$$\begin{gathered}\rho W_i = \max_{q_i}\{q_i(a - bQ) - cq_i - \pi_i s + \frac{\gamma\alpha^2}{2}q_i^2 - \gamma\alpha\bar{e}_i q_i + \\ + \frac{\partial W_i}{\partial s}(\alpha Q - \delta s)\}, \qquad i \in I.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Дифференцируя правую часть формулы (2.6) по $q_i$ и приравнивая производную нулю, находим:

$$P_i = a - bQ - bq_i - c + \gamma\alpha^2 q_i - \gamma\alpha\bar{e}_i + \alpha\frac{\partial W_i}{\partial s}.$$

Вычислим вторую производную $P_i$ по $q_i$:

$$\frac{dP_i}{dq_i} = \gamma\alpha^2 - 2b.$$

Таким образом, максимум существует, когда $\gamma\alpha^2 < 2b$. Будем искать функции Беллмана $W_i$ в линейной форме [5]:

$$W_i = A_i s + B_i. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\frac{\partial W_i}{\partial s} = A_i.$$

Решая систему уравнений $P_i = 0,\ \ i \in I$ относительно $q_i$, находим:

$$\hat{q}_i^N = \frac{1}{b(n+1) - \alpha^2\gamma}\Big(a - c - \frac{b\alpha(A - \gamma\bar{e})}{b - \alpha^2\gamma}\Big) + \frac{\alpha A_i - \gamma\alpha\bar{e}_i}{b - \alpha^2\gamma},\ i \in I,$$

где $A = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j,\ \bar{e} = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{e}_j$.

Тогда стратегии игроков в равновесии по Нэшу равны:

$$q_i^N = \begin{cases} 0, & \hat{q}_i^N < 0, \\ \hat{q}_i^N, & 0 \le \hat{q}_i^N \le \dfrac{\bar{e}_i}{\alpha}, \\ \dfrac{\bar{e}_i}{\alpha}, & \dfrac{\bar{e}_i}{\alpha} \le \hat{q}_i^N. \end{cases} \tag{2.8}$$

В данном исследовании ограничимся случаем, когда $0 \le q_i^N \le \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$. Будем предполагать, что параметры модели таковы, что $\hat{q}_i^N \in [0, \frac{\bar{e}_i}{\alpha}]$. Подставляя (2.7) в систему (2.6), находим:

$$A_i = -\frac{\pi_i}{\rho + \delta},$$
$$B_i = \frac{1}{\rho}\big((a-c)q_i^N - bq_i^N Q^N + \alpha A_i Q^N + \frac{\gamma\alpha^2}{2}(q_i^N)^2 - \gamma\alpha\bar{e}_i q_i^N\big),$$

где $q_i^N$ определяются формулой (2.8), а $Q^N = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^N$. Найдем теперь равновесную по Нэшу траекторию. Подставляя найденные стратегии игроков (2.8) в уравнение динамики (2.4) и решая его получаем:

$$s^N(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}Q^N)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}Q^N,$$

где

$$Q^N = \frac{n(a-c) + \alpha A - \gamma\alpha\bar{e}}{b(n+1) - \alpha^2\gamma}. \tag{2.9}$$

В силу того, что равновесие по Нэшу является решением системы уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана, оно является абсолютным равновесием, т.е остается таковым в любой подыгре с любыми начальными условиями.

## 3. Характеристическая функция кооперативной игры

Для построения кооперативного решения в задаче экологического производства определим характеристическую функцию $V(K, s, t)$ этой игры. Идея построения характеристической функции следующая (см. [8]). Когда значение характеристической функции вычисляется для коалиции $K$, то действия игроков из $K$ представляют собой наилучший ответ на фиксированное равновесие по Нэшу. Данный подход к вычислению характеристической функции имеет свои недостатки и достоинства. Достоинство заключается в том, что такой подход позволяет существенно сократить число вычислительных операций по сравнению со стандартным подходом, когда $V(K, s, t)$ представляет собой максимальный гарантированный выигрыш коалиции $K$, если даже остальные игроки объединяются в дополнительную коалицию $I \backslash K$. Недостатком подхода является тот факт, что характеристическая функция, вычисленная таким образом, в общем случае не является супераддитивной.

### 3.1. Значение характеристической функции для произвольной коалиции

Значение характеристической функции для произвольной коалиции $K$ будем вычислять, решая уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Функция Беллмана $W(K,s,t)$ является решением следующей задачи максимизации:

$$W(K,s,t)=\max_{q_j\in K}\sum_{j\in K}\Pi_j(s,t;q)=$$
$$=\max_{q_j\in K}\sum_{j\in K}\int\limits_t^\infty e^{-\rho(\tau-t)}\{q_i(a-bQ)-cq_i-\pi_i s+ \tag{3.1}$$
$$+\frac{\gamma}{2}\alpha q_i(\alpha q_i-2\bar{e}_i)\}d\tau,$$

где динамика задается формулой (2.4). Обозначим через $W_K = W(K,s,t)$ функцию Беллмана задачи (3.1). Решение задачи (3.1) эквивалентно решению следующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned}\rho W_K=\max_{q_j\in K}\{&\sum_{j\in K}q_j(a-bQ)-c\sum_{j\in K}q_j-\sum_{j\in K}\pi_j s+\\&+\frac{\gamma\alpha^2}{2}\sum_{j\in K}q_j^2-\gamma\alpha\sum_{j\in K}\bar{e}_j q_j+\frac{\partial W_K}{\partial s}(\alpha Q-\delta s)\}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Для нахождения наилучших ответов игроков $q_i^K$, $i\in K$ найдем производную правой части уравнения (3.2) по $q_i$:

$$\frac{dP^K}{dq_i}=a-bQ-b\sum_{j\in K}q_j-c+\gamma\alpha^2 q_i-\gamma\alpha\bar{e}_i+\alpha\frac{\partial W_K}{\partial s}.$$

Вспомним, что игроки, не входящие в коалицию $K$, действуют согласно фиксированным равновесным по Нэшу стратегиям, т. е. $q_i^K = q_i^N$, $i\in I\backslash K$. Тогда $q_i^K$, $i\in K$ могут быть найдены из системы:

$$a-c-b\sum_{j\in I\backslash K}q_j^N-2b\sum_{j\in K}q_j^K+\gamma\alpha^2 q_i-\gamma\alpha\bar{e}_i+\alpha\frac{\partial W_K}{\partial s}=0,\quad i\in K. \tag{3.3}$$

Суммируя (3.3) по $i \in K$, находим:

$$\sum_{i\in K} q_i^K = \frac{1}{2bk-\alpha^2\gamma}(k(a-c)-\gamma\alpha\bar{e}^K+\alpha k\frac{\partial W_K}{\partial s}-bk\sum_{j\in I\setminus K} q_j^N), \quad (3.4)$$

где $\bar{e}^K = \sum\limits_{j\in K}\bar{e}_j$, $k = |K|$ – количество элементов в множестве $K$. Подставляя (3.4) в (3.3), находим $q_i^K$:

$$q_i^K = -\frac{1}{\alpha^2\gamma}(a-c-b\sum_{j\in I\setminus K} q_j^N - 2b\sum_{j\in K} q_j^K - \gamma\alpha\bar{e}_i + \alpha\frac{\partial W_K}{\partial s}), \quad (3.5)$$

где $q_j^N$ определяются формулой (2.8).

Функцию Беллмана будем искать в линейной форме:

$$W_K = A_K s + B_K. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) и (3.5) в уравнение (3.2), находим коэффициенты:

$$A_K = \frac{\partial W_K}{\partial s} = -\frac{\sum\limits_{j\in K}\pi_j}{\rho+\delta},$$
$$B_K = \frac{1}{\rho}((a-c)\sum_{j\in K} q_j^K - b\sum_{j\in K} q_j^K(\sum_{j\in K} q_j^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N) + \quad (3.7)$$
$$+\alpha A_K(\sum_{j\in K} q_j^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N) + \frac{\gamma\alpha^2}{2}\sum_{j\in K}(q_j^K)^2 - \gamma\alpha\sum_{j\in K}\bar{e}_j q_j^K).$$

Из (3.4), (2.8) и (3.5) получаем:

$$q_i^K = \frac{\bar{e}_i}{\alpha} + \frac{1}{2bk-\alpha^2\gamma}\Big(\frac{(a-c)(b(k+1)-\alpha^2\gamma)}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$-\frac{\alpha b(A-\gamma\bar{e})(b(k+1)-\alpha^2\gamma)}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)} + \frac{2b-\alpha^2\gamma}{b-\alpha^2\gamma}(\alpha A_K - \frac{b}{\alpha}\bar{e}^K)\Big). \quad (3.8)$$

Если сформировалась коалиция $K$, то её траектория $s^K(t)$ имеет вид:

$$s^K(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}(q^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N))e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}(q^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N), \quad (3.9)$$

где

$$q^K = \sum_{j\in K} q_j^K = \frac{1}{2bk-\alpha^2\gamma}(k(a-c)-\gamma\alpha\bar{e}^K+\alpha k A_K - bk\sum_{j\in I\setminus K} q_j^N).$$

### 3.2. Значение характеристической функции для максимальной коалиции

Рассмотрим теперь случай полной кооперации, т.е. случай, когда игроки объединяются в максимальную коалицию. Оптимальные (кооперативные) стратегии игроков $q_i^I$ могут быть получены подстановкой соответствующих параметров в формулу (3.8):

$$q_i^I = \frac{\bar{e}_i}{\alpha} + \frac{1}{2bn - \alpha^2\gamma}(a - c + \alpha A - \frac{2b}{\alpha}\bar{e}).$$

Можно показать, что $0 \leq q_i^I \leq \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$, если $0 \leq q_i^N \leq \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$.

Оптимальная (кооперативная) траектория $s^I(t)$ имеет вид:

$$s^I(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}Q^I)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}Q^I, \tag{3.10}$$

где

$$Q^I = \sum_{j\in I} q_j^I = \frac{n(a-c) + \alpha nA - \alpha\gamma\bar{e}}{2bn - \alpha^2\gamma}. \tag{3.11}$$

Функция Беллмана для максимальной коалиции имеет вид:

$$W_I(s,t) = W = As + B, \tag{3.12}$$

где

$$A = -\frac{\sum\limits_{j\in I}\pi_j}{\rho + \delta},$$

$$B = \frac{1}{\rho}((a-c)Q^I - b(q^I)^2 + \alpha AQ^I + \frac{\gamma\alpha^2}{2}\sum_{j\in I}(q_j^I)^2 - \gamma\alpha\sum_{j\in I}\bar{e}_j q_j^I).$$

**Лемма 3.1.** *Если $Q^I, Q^N \geq 0$, то загрязнение в случае полной кооперации не больше, чем загрязнение в равновесии по Нэшу, т.е.*

$$s^I(t) \leq s^N(t).$$

*Доказательство.* Из формул (2.9) и (3.11) очевидно, что $Q^N > Q^I$. Рассматривая разность, имеем:

$$s^N(t) - s^I(t) = \frac{\alpha}{\delta}(Q^N - Q^I)(1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \geq 0.$$

□

Подытоживая результаты раздела 3, получаем явный вид характеристической функции кооперативной игры:

$$V(L,s,t)=\begin{cases}0, \quad L=\emptyset\\ W(\{i\},s,t), \quad L=\{i\}\\ W(I,s,t), \quad L=I\\ W(K,s,t), \quad L=K\end{cases}, \tag{3.13}$$

где $W(\{i\},s,t)$, $W(K,s,t)$, $W(I,s,t)$ задаются формулами (2.7), (3.6), (3.12).

## 4. Супераддитивность характеристической функции

Как уже отмечалось ранее, характеристическая функция (3.13) в общем случае не является супераддитивной. Поэтому проверка свойства супераддитивности является самостоятельной задачей. По причине громоздкости формул и выкладок при доказательстве в общем случае, приведем здесь доказательство теоремы о супераддитивности только для симметричного случая. Для доказательства будем предполагать, что:

$$e_i=\hat{e},\ A_i=\hat{A},\ i\in I.$$

**Теорема 4.1.** *Характеристическая функция (3.13) удовлетворяет свойству супераддитивности, для любых $s=s(t)$ и $t\geq t_0$:*

$$V(K\cup L,s,t)\geq V(K,s,t)+V(L,s,t), \quad K,L\subset I.$$

*Доказательство.* Для доказательства свойства супераддитивности необходимо показать, что:

$$V(K\cup L,s,t)-V(K,s,t)-V(L,s,t)=$$
$$=A_{K\cup L}s^{K\cup L}-A_Ks^K-A_Ls^L+B_{K\cup L}-B_K-B_L\geq 0.$$

Доказательство будем проводить в два этапа. Сначала докажем, что

$$A_{K\cup L}s^{K\cup L}-A_Ks^K-A_Ls^L\geq 0. \tag{4.1}$$

Для этого рассмотрим левую часть (4.1):

$$A_{K\cup L}s^{K\cup L}-A_Ks^K-A_Ls^L=A_K(s^{K\cup L}-s^K)+A_L(s^{K\cup L}-s^L).$$

Из формулы (3.9) следует, что

$$s^K = s_0 e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}(q^K + q_{I\setminus K})(1 - e^{-\delta(t-t_0)}),$$

где $q_{I\setminus K} = \sum\limits_{j\in I\setminus K} q_j^N$. Тогда

$$s^{K\cup L} - s^K = \frac{\alpha}{\delta}(1 - e^{-\delta(t-t_0)})(q^{K\cup L} - q^K + q_{I\setminus(K\cup L)} - q_{I\setminus K}) =$$
$$= \frac{\alpha}{\delta}(1 - e^{-\delta(t-t_0)})(\sum_K q_j^{K\cup L} - \sum_K q_j^K + \sum_L q_j^{K\cup L} - \sum_L q_j^N).$$

Пользуясь формулой (3.8), получаем:

$$\sum_K q_j^{K\cup L} - \sum_K q_j^K = -\frac{klb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(\frac{a-c}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$-\frac{\alpha(A-\gamma\bar{e})}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)}) - \frac{\alpha^2\gamma lk}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}$$
$$\frac{2b-\alpha^2\gamma}{b-\alpha^2\gamma}(\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e}) = -\frac{klb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(\frac{a-c}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$-\frac{\alpha(A-\gamma\bar{e})}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)} + \frac{\alpha^2\gamma}{b(b-\alpha^2\gamma)}(\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e})) =$$
$$= -\frac{klb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(\frac{a-c}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$-\frac{\alpha(A-\gamma\bar{e})}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)} + \frac{\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e}}{b-\alpha^2\gamma} - \frac{\alpha\hat{A}}{b} + \frac{\hat{e}}{\alpha}) =$$
$$= -\frac{lb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(q_K - \frac{\alpha\hat{A}}{b}) < 0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_L q_j^{K\cup L} - \sum_L q_j^N < 0, \tag{4.2}$$

а значит и $s^{K\cup L} - s^K < 0$. Отсюда следует, что $A_K(s^{K\cup L} - s^K) > 0$ и, аналогично, $A_L(s^{K\cup L} - s^L) > 0$. Итак неравенство (4.1) доказано.

Далее докажем, что $B_{K\cup L} - B_K - B_L \geq 0$.

Рассмотрим разность, подставляя (3.7):

$\rho(B_{K\cup L} - B_K - B_L) = (a-c)(q^{K\cup L} - q^K - q^L) + \alpha A_{K\cup L}(q^{K\cup L} + q_{I\setminus(K\cup L)}) - \alpha A_K(q^K + q_{I\setminus K}) - \alpha A_L(q^L + q_{I\setminus L}) - bq^{K\cup L}(q^{K\cup L} + q_{I\setminus(K\cup L)}) +$

$bq^K(q^K+q_{I\setminus K})+bq^L(q^L+q_{I\setminus L})+\dfrac{\gamma\alpha^2}{2}(\sum\limits_{K\cup L}q_j^{K\cup L}(q_j^{K\cup L}-\dfrac{2\bar{e}_j}{\alpha})-\sum\limits_{K}q_j^K(q_j^K-\dfrac{2\bar{e}_j}{\alpha})-\sum\limits_{L}q_j^L(q_j^L-\dfrac{2\bar{e}_j}{\alpha}))$.

После некоторых упрощений, можно получить:

$\rho(B_{K\cup L}-B_K-B_L)=\alpha A_L(\dfrac{1}{2}\sum\limits_{K}q_j^{K\cup L}+\dfrac{1}{2}q^K-q_K)+\alpha A_K(\dfrac{1}{2}\sum\limits_{L}q_j^{K\cup L}+\dfrac{1}{2}q^L-q_L)+\dfrac{b}{2}\sum\limits_{K}q_j^{K\cup L}(q_L-q^L)+\dfrac{b}{2}q^L(q_K-\sum\limits_{K}q_j^{K\cup L})+\dfrac{b}{2}\sum\limits_{L}q_j^{K\cup L}(q_K-q^K)+\dfrac{b}{2}q^K(q_L-\sum\limits_{L}q_j^{K\cup L})\geq 0,$

что верно вследствие (4.2).

□

## 5. Устойчивость динамического вектора Шепли

### 5.1. Кооперативное решение дифференциальной игры

Пусть $s^I(t),\ t\geq t_0$ - это оптимальная (кооперативная) траектория, максимизирующая сумму выигрышей игроков и игроки согласны разделить максимальный суммарный выигрыш $V(I,s_0,t_0)$ в соответствии с некоторым дележом. Предположим, что в качестве дележа был выбран динамический вектор Шепли:

$$Sh(s,t)=(Sh_1(s,t),Sh_2(s,t),\ldots,Sh_n(s,t)),$$

компоненты которого определяются по формуле:

$$Sh_i(s,t)=\sum_{K\ni i}\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}[V(K,s,t)-V(K\backslash\{i\},s,t)].$$

Здесь мы не приводим явный вид вектора Шепли для данной модели ввиду её чрезмерной громоздкости. При этом структура вектора Шепли имеет вид:

$$Sh_i(s,t)=A_is(t)+Bsh_i, \qquad (5.1)$$

где коэффициент $Bsh_i$ вычисляется как вектор Шепли в статической игре с характеристической функцией:

$$V(K) = B_K, \quad K \in I.$$

## 5.2. Динамическая устойчивость вектора Шепли

Под динамически устойчивым кооперативным решением понимается такой дележ, который остается оптимальным в любой подыгре вдоль оптимальной траектории в соответствии с выбранным принципом оптимальности. Приведем строгие определения динамической устойчивости, следуя работе [8]. Для этого рассмотрим подыгры $\Gamma(s^I(t), t)$ исходной игры с начальными условиями $(s^I(t), t)$ на оптимальной траектории и обозначим через $Sh_i(s^I(t), t)$ вектор Шепли, в соответствующей подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$.

**Определение 5.1.** *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$ называется процедурой распределения дележа (ПРД) в соответствии с вектором Шепли, если*

$$Sh_i(s_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \beta_i(t) dt, \quad i \in I.$$

**Определение 5.2.** *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$ – динамически-устойчивая ПРД, если при любых начальных $(s^I(t), t)$, при любом $t \in [t_0, \infty)$ выполняется следующее условие:*

$$Sh_i(s_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t-t_0)} Sh_i(s^I(t), t), \tag{5.2}$$
$$t \in [t_0, \infty), \ i \in I.$$

**Теорема 5.1.** *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$, где $\beta(t)$ задается формулой*

$$\beta_i(t) = \rho Sh_i(s^I(t), t) - \frac{d}{dt} Sh_i(s^I(t), t)$$

*- динамически-устойчивая ПРД.*

Доказательство теоремы 5.1 приведено в [8]. Таким образом вектор Шепли (5.1), является динамически-устойчивым, при этом процедура распределения дележа имеет вид:

$$\beta_i(t) = -\pi_i s^I(t) - \alpha Q^I A_i + \rho B sh_i. \tag{5.3}$$

## 5.3. Свойство стратегической устойчивости

Процедура распределения дележа (5.3) гарантирует динамическую устойчивость вектора Шепли, а поэтому и индивидуальную рациональность решения $Sh(s^I(t), t)$ в каждой подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$ вдоль кооперативной траектории $s^I(t)$. Пусть $V_i(s_0, t_0)$ – это выигрыш игрока $i$ в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ в равновесии по Нэшу. Рассмотрим подыгры $\Gamma(s^I(t), t),\ t \in [t_0, \infty]$ вдоль кооперативной траектории $s^I(t)$. Если $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая ПРД, то должны выполняться следующие условия:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}\beta_i(t)dt = Sh_i(t_0, s_0),$$

$$\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)}\beta_i(\tau)d\tau \geq V_i(s^I(t), t), \qquad i \in I,$$

где $V_i(s^I(t), t)$ – равновесный выигрыш игрока $i$ в подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$. Но $\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)}\beta_i(\tau)d\tau$ – это выигрыш игрока $i$ при кооперации в игре $\Gamma(s^I(t), t)$, который индивидуально рационален. В статье [2] доказана теорема, из которой следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-равновесие по Нэшу, причем выигрыши игроков в этом равновесии в точности равны $Sh(s_0, t_0) = (Sh_1(s_0, t_0), Sh_2(s_0, t_0), \ldots, Sh_n(s_0, t_0))$. Это означает, что вектор Шепли (кооперативное решение) стратегически поддержан некоторым специально построенным $\epsilon$-равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(s_0, t_0)$.

## 5.4. Условие Янга для устойчивого кооперативного решения

Компоненты построенного кооперативного решения в каждой подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$ удовлетворяют условиям индивидуальной и коллективной рациональности. Кроме того, вектор Шепли является динамически и стратегически устойчивым. Тем не менее, это не гарантирует того, что отдельные игроки или группы игроков не будут предпринимать иррациональных действий, следствием которых может стать отказ остальных игроков от продолжения кооперативного соглашения. Такую ситуацию будем называть иррациональным поведением. Поэтому желательное свойство устойчивого соглашения заключается в том, что даже в случае отказа от кооперативного соглашения в любой момент $t \geq t_0$, каждый игрок ожидает получить выигрыш не меньше, чем если бы он действовал индивидуально. Такое свойство устойчивости кооперативного решения будем называть устойчивостью против иррационального поведения. Формально указанное свойство первые было сформулировано Д.В.К. Янгом в работе [12] в виде условия (условие Янга):

$$V_i(x_0,t_0) \leq V_i(x^I(t),t) + \int\limits_{t_0}^{t} \beta_i(\tau)d\tau,\ t \geq t_0,\ i \in I,$$

где $V_i(x,t)$ – это выигрыш игрока $i$ в равновесии по Нэшу в игре, начинающейся в момент $t$ из состояния $x$, $\beta_i(t)$ – процедура распределения. В нашем случае условие Д.В.К. Янга принимает вид:

$$V_i(s_0,t_0) \leq e^{-\rho(t-t_0)}V_i(s^I(t),t) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}\beta_i(\tau)d\tau,\ t \geq t_0,\ i \in I. \quad (5.4)$$

Тогда процедура распределения дележа $\beta_i(t)$, заданная формулой (5.3), может быть переписана в виде:

$$\beta_i(t) = -\pi_i s^I(t) + F_i,$$

а оптимальная траектория (3.10) примет вид:

$$S^I(t) = (s_0 - G)e^{-\delta(t-t_0)} + G,$$

где $G = \dfrac{\alpha}{\delta}Q^I$. Вычислим сначала интеграл в правой части неравенства (5.4):

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}\beta_i(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}(-\pi_i((s_0-G)e^{-\delta(\tau-t_0)}+G)+F_i)d\tau =$$

$$= \left(e^{-\rho(\tau-t_0)}\Big(\frac{\pi_i(s_0-G)}{\rho+\delta}e^{-\delta(\tau-t_0)} + \frac{\pi_i G}{\rho} - \frac{F_i}{\rho}\Big)\right)\Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= e^{-\rho(t-t_0)}\Big(-A_i(s_0-D_2)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\pi_i G}{\rho} - \frac{F_i}{\rho}\Big) + A_i(s_0-G) - \frac{\pi_i G}{\rho} + \frac{F_i}{\rho}.$$

Тогда левая часть формулы (5.4) примет вид:

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}\beta_i(\tau)d\tau + e^{-\rho(t-t_0)}V_i(s^I(t),t) =$$

$$= e^{-\rho(t-t_0)}\left(-\frac{\delta}{\rho}A_iG + B_i - \frac{F_i}{\rho}\right) + A_i(s_0-G) - \frac{\pi_i}{\rho}G + \frac{F_i}{\rho}.$$

Правая часть формулы (5.4) равна:

$$V_i(s_0,t_0) = A_i s_0 + B_i.$$

Рассмотрим теперь разность левой и правой части. Для доказательства неравенства (5.4) необходимо доказать, что

$$\left(1 - e^{-\rho(t-t_0)}\right)\left(\frac{\delta}{\rho}A_iG - B_i + \frac{F_i}{\rho}\right) \geq 0. \tag{5.5}$$

Понятно, что $1 - e^{-\rho(t-t_0)} > 0$ при любом $t > t_0$ и $e^{-\rho(t-t_0)} - 1 = 0$ при $t = t_0$. Поэтому условие Янга выполнено в начальный момент времени $t_0$. Обозначим через

$$\theta = \frac{\delta}{\rho}A_iG - B_i + \frac{F_i}{\rho}.$$

Если константа $\theta \geq 0$, то условие (5.5) выполнено при любом $t \geq t_0$, если же $\theta < 0$, то условие верно только в начальный момент времени. Покажем, что существует момент времени $T > t_0$, при котором условие Янга выполнено. Если это верно, то $\theta \geq 0$.

Поскольку $\beta(t)$ – динамически устойчивая ПРД, то условие (5.4) можно переписать, используя формулу (5.2), в виде:

$$Sh_i(s_0,t_0) - V_i(s_0,t_0) + e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t),t) - Sh_i(s^I(t),t)) \geq 0. \tag{5.6}$$

Поскольку $V_i(s^I(t),t)$ и $Sh_i(s^I(t),t)$ – ограниченные функции, а $e^{-\rho(t-t_0)}$ – бесконечно мала при $t \to \infty$, верно что

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t),t) - Sh_i(s^I(t),t)) = 0,$$

а поэтому, переходя к пределу при $t \to \infty$ в неравенстве (5.6), получаем, что

$$Sh_i(s_0,t_0) \geq V_i(s_0,t_0).$$

Это верное равенство, вследствие индивидуальной рациональности. Обозначим через $\varepsilon = Sh_i(s_0,t_0) - V_i(s_0,t_0)$. По определению предела, существует такое $T > 0$, что при любом $t > T$ выполнено неравенство

$$\left| e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t),t) - Sh_i(s^I(t),t)) \right| < \varepsilon.$$

Тем самым мы доказали, что $\theta \geq 0$, и неравенство (5.5) верно при любом $t \geq 0$, что и требовалось доказать.

## 6. Числовой пример вычисления устойчивого вектора Шепли

Все вычисления производились в программном пакете MAPLE 10.

### 6.1. Параметры модели

В качестве примера рассмотрим модель экологического производства трех предприятий (игроков). Пусть параметры модели следующие:
$t_0 = 0$ – начальный момент соглашения,
$s_0 = 0$ – начальный объем загрязнения,
$p(t) = 4000 - 10(q_1(t) + q_2(t) + q_3(t))$ – функция цены,
$c = 3$ – удельные производственные издержки,
$\rho = 0.07$ – процентная ставка,
$\alpha = 12$ – удельный объем выбросов,
$\delta = 0.4$ – доля природного поглощения загрязнения,
$\gamma = 0.055$ – коэффициент, характеризующий величину затрат на природоохранные мероприятия,
$\bar{e}_1 = 1180,\ \bar{e}_2 = 1170,\ \bar{e}_3 = 1167$ – предельно допустимые выбросы,
$\pi_1 = 6,\ \pi_2 = 6.4,\ \pi_3 = 6.25$ – коэффициенты, отражающие возможности игроков компенсировать экологический ущерб.

Из формул (2.2) и (2.3) следует, что максимально возможные мгновенные объемы производства игроков следующие:

$$q_1^{max} = 98.33, \quad q_2^{max} = 97.5, \quad q_3^{max} = 97.25.$$

## 6.2. Результаты расчетов устойчивого вектора Шепли

### 6.2.1 Равновесные объемы производства

Равновесные по Нэшу объёмы производства равны:

$$q_1^N = 95.75, \quad q_2^N = 94.02, \quad q_3^N = 96.81,$$

при этом соответствующие объемы выбросов имеют значения:

$$e_1^N = 1149.05, \quad e_2^N = 1128.22, \quad e_3^N = 1161.73.$$

Из полученных значений видно, что в равновесии по Нэшу объемы производства игроков очень близки к максимально возможным, а соответствующие выбросы очень близки к ПДВ.

Кооперативные объемы производства равны:

$$q_1^I = 53.39, \quad q_2^I = 52.55, \quad q_3^I = 52.3,$$

при этом соответствующие кооперативные объемы выбросов принимают значения:

$$e_1^I = 640.64, \quad e_2^I = 630.64, \quad e_3^I = 627.64.$$

Заметим, что кооперативные объемы производства почти в два раза ниже максимума, при этом кооперативная цена существенно выше цены, реализуемой в равновесии по Нэшу:

$$\begin{aligned} p^N(t) &= 1134.16, \\ p^I(t) &= 2417.58. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Вычислим также стратегии игроков в случае формирования коалиций из двух игроков:

$$\begin{aligned} q_1^{1,2} &= 60.79, \quad q_2^{1,2} = 59.96 \\ q_1^{1,3} &= 61.94, \quad q_3^{1,3} = 60.85 \\ q_2^{2,3} &= 60.76, \quad q_3^{2,3} = 60.51. \end{aligned}$$

### 6.2.2 Характеристическая функция

По формулам (3.7) вычисляем коэффициенты характеристической функции кооперативной игры:

$$A_1 = -12.77, \quad A_2 = -\,13.61, \quad A_3 = -13.3,$$
$$B_1 = 26.147, \quad B_2 = 21923.7 \quad B_3 = 26326.3,$$
$$B_{1,2} = 86280.33, \quad B_{1,3} = 91511.86, \quad B_{2,3} = 87029,71,$$
$$B = B_I = 217350.63.$$

Кооперативная траектория имеет вид:

$$s^I(t) = 4747.27 - 4747.27e^{-0.2t}, \ t \geq 0.$$

Равновесная по Нэшу траектория:

$$s^N(t) = 8597.51 - 8597.51e^{-0.2t}, \ t \geq 0.$$

Приведем графики изменения динамики загрязнения в обоих случаях (рис. 1).

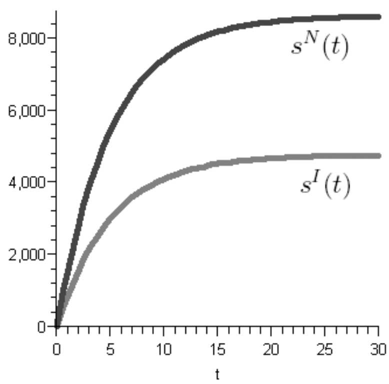


Рисунок 1. Динамика загрязнения

### 6.2.3 Решения модели: сравнительный анализ

Прибыли игроков в равновесии по Нэшу в момент $t \geq 0$ равны соответственно:

$$V(\{1\}, s^N(t), t) = 263777.4 + 109755.5e^{-0.2t},$$
$$V(\{2\}, s^N(t), t) = 196123.22 + 117072.5e^{-0.2t},$$
$$V(\{3\}, s^N(t), t) = 261761.8 + 114328.66e^{-0.2t}.$$

Общий кооперативный выигрыш в момент $t \geq 0$ составляет:

$$V(I, s^I, t) = 2916301.18 + 188707.8045e^{-0.2t}. \qquad (6.2)$$

В качестве принципа дележа при кооперации был выбран устойчивый динамический вектор Шепли. Кооперативные прибыли игроков в этом случае в момент времени $t \geq 0$ имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} Sh_1(s^I(t), t) =& 992916.94 + 60603.51e^{-0.2t}, \\ Sh_2(s^I(t), t) =& 926692.83 + 64643.66e^{-0.2t}, \\ Sh_3(s^I(t), t) =& 997023.3 + 63128.66e^{-0.2t}. \end{aligned}$$

На рис. 2 изображены графики функций прибыли всех трех игроков. Видно, что $V(\{1\}, s, t)$ и $V(\{3\}, s, t)$ пересекаются, это происходит в момент времени $t = 4.1$. На рис. 3 показаны графики функций прибыли в кооперативном случае. На рис. 4 приведены графики, сравнивающие равновесную по Нэшу и кооперативную прибыль.

Мгновенные выигрыши игроков до перераспределения общей прибыли равны:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1(t) =& 70080.7 + 28533.83e^{-0.2t}, \\ \hat{\beta}_2(t) =& 66812.56 + 30436.09e^{-0.2t}, \\ \hat{\beta}_3(t) =& 67115.06 + 29722.74e^{-0.2t}. \end{aligned}$$

Процедура распределения дележа, соответствующая вектору Шепли, имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta_1(t) =& 69454 + 28533.83e^{-0.2t}, \\ \beta_2(t) =& 64814.97 + 30436.09e^{-0.2t}, \\ \beta_3(t) =& 69739.36 + 29722.74e^{-0.2t}. \end{aligned}$$

На рис. 5 изображены графики функций $\beta_i(t)$ и $\hat{\beta}_i(t),\ i = 1, 2, 3,$ которые отражают перераспределение кооперативного выигрыша между игроками.

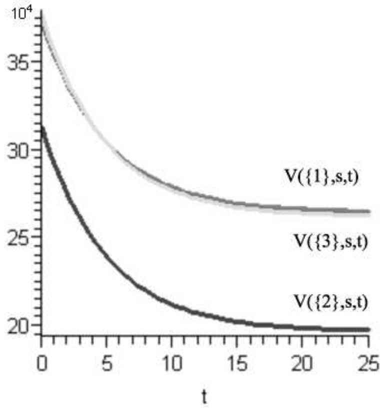


Рисунок 2. Прибыли игроков в случае конкуренции

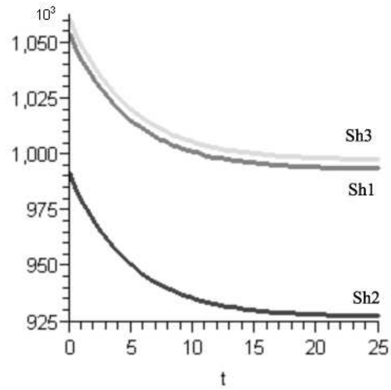


Рисунок 3. Прибыли игроков при кооперации

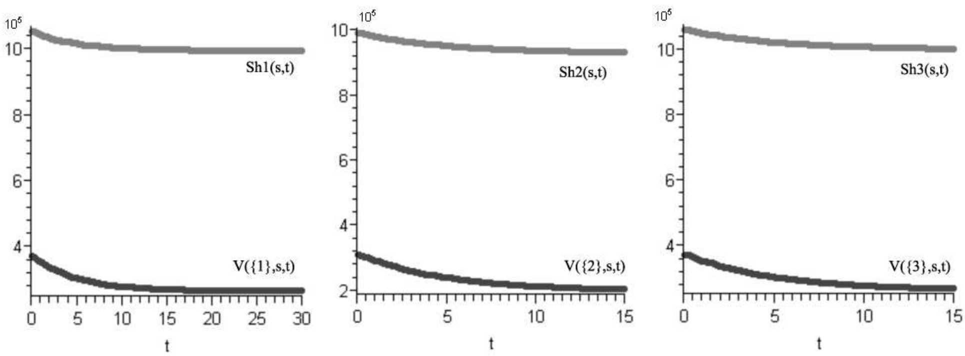


Рисунок 4. Сравнение кооперативных и конкурентных прибылей фирм

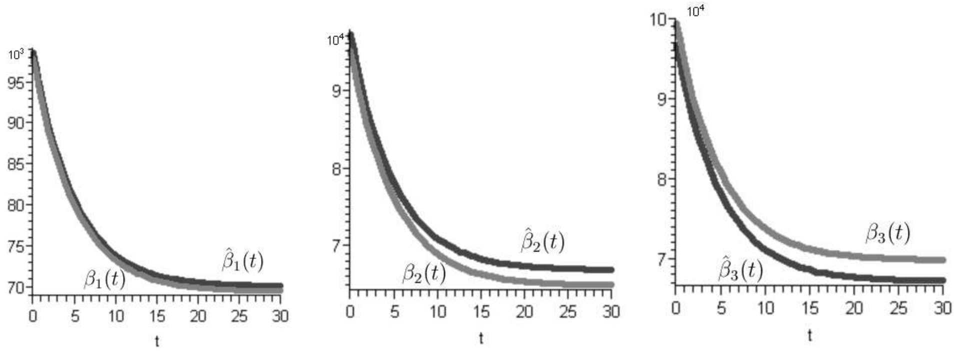


Рисунок 5. Сравнение мгновенных прибылей фирм при кооперации до перераспределения и после.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1977. Вып. 14. № 19. С. 46–52.

2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Мат. теория игр и её приложения. 2009. Т. 1. Вып. 1. С. 102–117.

3. Borkey P., Leveque F. *Voluntary approaches for environmental protection in the European Union - a survey* // European Environment. 2000. V. 10. P. 35–54.

4. Demsetz H. *Toward a theory of property rights* // The American Economic Review. 1967. V. 57. N 2. P. 347-359.

5. Dockner E. J., Jorgensen S., van Long N., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press. 2000. P. 485.

6. Katsoulacos Y., Xepapadeas A. *Environmental policy under oligopoly with endogenous market structure* // Scand. J. of Economics. 1995. V. 97. N 3. P. 411–420.

7. Nash J.F. *Equilibrium points in n-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

8. Petrosyan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. P. 381–398.

9. Petrosyan L., Kozlovskaya N. *Differential coalitional environmental management game* // Game theory and applications. Russia, St.Petersburg State University. V. 14. (Accepted.)

10. Shapley L.S. *A value for n-person games* // Contributions to the Theory of Games II. Prineton: Princeton University Press. 1953. P. 57–69.

11. Stimming M. *Capital accumulation subject to pollution control: Open-Loop versus feedback investment strategies* // Annals of Operations Research. 1999. V. 88. P. 309–336.

12. Yeung D. W. K. *An irrational - behavior - proofness condition in cooperative differential games* // Intern. J. of Game Theory Rew. 2006. V. 8. P. 739–744.

# STABLE SHAPLEY VALUE IN COOPERATIVE GAME OF TERRITORIAL ENVIRONMENTAL PRODUCTION

**Nikolay A. Zenkevich**, St. Petersburg University, Graduate School of Management, Department of Operations Management, Dr.Sc., Associate Professor (zenkevich@gsom.pu.ru).
**Nadezhda V. Kozlovskaya**, St. Petersburg University, Graduate School of Management, Department of Operations Management, PhD student(kknn@yandex.ru).

*Abstract*: A game-theoretic model of territorial environmental production is studied. The process is modeled as cooperative differential game. The stable mechanism of distribution of the common cooperative benefit among players is proposed. We proved that the cooperative total stock of accumulated pollution is strictly less then the pollution under Nash equilibrium for the whole duration of the game. The perfect Nash equilibrium is found. We design a stable Shapley value as a cooperative solution, which is time-consistent. The Shapley value is also strategic stable and satisfies the irrational-behavior-proofness condition. The numerical example is given.

*Keywords*: differential game, cooperative game, dynamic programming, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Shapley value, Nash equilibrium, perfect equilibrium, stability of cooperative solution, time-consistency, strategic stability, irrational-behavior-proofness condition.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 93-106

УДК 519.833.5
ББК В183 З-63

# КОНСЕНСУС-ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ИГР С КОАЛИЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Александра Борисовна Зинченко
Георгий Викторович Мироненко
Полина Александровна Провоторова
Южный Федеральный Университет
344091, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 «а»
e-mail: zinch46@mail.ru, georim89@mail.ru, prov-pa@inbox.ru.

Выделен класс ТП-игр, для которых почти все концепции решения, кроме консенсус-значения, дают парадоксальные результаты. Доказано, что это игры большого босса. Предложено обобщение консенсус-значения для игр с коалиционной структурой.

*Ключевые слова*: коалиционная структура, коалиционное значение, консенсу-значение, игра большого босса, аксиоматизация.

## 1. Введение

Коалиционные структуры (объединения) возникают при формировании картелей, синдикатов, холдингов, политических альянсов и т.д. Такие ситуации моделируются кооперативными играми, позволяющими выделить выгодные коалиции и «справедливо» распределить прибыль между игроками. Если коалиции образовались до начала игры, т.е. известно разбиение $C = \{C_1, \dots C_m\}$ множества игроков $N$, то возможны следующие сценарии.

– Игроки каждой коалиции $C_p \in C$ делят между собой полезность $\nu(C_p)$, которую в состоянии получить коалиция $C_p$ независимо от поведения других игроков.

---

– Все игроки объединяются, но внутри максимальной коалиции $N$ образуются подкоалиции $C_1, \ldots, C_m$ (союзы [5], группы давления [9]), действующие при дележе $\nu(N)$ как единый игрок. Затем выигрыш каждой коалиции $C_p \in C$ распределяется между ее игроками.

Будем рассматривать игры второго типа. Оуэн предложил концепцию решения (коалиционное значение Оуэна [5]), дважды использующую значение Шепли: в игре между коалициями и играх внутри коалиций. Позже были введены коалиционные значения, сочетающие значение Шепли с взвешенным значением Шепли, значение Банзафа с значением Шепли, значение Шепли с $p$-биномиальным значением ($p \in [0, 1]$) и др. Ссылки можно найти, например, в [2]. Относительно недавно для игр с трансферабельной полезностью (ТП-игр) было предложено консенсус-значение [3], косвенно учитывающее возможность образование подкоалиций внутри коалиции $N$.

В данной статье выделен класс имеющих приложения ТП-игр, для которых основные концепции решения приводят к парадоксальным результатам, а консенсус-значение согласуется с моделируемой ситуацией и доминирует по Лоренцу другие решения. Доказывается, что такие игры соответствуют вершине многогранника (0-1)-редуцированных игр большого босса. Предлагается обобщение консенсус-значения для игр с коалиционной структурой. Доказывается, что коалиционное консенсус-значение однозначно определяется аксиомами эффективности, аддитивности, внутренней симметричности, внешней симметричности и свойством нейтрального игрока.

Вторая часть статьи содержит необходимые определения. В третьей части описано консенсус-значение ТП-игры, сформулированы его новые свойства. Четвертая часть посвящена коалиционному консенсус-значению и его аксиоматическому обоснованию.

## 2. Определения

*Игрой с трансферабельной полезностью* называется пара $(N, \nu)$, где $N = \{1, \ldots, n\}$ – конечное множество, $\nu \in G^N = \{g : 2^N \to R \mid g(\oslash) = 0\}$ – *характеристическая функция*. Игру $(N, \nu)$ часто отождествляют с характеристической функцией. Если $\nu, \omega \in G^N$ и $\alpha \in R$, то $\nu + \omega \in G^N$ и $\alpha\nu \in G^N$, где $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$, $(\alpha\nu)(S) = \alpha\nu(S)$, $S \subseteq N$. Игроки $i, j \in N$ *симметричны* в $(N, \nu)$, если $\nu(S \cup i) = \nu(S \cup j)$, $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Игрок $i \in N$ *нейтрален* в $(N, \nu)$, если $\nu(S \cup i) - \nu(S) = \nu(i)$, $S \subseteq N \setminus i$.

Будем обозначать: $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$, $\tilde{x}$ – вектор, полученный из $x \in R^N$ упорядочением координат по неубыванию, $s = \mid S \mid$ – мощность множества $S$, $P^N = \{g : 2^N \to \{0,1\} \mid g(\oslash) = 0, g(N) = 1\}$ – множество простых игр, $Ne(N, \nu)$ – множество нейтральных игроков игры $(N, \nu)$, $I(N, \nu) = \{x \in R^N \mid x(N) = \nu(N); x_i \geq \nu(i), i \in N\}$ – *множество дележей*, $C(N, \nu) = \{x \in I(N, \nu) \mid x(S) \geq \nu(S)$, $S \subset N\}$ – *C-ядро*, $\Re_1^{(i)}(N, \nu)$ – *переговорное множество* (для коалиции $N$) [1], $\eta(N, \nu)$ – *N-ядро* [6]. *D-ядром* $D(N, \nu)$ игры $(N, \nu)$ называется множество всех недоминируемых дележей (дележ $x$ доминирует дележ $y$, если существует такая коалиция $S \subset N$, что $x(S) \leq \nu(S)$ и $x_i > y_i$ для всех $i \in S$). Если $\nu(N) \geq \nu(S) + \sum\limits_{i \in N \setminus S} \nu(i)$, $S \subset N$, то $D(N, \nu) = C(N, \nu)$. Пусть $x, y \in R^N$ и $x(N) = y(N)$. Говорят, что $x$ *доминирует по Лоренцу* $y$, если $\sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{x}_i \geq \sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{y}_i$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ и, по крайней мере, одно из неравенств – строгое. Игра $(N, \nu)$ называется игрой в *(0-1)-редуцированной форме*, если $\nu(N) = 1$, $\nu(i) = 0$ для $i \in N$, $0 \leq \nu(S) \leq 1$ для $S \subset N$. Игра $(N, \nu)$ *квазисбалансирована*, если $m(N, \nu) \leq M^N(N, \nu)$ и $\sum\limits_{i \in N} m_i(N, \nu) \leq \nu(N) \leq \sum\limits_{i \in N} M_i^N(N, \nu)$, где

$$M_i^S(N, \nu) = \nu(S) - \nu(S \setminus i), \; i \in S \subseteq N, \tag{2.1}$$

$$m_i(N, \nu) = \max_{S : i \in S} (\nu(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j^N(N, \nu)), \; i \in N. \tag{2.2}$$

Игра $(N, \nu)$ является (0-1)-редуцированной *игрой большого босса* с игроком 1 в качестве босса, если

$$0 \leq \nu(S_1) \leq \nu(S_2) \leq 1, \; S_1 \subset S_2 \subset N, \; s_1 \geq 2, \tag{2.3}$$

$$\nu(S) = 0, \; s = 1 \text{ или } 1 \notin S, \tag{2.4}$$

$$\nu(N \setminus S) - \sum_{i \in S} \nu(N \setminus i) \leq s - 1, \; 1 \notin S, \; 2 \leq s < n. \tag{2.5}$$

Если упорядочить все непустые коалиции $(S_1, \ldots, S_d)$, то игре $(N, \nu)$ соответствует вектор линейного пространства $R^d$, $d = 2^n - 1$, $i$-я координата которого равна $\nu(S_i)$. Множество $B_n^1$ решений системы (2.3)-(2.5) есть многогранник в $R^d$ (*многогранник (0-1)-редуцированных игр большого босса* с игроком 1 в качестве босса).

*Значением* называется функция $\varphi$, которая каждой игре $(N,\nu)$ ставит в соответствие вектор $\varphi(N,\nu) \in R^N$. Множество значений игры $(N,\nu)$ обозначим через $\Phi(N,\nu)$. Приведем некоторые аксиомы для $\varphi \in \Phi(N,\nu)$.

**Аксиома 2.1.** *(эффективность).* $\sum\limits_{i\in N} \varphi_i(N,\nu) = \nu(N)$.

**Аксиома 2.2.** *(симметричность). Если игроки $i,j \in N$ симметричны в $(N,\nu)$, то $\varphi_i(N,\nu) = \varphi_j(N,\nu)$.*

**Аксиома 2.3.** *(аддитивность).* $\varphi(N,\nu+\omega) = \varphi(N,\nu) + \varphi(N,\omega)$.

**Аксиома 2.4.** *(свойство нейтрального игрока). Если $i \in Ne(N,\nu)$, то $\varphi_i(N,\nu) = \nu(i) + \frac{\nu(N)-\sum\limits_{j\in N}\nu(j)}{2n}$.*

*Значение Шепли* $sh$ и *равномерное значение* $e$ игры $(N,\nu)$, $\nu \in G^N$, определяются формулами

$$sh_i(N,\nu) = \sum_{S:i\in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} M_i^S(N,\nu), \tag{2.6}$$

$$e_i(N,\nu) = \nu(i) + \frac{\nu(N) - \sum\limits_{j\in N}\nu(j)}{n},\ i \in N, \tag{2.7}$$

а *$\tau$-значение* $\tau$ квазисбалансированной игры $(N,\nu)$ - системой

$$\sum_{i\in N} \tau_i(N,\nu) = \nu(N),\ \tau(N,\nu) = \lambda m(N,\nu) + (1-\lambda)M^N(N,\nu),\ \lambda \in [0,1]. \tag{2.8}$$

## 3. Консенсус-значение

Консенсус-значение [3] является обобщением решения игры двух лиц. Пусть $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$ - перестановка $N$, $\Pi(N)$ - множество всех перестановок. Вначале разыгрывается игра двух лиц: игрока $\pi_n$ и коалиции $S_{n-1} = \{\pi_1,\ldots,\pi_{n-1}\}$, действующей как единый игрок. Игрок $\pi_n$ получает $x_{\pi_n} = \nu(\pi_n) + \frac{\Delta_n}{2}$, где $\Delta_n = \nu(N) - \nu(S_{n-1}) - \nu(\pi_n)$, а коалиция $S_{n-1}$ выигрывает $x_{S_{n-1}} = \nu(S_{n-1}) + \frac{\Delta_n}{2}$. Игрок $\pi_n$ выходит из игры. В новой игре между $\pi_{n-1}$ и коалицией $S_{n-2} = \{\pi_1,\ldots,\pi_{n-2}\}$ выигрыши равны: $x_{\pi_{n-1}} = \nu(\pi_{n-1}) + \frac{\Delta_{n-1}}{2}$, $x_{S_{n-2}} = \nu(S_{n-2}) + \frac{\Delta n-1}{2}$, где $\Delta_{n-1} = x_{S_{n-1}} - \nu(S_{n-2}) - \nu(\pi_{n-1})$. Игрок $\pi_{n-1}$ выходит из игры и т.д. Консенсус-значение $k$ есть среднее векторов $x^{\pi} = (x_{\pi_1}, \ldots, x_{\pi_n})$: $k(N,\nu) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\pi \in \Pi(N)} x^{\pi}$. Доказано [3], что консенсус-значение однозначно определяется аксиомами 2.1-2.4 и

$$k(N,\nu) = \frac{e(N,\nu) + sh(N,\nu)}{2}, \tag{3.1}$$

следовательно $k(N,\nu)$ балансирует два крайних принципа распределения дохода от кооперации: эгалитарного, реализуемого $e(N,\nu)$, и утилитарного принципа, отраженного в $sh(N,\nu)$. Приведем примеры, обобщение которых позволит сформулировать новые свойства значения $k$.

*Пример* 3.1. ("Инвестиционная игра"). Рассмотрим проблему кооперативного инвестирования ([8], стр. 92) с тремя инвесторами и исходными капиталами 60, 40, 40 д.е. Имеются следующие возможности: 10% банковский депозит и инвестирование производственного процесса, приносящего 20% прибыли. Начальный вклад в производство не может быть меньше 100. Этой ситуации соответствует игра $(N,\nu)$, где

$$N = \{1,2,3\},\ \nu(1) = 66,\ \nu(2) = \nu(3) = 44,$$
$$\nu(1,2) = \nu(1,3) = 120,\ \nu(2,3) = 88,\ \nu(N) = 164.$$

Устойчивым в [8] назван единственный дележ $x^c = (76,44,44)$ $C$-ядра $C(N,\nu)$. Положив $\nu'(S) = \nu(S) - \sum\limits_{i \in S} \nu(i)$, $S \subseteq N$, перейдем к стратегически эквивалентной игре $(N,\nu')$:

$$\nu'(i) = 0,\ i \in N,\ \nu'(2,3) = 0,\ \nu'(1,2) = \nu'(1,3) = \nu'(N) = 10. \tag{3.2}$$

Получаем $C(N,\nu') = \{(x^c)'\}$, $(x^c)' = (10,0,0)$. Теперь более наглядна парадоксальность "ядерного" распределения: вся прибыль от кооперации достается первому инвестору, несмотря на то, что самостоятельно он может получить только $\nu'(1) = 0$. Вектор Шепли $sh(N,\nu') = (\frac{20}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ также преувеличивает роль первого игрока. Игра $(N,\nu')$ квазисбалансирована, т.к. $C(N,\nu') \neq \oslash$. Согласно (2.1) и (2.2) $M_1^N(N,\nu') = 10$, $M_2^N(N,\nu') = M_3^N(N,\nu') = 0$, $m(N,\nu') = M^N(N,\nu')$. Из (2.8) получаем, что $\tau(N,\nu') = (x^c)'$. Из вложения

$\eta(N,\nu') \subseteq C(N,\nu')$ имеем $\eta(N,\nu') = (x^c)'$. При дележе $k(N,\nu') = (5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ первый игрок получает половину $\nu'(N)$, а другая половина эгалитарно распределяется среди остальных игроков. Нетрудно проверить, что $k(N,\nu')$ доминирует по Лоренцу $sh(N,\nu')$, $(x^c)'$, а следовательно $\eta(N,\nu')$ и $\tau(N,\nu')$.

*Пример* 3.2. Игру $(N,\nu)$ ([3], стр. 691), где

$$N = \{1,2,3\},\ \nu(i) = 0,\ i \in N,\ \nu(2,3) = 0,$$
$$\nu(1,2) = \nu(1,3) = \nu(N) = 1, \tag{3.3}$$

можно интерпретировать как игру "Перчатки" (или "Ботинки"), в которой первый игрок имеет левую перчатку (левый ботинок), а остальные игроки имеют по одной правой перчатке (правому ботинку). Рыночная цена комплекта - 1 д.е. $C(N,\nu) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N,\nu) = \tau(N,\nu) = (1,0,0)$, $sh(N,\nu) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $k(N,\nu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Игра (3.3) является (0-1)-редуцированной формой игры (3.2), следовательно, эти игры стратегически эквивалентны и все предыдущие рассуждения справедливы также для (3.3).

*Пример* 3.3. ("Взвешенная мажоритарная игра"). Три акционера владеют 50, 30 и 20 акциями. Любое решение может быть утверждено акционерами, имеющими простое большинство акций. Эта взвешенная мажоритарная игра (51; 50, 30, 20) совпадает с игрой "Парламент" (три партии, число голосов: 50, 30, 20) и игрой (3.3).

Обобщением (3.3) является игра $(N, b^1)$, где $n \geq 3$,

$$b^1(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } s = 1 \text{ или } 1 \notin S, \\ 1, & \text{в остальных спучаях.} \end{cases} \tag{3.4}$$

**Предположение 3.1.** $(N, b^1)$ *является игрой большого босса с игроком 1 в качестве босса и соответствует крайней точке многогранника* $B_n^1$.

*Доказательство.* $(N, b^1)$ соответствует крайней точке гиперкуба $K = \{\nu \in R^d \mid 0 \leq \nu(S) \leq 1,\ \oslash \neq S \subseteq N\}$ и $B_n^1 \subset K$, поэтому достаточно доказать, что $b^1 \in B_n^1$. Условие (2.4) выполняется для $b^1$ по определению. Пусть $S_1 \subset S_2 \subset N$, $s_1 \geq 2$. Если $1 \in S_2$, то $b^1(S_2) = 1$

и $b^1(S_1) \in \{0,1\}$, следовательно справедливо (2.3). Если $1 \notin S_2$, то $1 \notin S_1$ и $b^1(S_1) = b^1(S_2) = 0$, т.е. условие (2.3) также выполняется. Подставляя $b^1$ в (2.5) и учитывая, что $b^1(N \setminus S) = b^1(N \setminus i) = 1$ для $i \in S$ и коалиций $S$, удовлетворяющих условиям $1 \notin S$, $2 \leq s < n$, получаем верное неравенство $s \geq 1$.

$\square$

**Предположение 3.2.** *Для игры* $(N, b^1)$ *справедливо:*

*(a)* $C(N,b^1) = D(N,b^1) = \Re_1^{(i)}(N,b^1) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N,b^1) = \tau(N,b^1) = (1,0,\ldots,0)$*;*

*(b)* $sh(N,b^1) = (\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n(n-1)}, \ldots, \frac{1}{n(n-1)}), k(N,b^1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n-1)}, \ldots, \frac{1}{2(n-1)})$*;*

*(c)* $k(N,b^1)$ *доминирует по Лоренцу* $x^c$, $sh(N,b^1)$, $\eta(N,b^1)$ *и* $\tau(N,b^1)$.

*Доказательство.* (a) $C(N,b^1) = \{x \in R^N \mid x(N) = \nu(N);\ 0 \leq x_i \leq M_i^N(N,b^1),\ i \in N \setminus \{1\}\}$ [7]. Следовательно $C(N,b^1) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N,b^1) = (1,0,\ldots,0)$. В игре $(N,b^1)$ переговорное множество совпадает с $C$-ядром, $N$-ядро совпадает с $\tau$-значением и центром $C$-ядра [7]. Кроме того, выполняется достаточное условие совпадения $C$-ядра и $D$-ядра.

(b) Так как $e_i(N,b^1) = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и $M_1^S(N,b^1) = 0$ для $S = \{1\}$, $M_1^S(N,b^1) = 1$ в остальных случаях, то векторы $sh(N,b^1)$ и $k(N,b^1)$ легко находятся из (2.6), (3.1)

(c) Доказываемое утверждение вытекает из неравенств $\frac{1}{2(n-1)} > \frac{1}{n(n-1)} > 0$ и предположения о количестве игроков ($n \geq 3$) в игре $(N,b^1)$.

$\square$

## 4. Коалиционное консенсус-значение

Пусть $C = \{C_1,\ldots,C_m\}$ – коалиционная структура (разбиение $N$), $S \subseteq C_p \in C$, $C_p^S = \{C_1,\ldots,C_{p-1},S,C_{p+1},\ldots,C_m\}$ – разбиение $N \setminus (C_p \setminus S)$, $M = \{l \mid C_l \in C\}$ – множество индексов компонент структуры $C$, $(\nu/C)(Q) = \nu(\bigcup\limits_{l \in Q} C_l)$ для всех $Q \subseteq M$, $(\nu/C_p^S)(Q) = \nu(S \cup \bigcup\limits_{l \in Q \setminus p} C_l)$ для $Q \ni p$ и $(\nu/C_p^S)(Q) = (\nu/C)(Q)$ для остальных $Q \subseteq M$. *Игра с коалиционной структурой* $(N,\nu,C)$ распадается на игру $(M,\nu/C)$ между коалициями $C_p$, $p \in M$, и редуцированные игры $(C_p, \nu_p^\psi)$ внутри коалиций. Предполагается, что в качестве концепции решения внешней игры выбрано $\psi \in \Phi(M, \nu/C)$, а во внутренних играх - $\varphi \in \Phi(C_p, \nu_p^{\psi})$. Вес коалиции $S$ в $(C_p, \nu_p^{\psi})$ равен ее выигрышу во вспомогательной игре $(M, \nu/C_p^S)$, т.е. $\nu_p^{\psi}(S) = \psi_p(M, \nu/C_p^S)$. Партнеры $S$ по структуре $C$ в игре $(M, \nu/C_p^S)$ не участвуют. *Коалиционное значение* $f$ ставит в соответствие каждой игре $(N, \nu, C)$ вектор $f(N, \nu, C) \in R^N$, т.е. $f_i(N, \nu, C) = \varphi_i(C_p, \nu_p^{\psi})$, $i \in N$.

*Коалиционным консенсус-значением* $ks$ назовем коалиционное значение, при вычислении которого в качестве функций $\varphi$ и $\psi$ используется консенсус значение, т.е.

$$ks_i(N, \nu, C) = k_i(C_p, \nu_p^k),\ i \in C_p \in C, \tag{4.1}$$

где

$$\nu_p^k(S) = k_p(M, \nu/C_p^S),\ S \subseteq C_p. \tag{4.2}$$

**Лемма 4.1.** *Нейтральный в* $(N, \nu)$ *игрок* $i \in C_p \in C$ *нейтрален в редуцированной игре* $(C_p, \nu_p^k)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$*, где*

$$\Delta_p(M, \nu/C) = \nu(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l). \tag{4.3}$$

*Доказательство.* Пусть $i \in C_p \cap Ne(N, \nu) \neq \oslash$. Нужно показать, что условие $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$ необходимо и достаточно для выполнения соотношений $\nu_p^k(i \cup S) - \nu_p^k(S) = \nu_p^k(i)$, $S \subseteq C_p \setminus i$. Из (4.2) и (3.1) имеем $\nu_p^k(S) = \frac{sh_p(M, \nu/C_p^S) + e_p(M, \nu/C_p^S)}{2}$. Используя (2.6), (2.7), (2.1) и учитывая нейтральность игрока $i$ в $(N, \nu)$, получаем $\nu_p^k(i \cup S) - \nu_p^k(S) = \nu(i)$ для всех $S \subseteq C_p \setminus i$. Рассмотрим игру $(M, \nu/C_p^{\{i\}})$ между компонентами структуры $C_p^{\{i\}}$. Пусть $Q \subseteq M \setminus p$, тогда $(\nu/C_p^{\{i\}})(p \cup Q) - (\nu/C_p^{\{i\}})(Q) = \nu(i \cup \bigcup\limits_{l \in Q} C_l) - \nu(\bigcup\limits_{l \in Q} C_l) = \nu(i) = (\nu/C_p^{\{i\}})(p)$, т.е. одноэлементная коалиция $\{i\}$ есть нейтральный игрок в $(M, \nu/C_p^{\{i\}})$, консенсус-выигрыш которого определяется аксиомой 2.4: $k_p(M, \nu/C_p^{\{i\}}) = \nu_p^k(i) = \nu(i) + \frac{\nu(i \cup \bigcup\limits_{l \in M \setminus p} C_l) - \nu(i) - \sum\limits_{l \in M \setminus p} \nu(C_l)}{2m} = \nu(i) + \frac{\nu(N \setminus C_p) - \sum\limits_{l \in M \setminus p} \nu(C_l)}{2m} = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2m}$. Равенство $\nu_p^k(i) = \nu(i)$ и доказываемое утверждение, выполняются тогда и только тогда, когда $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$.

$\square$

Сформулируем необходимые аксиомы для коалиционного значения $f$.

**Аксиома 4.1.** *(эффективность).* $\sum\limits_{i \in N} f_i(N, \nu, C) = \nu(N)$.

**Аксиома 4.2.** *(аддитивность).* $f(N, \nu+\omega, C) = f(N, \nu, C) + f(N, \omega, C)$.

**Аксиома 4.3.** *(внутренняя симметричность). Если игроки* $i, j \in C_p \in C$ *симметричны в* $(N, \nu)$, *то* $f_i(N, \nu, C) = f_j(N, \nu, C)$.

**Аксиома 4.4.** *(внешняя симметричность). Если игроки* $p, r \in M$ *симметричны в* $(M, \nu/C)$, *то* $\sum\limits_{i \in C_p} f_i(N, \nu, C) = \sum\limits_{i \in C_r} f_i(N, \nu, C)$.

**Аксиома 4.5.** *(модифицированное свойство нейтрального игрока). Пусть* $p \in M$, $i \in C_p \cap Ne(N, \nu) \neq \oslash$. *Если* $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$ *то* $f_i(N, \nu, C) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, *где* $\Delta_p(M, \nu/C)$ *определено (4.3). Если* $C_p \nsubseteq Ne(N, \nu)$ *и* $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, *то*

$$f_i(N, \nu, C) = \nu(i) + \frac{k_p(M, \nu/C) - \sum\limits_{j \in C_p} k_p(M, \nu/C_p^{\{j\}})}{2c_p}. \tag{4.4}$$

Заметим, что, формулы для $\nu/C$ и $\nu/C_p^{\{j\}}$), а также (3.1), (2.6), (2.7) и (4.3) выражают приведенные в аксиоме 4.5 выигрыши нейтральных в $(N, \nu)$ игроков через функцию $\nu$. По лемме 4.1 нейтральный в $(N, \nu)$ игрок $i \in C_p \in C$ может уже не быть нейтральным в редуцированной игре внутри коалиции $C_p$. Аксиома 4.5 определяет выигрыши тех игроков из $Ne(N, \nu)$, которые принадлежат коалициям $C_p$, удовлетворяющим некоторым условиям. Если $C_p$ состоит только из нейтральных в $(N, \nu)$ игроков, то $i \in C_p$ получает $\nu(i)$ и "добавку" $\frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, одинаковую для всех игроков из $C_p$. Если не все игроки из $C_p$ нейтральны в $(N, \nu)$ и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, то $i \in C_p \cap Ne(N, \nu)$ получает $\nu(i)$ плюс $\frac{1}{2c_p}$-ю часть разности между консенсус-выигрышем $k_p(M, \nu/C)$ коалиции $C_p$ в игре между компонентами структуры $C$ и суммой консенсус-выигрышей $k_p(M, \nu/C_p^{\{j\}})$ игроков из $C_p$, которые они получают, играя самостоятельно против всех коалиций $C_l \in C$, $l \in M \setminus p$. И в этом случае "добавка" к $\nu(i)$ одинакова для всех $i \in C_p \cap Ne(N, \nu)$. Формула (4.4) аксиомы 4.5 получается из формулы выигрыша нейтрального игрока в аксиоме 2.4 заменой функции $\nu$ на $\nu_p^k$ . Нетрудно проверить, что при одновременном выполнении условий $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$ и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, обе формулы из аксиомы

4.5 принимают вид $f_i(N,\nu,C) = \nu(i)$, $i \in C_p$.

**Лемма 4.2.** *Коалиционное значение $ks$ удовлетворяет аксиомам 4.1-4.5.*

*Доказательство.* Из определения $ks$, свойств консенсус-значения $k$ и [3] следует, что $ks$ удовлетворяет аксиомам 4.1-4.4. Рассмотрим последнюю аксиому. Пусть $i \in C_p \in C$ - нейтральный игрок в $(N,\nu)$.

1. Если $C_p \subseteq Ne(N,\nu)$, т.е. $C_p$ состоит только из нейтральных в $(N,\nu)$ игроков, то $\nu(C_p) = \sum\limits_{j\in C_p} \nu(j)$ и $\nu(R\cup S) - \nu(R) = \nu(S)$, $S \subseteq C_p$, $R \subseteq N \setminus C_p$. Таким образом, любая коалиция $\oslash \neq S \subseteq C_p$ является нейтральным игроком во внешней игре между компонентами структуры $C_p^S$. При доказательстве леммы 4.1 было показано, что $\nu_p^k(i) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2m}$. Аналогично доказываются соотношения $\nu_p^k(S) = \nu(S) + \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2m}$, $\oslash \neq S \subseteq C_p$. Пусть $u,\omega \in G^{C_p}$ и $u(S) = \nu(S)$, $\omega(S) = \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2m}$. Тогда $\nu_p^k = u + \omega$. Все игроки в $(C_p,\omega)$ симметричны, поэтому $k_i(C_p,\omega) = \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2c_p m}$. В $(C_p,u)$ все игроки нейтральны и по аксиоме 2.4: $k_i(C_p,u) = \nu(i) + \frac{\nu(C_p) - \sum\limits_{j\in C_p}\nu(j)}{2c_p} = \nu(i)$. Из (4.1) и аксиомы 2.3 имеем $ks_i(N,\nu,C) = k_i(C_p,\nu_p^k) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2c_p m}$, т.е. $ks$ удовлетворяет аксиоме 4.5.

2. Если $C_p \nsubseteq Ne(N,\nu)$ и $\Delta_p(M,\nu/C) = 0$, то игрок $i$ нейтрален в $(C_p,\nu_p^k)$ и $\nu_p^k(i) = \nu(i)$. Из (4.1) и аксиомы 2.4 получаем $ks_i(N,\nu,C) = \nu_p^k(i) + \frac{\nu_p^k(C_p) - \sum\limits_{j\in C_p}\nu_p^k(j)}{2c_p}$. Согласно (4.2): $\nu_p^k(C_p) = k_p(M,\nu/C)$, $\nu_p^k(j) = k_p(M,\nu/C_p^{\{j\}})$, $j \in C_p$. Следовательно для $ks$ выполняется (4.4).

□

При обоснования коалиционного консенсус-значения будем использовать *игру* $(N,u_T)$ *единогласия коалиции* $T$, где $\oslash \neq T \subseteq N$, $u_T(S) = 1$ для $S \supseteq T$, $u_T(S) = 0$ в остальных случаях. Игроки из $Ne(N,u_T) = N\setminus T$ являются нулевыми в $(N,u_T)$, т.к. для них $\nu(i) = 0$. Множество $T$ состоит из вето-игроков. Каждая пара нулевых игроков (или пара вето-игроков) симметрична.

**Теорема 4.1.** *Коалиционное консенсус-значение $ks$ является единственным значением для игр $(N,\nu,C)$, удовлетворяющим аксиомам 4.1-4.5.*

*Доказательство.* Пусть $f$ - коалиционное значение, удовлетворяющее аксиомам 4.1 - 4.5. Система функций $\{u_T\}_{T \in 2^N \setminus \oslash}$ является базисом в $G^N$, поэтому, учитывая лемму 4.2 и аксиому 4.2, достаточно показать, что $f$ однозначно определяется для игры $(N, \alpha u_T, C)$, где $\alpha \in R$, $\oslash \neq T \subseteq N$. Пусть $D = \{l \in M \mid C_l \cap T \neq \oslash\}$ - множество индексов компонент структуры $C$, содержащих по крайней мере одного игрока из $T$. Так как $(\alpha u_T/C)(Q) = (\alpha u_T)(\bigcup\limits_{l \in Q} C_l) = \alpha$ для $Q \supseteq D$ и $(\alpha u_T/C)(Q) = 0$ в остальных случаях, то игра $(M, \alpha u_T/C)$ между компонентами структуры $C$ совпадает с $(M, \alpha u_D)$, где $(M, u_D)$ - игра единогласия коалиции $D$. Каждой коалиции $C_p$, $p \notin D$, состоящей из нейтральных в $(N, \alpha u_T)$ игроков, соответствует нейтральный и одновременно нулевой игрок в $(M, \alpha u_D)$. Коалиции $C_p$, $p \in D$, соответствует вето-игрок в $(M, \alpha u_D)$. Из (3.1) получаем

$$k_p(M, \alpha u_T/C) = k_p(M, \alpha u_D) = \frac{e_p(M, \alpha u_D) + sh_p(M, \alpha u_D)}{2}, \ p \in M. \tag{4.5}$$

Известно, что

$$sh_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, \\ \frac{\alpha}{d}, & p \in D. \end{cases}$$

Так как $e_p(M, \alpha u_D) = (\alpha u_D)(p) + \frac{(\alpha u_D)(M) - \sum\limits_{j \in M} (\alpha u_D)(j)}{m}$, $(\alpha u_D)(M) = \alpha$, $(\alpha u_D)(j) = \alpha$, если $j \in D$ и $d = 1$, $(\alpha u_D)(j) = 0$ в остальных случаях, то

$$e_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, d = 1, \\ \alpha, & p \in D, d = 1, \\ \frac{\alpha}{m}, & d \geq 2, \end{cases}$$

$$k_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, d = 1, \\ \alpha, & p \in D, d = 1, \\ \frac{\alpha}{2m}, & p \notin D, d \geq 2, \\ \frac{\alpha(m+d)}{2md}, & p \in D, d \geq 2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Игра $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ между $j \in C_p \in C$ и коалициями $C_l$, $l \in M \setminus p$, получается из $(M, \alpha u_T/C)$ удалением из компоненты $C_p$ всех игроков кроме $j$. Если удаляются игроки, не принадлежащие $T$, то характеристическая функция не меняется, т.е. $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ совпадает с

$(M, \alpha u_T/C)$ и с $(M, \alpha u_D)$. Другими словами, $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ совпадает с $(M, \alpha u_D)$, если $p \notin D$ или $j$ является единственным вето-игроком компоненты $C_p$. Если из $C_p$ удаляется хотя бы один игрок, принадлежащий $T$, то игра $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ становится нулевой. Следовательно

$$k_p(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}}) = \begin{cases} k_p(M, \alpha u_D), & \text{если } p \notin D \text{ или } C_p \cap T = \{j\}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.7}$$

1. Пусть $p \notin D$. Тогда $C_p \subseteq Ne(N, \alpha u_T)$, т.к. компонента $C_p$ не содержит вето-игроков, и $(\alpha u_T)(i) = 0$ для всех $i \in C_p$. По аксиоме 4.5: $f_i(N, \alpha u_T, C) = \frac{\Delta_p(M, \alpha u_T/C)}{2c_p m}$, $i \in C_p$, где $\Delta_p(M, \alpha u_T/C) = \alpha$ , если $d \geq 2$, и $\Delta_p(M, \alpha u_T/C) = 0$ , если $d = 1$. Таким образом, аксиома 4.5 однозначно определяет выигрыши всех игроков каждой коалиции $C_p$, $p \notin D$.

2. Пусть $p \in D$. Тогда $C_p \nsubseteq Ne(N, \alpha u_T)$. В данном случае $\Delta_p(M, \alpha u_T/C) = (\alpha u_T)(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} (\alpha u_T)(C_l) = 0$. Обозначив $\xi = \frac{\Delta_p(M, \alpha u_T/C)}{2m}$, имеем $\sum_{p \notin D} \sum_{i \in C_p} f_i(N, \alpha u_T, C) = (n-d)\xi$. Каждая пара игроков $r, l \in D$ симметрична в $(M, \alpha u_T/C)$ и $(\alpha u_T)(N) = \alpha$, следовательно по аксиомам 4.1, 4.4

$$\sum_{i \in C_p} f_i(N, \alpha u_T, C) = \frac{\alpha - (n-d)\xi}{d}, \ p \in D. \tag{4.8}$$

Аксиома 4.5 и формулы (4.4)-(4.7) однозначно определяют $f_i(N, \alpha u_T, C)$ для нейтральных игроков $i \in C_p \setminus T = C_p \cap Ne(N, \alpha u_T)$ коалиций $C_p$, $p \in D$. Используя эти значения, аксиому 4.3 и формулу (4.8), получаем единственные значения $f_i(N, \alpha u_T, C)$ для $i \in T$.

Таким образом, аксиомы 4.1, 4.3 - 4.5 однозначно определяют значения $f_i(N, \alpha u_T, C)$ для всех $i \in N$.

$\square$

*Замечание* 4.1. Для коалиционного консенсус-значения выполняется

$$\sum_{i \in C_p} ks_i(N, \nu, C) = ks_p(M, \nu/C, \{M\}) = k_p(M, \nu/C).$$

Левая часть этого соотношения называется свойством внешней игры, а правая - свойством согласованности. Оба свойства используются для аксиоматической характеристики коалиционных значений.

*Замечание* 4.2. Коалиционное консенсус-значение является одним из немногих коалиционных значений, не удовлетворяющих свойству нулевого игрока (игрок $i \in N$, для которого $M_i^S(N,\nu) = 0$, $S \subseteq N$, должен получить нулевой выигрыш). Однако в отличие, например, от двухэтапного Шепли-значения [4], выигрыш каждой коалиции $C_p \in C$ распределяется с учетом "внешних" возможностей игроков.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R.J., Maschler M. *The bargaining set for cooperative games* // Advances in Game Theory. Princeton University Press. Princeton. 1964. P. 443–447.

2. Gomez-Rua M., Vidal-Puga J. *The axiomatic approach to three values in games with coalition structure*. MPRA Paper 8904. 2008. P. 1–30.

3. Ju Y., Borm P., Ruys P. *The consensus value: a new solution concept for cooperative games* // Social Choice and Welfare. 2007. V. 28. N 4. P. 685–703.

4. Kamijo Y. *A Two-step Shapley value in a cooperative game with a coalition structure* // 21 COE-GLOPE Working Paper Series. 2007. V. 28. P. 1–9.

5. Owen G. *Values of games with a priori unions*. Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Springer-Verlag, Berlin. 1977. P. 76–88.

6. Schmeidler D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. V. 17. P. 1163–1170.

7. Tijs S. *Big boss games, clan games and information market games* // Game Theory and Applications. Academic Press, San Diego. 1990. P. 410–412.

8. Waegenaere A. De, Suijs J, Tijs S. *Stable profit sharing in cooperative investment* // OR Spectrum. 2005. V. 27. N 1. P. 85–93.

9. Winter E. *A value for cooperative games with levels structure of cooperation* // International Journal of Game Theory. 1989. V. 18. N 2. P. 227–240.

# A CONSENSUS VALUE FOR GAMES WITH COALITION STRUCTURE

**Alexandra B. Zinchenko**, Southern Federal University, Cand.Sc., dosent (zinch46@mail.ru).
**George V. Mironenko**, Southern Federal University, magistr (georim89@mail.ru).
**Polina A. Provotorova**, Southern Federal University, magistr (prov-pa@inbox.ru).

*Abstract*: The class of TU-games for which almost all solution concepts, except the consensus value, yield paradoxical results is selected. It is proved, that it is big boss games. Generalisation of consensus value for games with coalition structure is introduced.

*Keywords*: coalition structure, coalition value, consensus value, big boss game, axiomatization.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 107-124

УДК 519:301
ББК 60.54; 32.81

# ИГРЫ И СЕТИ

Дмитрий Александрович Новиков
Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65
e-mail: novikov@ipu.ru

Статья носит обзорный характер и посвящена структуризации современных направлений в играх на сетях. Вводится система классификаций последних с точки зрения теории игр и теории графов.

*Ключевые слова*: теория игр, теория графов, игры на сетях.

## 1. Введение

На протяжении многих лет и игровые, и графовые модели успешно используются для описания сложных систем.

Согласно определению, приведенному в [5], *теория игр* – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах. Результаты, полученные в теории игр, нашли множество приложений в самых разных областях – в социологии [37, 38, 47], экономике [24, 43, 44], организационном управлении [12, 29], экологии [3, 38], военном деле [4, 14] и др.

*Теория графов* в качестве теоретической дисциплины может рассматриваться как раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами [2]. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы (см. примеры приложений теории графов в [2, 4, 37, 38, 42]).

**Графы и игры.** Между теорией игр и теорией графов существует глубокая взаимосвязь. Можно привести множество примеров использования конструкций и результатов теории графов в игровых постановках:

– древовидный граф задает структуру принятия решений в игре в развернутой форме [35];

– граф (вершины - игроки) задает структуру возможных коалиций [12]. В более общем случае рассматриваются кооперативные игры на сетях, связанные с формированием коалиций (network coalition formation games) - см. обзор в [42] и в открытом Интернет-издании "Coalition Theory Network Newsletter";

– на графе в дискретном времени осуществляется «игра поиска» (вершины - позиции игроков, ребра - возможные пути переходов) [34];

– ориентированный граф описывает, от чьих действий зависят выигрыши агентов (например, для реализуемости равновесия Нэша достаточно связности графа), в более общем случае граф отражает структуру информированности игроков [31] или структуру коммуникаций между игроками [27];

– граф отражает постоянные или временные связи (информационные, технологические, подчиненности и т.п.) между игроками [11, 22, 27, 28];

и т.д.

Отдельно следует выделить *теорию сетевых игр* – относительно молодой (развивающийся с конца 70-х годов прошлого века) раздел теории игр, акцентирующий внимание как раз на формировании сетевых структур - устойчивых связей между игроками - в условиях несовпадения интересов и/или различной информированности последних (для ознакомления см. обзор [10] и монографию [42]).

Наряду с термином «сетевые игры» (network games), все чаще встречается термин *«игры формирования сетей»* (network formation games), более соответствующим сути игры, результатом которой является сеть, связывающая игроков. Эта тенденция имеет свое обоснование – сетевые игры могут рассматриваться как включающие в себя

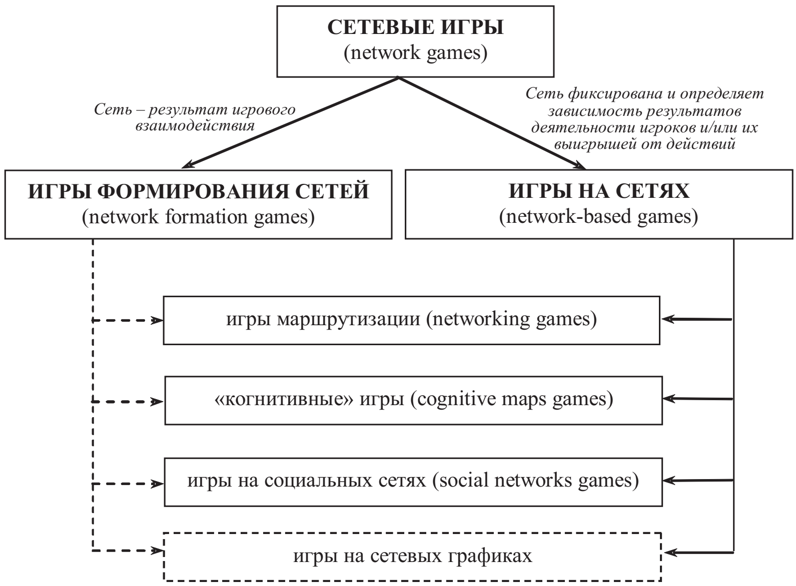


Рисунок 1. Сетевые игры

(см. Рис. 1) игры формирования сетей и *«игры на сетях»* (network-based games), причем в последних «сеть» фиксирована. Среди игр на сетях можно, в свою очередь, выделить (см. Рис. 1) [13]:

– *игры маршрутизации* (networking games);

– *«когнитивные» игры* (cognitive maps games);

– *игры на социальных сетях* (social networks games);

– *игры на сетевых графиках*[1]

На качественном уровне различие между играми формирования сетей и играми на сетях состоит в том, что в первых предметом выбора игроков являются переменные, относящиеся к парному взаимодействию между игроками, а в играх на сетях - переменные, описывающие вершины сети (значения факторов в играх на когнитивных картах, мнения агентов в играх на социальных сетях и т.д.).

[1] Данному классу игр пока не было уделено должного внимания исследователей. Он может быть охарактеризован как игры субъектов, выделяющих ресурсы, необходимые для выполнения операций сетевого графика некоторого проекта. То есть, игры на сетевых графиках - теоретико-игровое обобщение задачи распределения ресурсов на сетях, являющейся хрестоматийной для календарно-сетевого планирования и управления [2].

В будущем эти модели, наверное, целесообразно формально объединить (см. пунктирные линии на Рис. 1). Эффект от такого объединения может быть обусловлен тем, что во многих играх формирования сетей (например, в моделях информационных коммуникаций в многоагентных системах) для расчета выигрышей игроков требуется привлекать модель сетевой динамики, как и в играх на сетях. Объединение моделей приведет к двухэтапной игре, на первом этапе которой игроки формируют сеть, а на втором этапе используют сформированную сеть для передачи информации, ресурсов и т.д. в соответствии с концепцией игр на сетях.

## 2. Игры на сетях

В последние годы все чаще появляются разнообразные содержательные постановки задач описания и исследования такого взаимодействия игроков, что результат их взаимодействия (или связь между выбираемыми действиями или стратегиями и выигрышами) определяется той или иной «сетевой» («теоретико-графовой») моделью. Такого рода игры, как отмечалось выше, называют играми на сетях. Приведем несколько «примеров».

*Игры маршрутизации* на сегодняшний день представляют собой не только наиболее развитый, но и очень бурно развивающийся раздел сетевых игр. Данное направление возникло после работы [45], посвященной маршрутизации неделимого трафика. Второй вехой является работа [46] по маршрутизации делимого трафика.

В сетевых играх зачастую доминируют транспортные и телекоммуникационные интерпретации (см., например, монографии [42, 46], пионерскую статью [48] и обзор [41]), то есть сеть является «инструментом» и/или ограничением взаимодействия игроков.

Следует признать, что игры маршрутизации заслуживают отдельного русскоязычного обзора в одном из ведущих теоретико-игровых журналов, что очень важно для привлечения отечественных специалистов к участию в развитии этого перспективного направления.

*Когнитивные игры* [26], в которых когнитивная карта [40] – взвешенный ориентированный граф (вершинами которого являются факторы, значения которых измеряются в непрерывной или нечеткой шкале, а взвешенными или функциональными дугами отражается взаимовлияние факторов) – используется для учета причинно-следственных связей и взаимовлияния факторов, а также для моделирования динамики слабоформализуемых систем [1, 20, 25]. Когнитивные модели имеют множество приложений – см. [25, 38, 40]. Для первоначального ознакомления с этой областью можно порекомендовать классические монографии [38, 40] и современные обзоры [1, 16, 19].

Основной целью использования когнитивных карт является качественный анализ, основывающийся в большинстве случаев на имитационном моделировании (реже аналитически решаются обратные задачи управления) динамики ситуаций (тенденций, направлений изменения значений факторов, исследовании сценариев и т.д.). Например, описав взаимосвязь между факторами в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка и задав начальные значения, можно анализировать динамику факторов, «установившиеся» значения и т.д., рассматривая все эти аспекты с точки зрения лиц, заинтересованных в том или ином развитии ситуации, или исследуя несовпадение целей различных субъектов. Имея модель связи между факторами можно рассматривать игровую постановку - пусть игроки имеют возможность влиять на начальные значения факторов (например, для каждого игрока задано множество «контролируемых» им факторов), а их выигрыши зависят от «установившихся» значений факторов. Пример линейной игры такого рода рассмотрен в [26].

*Игры на социальных сетях*, в которых вершинами являются агенты - участники социальной сети, а взвешенные дуги отражают степени их «доверия» друг другу или влияния друг на друга [7, 8, 38, 42]. Мнение каждого агента формируется под влиянием его начального мнения и мнений других агентов с учетом их доверия друг другу (динамика мнений описывается системой линейных дифференциальных или разностных уравнений). Помимо агентов, в модели существуют игроки, которые могут влиять на агентов и их взаимодействие, то есть, игроки могут осуществлять *управление* агентами. Зная связь между начальными мнениями, а также структурой социальной сети, и итоговыми мнениями, можно ставить и решать задачу формирования игроками таких начальных мнений у агентов и таких связей между ними (включая как структуру, так и степени доверия), которые были бы равновесием (в том или ином смысле) соответствующей игры [9].

Другим примером является использование аппарата *сетей Петри* [39]. И так далее.

Общим для приведенных примеров, да и для игр на сетях вообще, является следующее. Связь между действиями игроков и результатом, который определяет их выигрыши, описывается в рамках достаточно простой «сети» динамической системой, или системой разностных уравнений и т.п. То есть, сеть является моделью взаимодействия игроков (факторов и т.п.). Дальше все сводится к анализу свойств соответствующей динамической системы, а затем - к той или иной классической теоретико-игровой постановке (в общем случае - к динамической игре [26, 36]). Отметим, что несколько в стороне находятся networking games, в которых динамики как таковой обычно нет, а решением считается равновесие Нэша (в случае неделимого трафика) или равновесие Вардропа (в случае делимого трафика).

Более того, если рассматривать сеть как объект управления, то, исследовав свойства этой сети - умея описывать ее динамику в зависимости от тех или иных параметров и выделив управляемые переменные (параметры, которые подвергаются целенаправленному изменению со стороны управляющего органа), можно ставить и решать задачи управления. Поясним последнее утверждение.

## 3. Задача управления

Обсудим качественно общую постановку задачи управления некоторой системой. Пусть имеется *управляющий орган* и управляемая система (*объект управления*). Состояние управляемой системы зависит от внешних воздействий, воздействий со стороны управляющего органа (управления) и, быть может (если объект управления активен, то есть также является субъектом – что характерно для социально-экономических, организационных систем), действий самой управляемой системы – см. Рис. 2. Задача управляющего органа заключается в том, чтобы осуществить такие управляющие воздействия (жирная линия на Рис. 2), чтобы с учетом информации о внешних воздействиях (пунктирная линия на Рис. 2) обеспечить требуемое состояние управляемой системы.

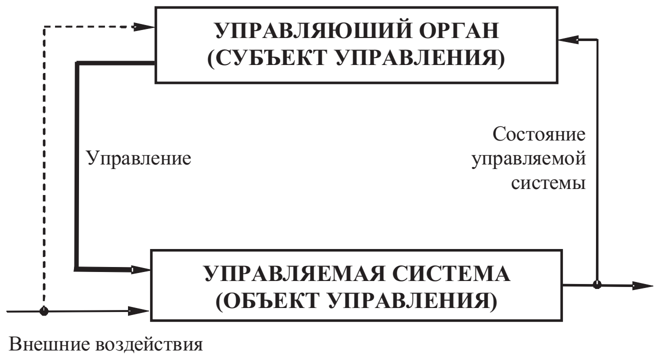


Рисунок 2. Структура системы управления

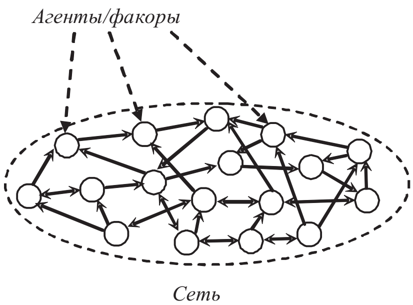


Рисунок 3. Сеть как модель объекта (объекта управления)

Управляемая система может описываться различными способами – системой дифференциальных уравнений, набором логических правил и др., – отражающими зависимость состояний от внешних факторов, управлений, предшествующих состояний и т.д. В частности, может использоваться и та или иная сетевая модель – см. Рис. 3, в которой, например, вершины соответствуют компонентам вектора состояний или агентам - участникам системы, а дуги – их влиянию друг на друга.

В [29] была предложена система классификаций задач управления, в которой основанием являлся предмет, на который оказывается воздействие в процессе управления. Так, были выделены:

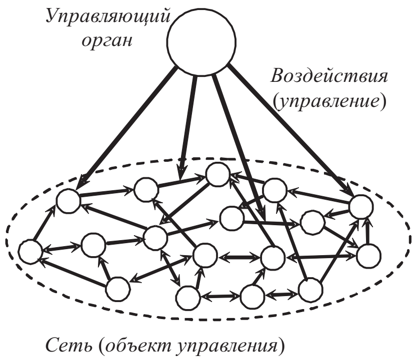


Рисунок 4. Управление объектом, описываемым сетью

– управление составом (набором элементов, входящих в состав управляемой системы);

– управление структурой (связями между элементами);

– институциональное управление (управление ограничениями и нормами деятельности элементов системы);

– мотивационное управление (управление предпочтениями);

– информационное управление (управление информированностью элементов системы - той информацией, которой они обладают на момент принятия решений).

В «сетевой» интерпретации, то есть когда объект управления описывается графом (причем вершины графа «пассивны», то есть не обладают собственными предпочтениями и информированностью), получаем, что управление может заключаться в целенаправленном воздействии на (см. Рис. 4) следующие компоненты объекта управления:

– состав управляемой системы (то есть, управление может заключаться в удалении или добавлении вершин);

– структуру (связи между элементами) управляемой системы (то есть, управление может заключаться в удалении или добавлении дуг);

– значения параметров, соответствующих вершинам графа (значения состояний) и его дуг (значения параметров, отражающих взаимосвязь между элементами системы).

Отметим, что изучение «управления сетью» представляет собой

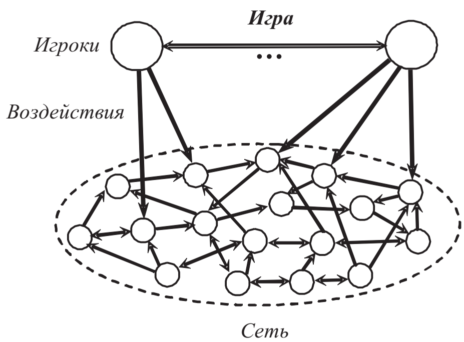


Рисунок 5. Игра «на сети»

самостоятельную нетривиальную задачу, для решения которой может использоваться аппарат исследования операций и оптимального управления. Кроме того, отдельным вопросом является устойчивость, причем как устойчивость, например, по Ляпунову управляемой системы, так и устойчивость решений по параметрам модели (корректность задачи и т.д.) [21, 23].

Усложним рассматриваемую модель, предположив, что существуют несколько (как минимум, два) управляющих органа – *игрока*, каждый из которых может оказывать определенные воздействия на те или иные (контролируемые им) компоненты объекта управления - см. Рис. 5.

Если предпочтения каждого из игроков (их «критерии эффективности» или целевые функции) зависят от состояния управляемого объекта (определяемого, в общем случае, действиями всех игроков), то получаем игру (см. определение выше) на сети (см. [9, 29]).

Предположим, что множество игроков, множества их допустимых действий, целевые функции (определенные на множестве действий и состояний сети) и сеть (включая все ее свойства, в том числе – взаимосвязь между действиями игроков и состоянием сети), информированность игроков и порядок принятия ими решений являются общим знанием среди игроков[2]. Совокупность перечисленных пара-

[2] То есть перечисленные параметры известны всем игрокам, всем известно, что всем это известно и т.д. до бесконечности [31]. Отказ от этого предположения

метров задает *динамическую игру* (см. обзоры в [4, 32, 36, 44]), то есть, игра на сети в рассматриваемом случае может быть сведена к динамической игре.

Исследование игр на сетях включает следующие общие этапы:

1) описание сети и исследование ее динамики;

2) описание множества игроков, их предпочтений, информированности, множеств допустимых стратегий и контролируемых ими параметров;

3) сведение игры на сети к той или иной известной теоретико-игровой модели (игре в развернутой форме, игре в нормальной форме, кооперативной игре и т.д.).

На этом «сетевая» специфика заканчивается и начинается этап классического теоретико-игрового анализа, результаты которого, конечно, должны быть затем проинтерпретированы в «сетевых» терминах. Другими словами, задача заключается в том, чтобы свести исходную «игру на сети» к такой игре, для которой уже примен?м весь тот богатый инструментарий, который на сегодняшний день накоплен в теории игр.

Множество вариантов различных моделей «сетей» и определений игр на них обусловливают необходимость введения соответствующей системы классификаций. При этом возможны две почти независимые системы классификаций - с точки зрения игр и с точки зрения сетей, «на которых» эти игры определяются.

## 4. Классификация игр на сетях

Введем систему оснований классификации **с точки зрения теории игр**, перечислив основания классификации и возможные значения признаков классификации [3].

1. Вид динамической системы (при наличии в сетевой модели динамики). По этому основанию можно различать *линейные игры* (когда приращения «значений вершин» линейно зависят от значений

приведет к рассмотрению рефлексивных игр на сетях.

[3]По каждому основанию возможно выделение большего числа подклассов (числа значений признаков классификации). Можно также увеличивать и число оснований, заимствуя их из теории оптимального управления, из исследования операций и т.д.

других вершин, их приращений и «управления») и *нелинейные игры.*

2. Информированность игроков. Возможные значения признаков классификации – параметры и текущие результаты игры являются общим знанием, или общее знание отсутствует. В последнем случае получаем *рефлексивные игры на сетях* (см. в [31] описание рефлексивных игр в нормальной форме). Использование этого класса игр может оказаться эффективным инструментом моделирования информационного противоборства, информационных войн и т.д. [20, 30]. В зависимости от того, какие параметры наблюдаемы для различных игроков, может иметь место *информационная дискриминация* [35] некоторых игроков.

3. Наличие или отсутствие неопределенности (как симметричной, так и асимметричной – когда игроки обладают различной априорной частной информацией, и этот факт является общим знанием). Более простым является детерминированный случай, в то время как, например, *игры на сетях с неопределенностью* (симметричной) могут отражать ситуации принятия решений и/или сценарного моделирования в условиях неопределенности.

4. Дискретность или непрерывность времени. В случае зависимости «значений вершин» от действий только соответствующих игроков, получаем классические *дифференциальные игры*, представляющие чрезвычайно развитое и богатое результатами направление теории игр (см. [12, 35] и ссылки в них).

5. Структура целевых функций игроков. Целевая функция каждого игрока может зависеть от динамики «значений всех вершин» (траектории) и его собственного действия. Возможны обобщения, когда выигрыш каждого игрока явным образом зависит от действий всех игроков. Возможны *интегральные критерии* – когда выигрышем игрока является интеграл по времени (быть может, нормированный на продолжительность – усредненный критерий) от траектории и действий игроков, или *терминальные критерии* – когда выигрыши игроков зависят от «значений вершин» в конечный момент времени. Возможно выделение для каждого из игроков собственного множества целевых вершин и т.д.

6. Интервал времени, на котором рассматривается динамика и

для которого решается задача управления. Этот интервал может быть *конечным* или *бесконечным.*

7. Структура ограничений. Могут присутствовать только ограничения на индивидуальные действия игроков. Дополнительно могут присутствовать и *ограничения совместной деятельности* [27, 29], или/и индивидуальные ограничения могут задаваться конструктивно (например, в виде ограниченности тех или иных «интегралов» по времени от действий игроков).

8. Дальновидность игроков. В условиях полной информированности и общего знания при конечном интервале времени, на котором рассматривается динамика, игроки могут сразу выбрать вектор своих действий на все будущие периоды времени (так называемое *«программное»* принятие решений). *Дальновидность игроков*, то есть число учитываемых ими будущих периодов, может быть меньше интервала времени, на котором рассматривается динамика. Тогда необходимо рассматривать *скользящее принятие решений*, при котором игроки могут брать или не брать на себя обязательства друг перед другом о выборе определенных действий (см. модели динамических активных систем в [32]).

9. Моменты времени выбора игроками своих действий. В частности, возможны следующие варианты: так называемое *«импульсное» управление* – когда действия игроков явно влияют на изменения значений вершин только в одном (как правило, в начальном) периоде или в течение нескольких первых периодов, а дальше имеет место релаксационная динамика. Управление может быть *«непрерывным»* – когда действия игроков явным образом влияют на значения вершин в каждом периоде. Наконец[4], управление может быть *периодическим.*

10. Множества вершин, контролируемых различными игроками. В общем случае в динамической игре динамика значения каждой вершины зависит от действий всех игроков. В частном случае возможно выделение для каждого игрока множества непосредственно управляемых им вершин графа. Множества вершин, управляемых различными игроками, могут пересекаться или пересечения могут

---

[4]Естественно, в общем случае у каждого игрока может иметься собственная последовательность моментов времени, в которые выбранные им действия в явном виде влияют на изменение значений тех или иных вершин.

быть запрещены.

11. Последовательность ходов. Игроки могут принимать решения (выбирать действия) *одновременно*. Последовательность выбора игроками действий может быть различна внутри одного временнего интервала – получаем в случае двух игроков *многошаговые иерархические игры* [6, 15, 28], в случае большего числа игроков - многошаговые многоуровневые иерархические игры. Или различные игроки могут выбирать свои действия в различные временные интервалы – получаем аналог игр в развернутой форме или *позиционных игр*.

12. Возможность образования коалиций. Принимая решения, игроки могут обмениваться информацией, договариваться о совместных действиях и перераспределении выигрышей, что приведет к *кооперативной игре*.

**Вторая система оснований классификации** (классификации сетевых структур) может быть описана **с точки зрения теории графов** – могут использоваться [26]:

– *функциональные графы* (в которых «сила влияния» одной вершины на другую является известной функцией от «значений этих вершин»);

– *графы с запаздыванием* (в которых изменение «значения одной вершины» приводит к изменению «значения другой вершины» с некоторой задержкой);

– *модулируемые графы* (в которых «сила» влияния одной вершины на другую может зависеть от «значения» третьей – модулирующей – вершины);

– *иерархические графы* [28];

– *вероятностные графы* (в которых каждой дуге, помимо силы связи, поставлена в соответствие вероятность реализации воздействия);

– *нечеткие графы* [18] и т.д. Различные интерпретации вершин, дуг и «весов» на дугах, а также различные функции, определяющие взаимовлияние вершин, приводят к многообразию возможных моделей сетевых структур.

## 5. Заключение

Комбинируя различные значения признаков по каждому из перечисленных оснований классификации, а также выбирая тот или иной вид сетевой структуры, можно, с одной стороны, систематически перечислить различные виды игр на сетях. С другой стороны, любую конкретную игру можно попытаться отнести к тому или иному классу.

Наличие системы классификаций позволяет, имея результаты исследования некоторой игры на сети, систематически генерировать смежные задачи и пытаться переносить или/и обобщать на них полученные результаты.

Полученные на сегодняшний день результаты исследования игр на сетях, заключающиеся, по сути, в корректном сведении некоторых из них к классическим играм в нормальной форме [8, 18, 26] или к рефлексивным играм [8, 17], представляются очень скромными. Перспективными на их фоне с теоретической точки зрения видятся такие задачи будущих исследований, как теоретическое изучение и практическое использование моделей игр на сетях, перечисленных выше в рамках введенной системы их классификаций: нелинейных, рефлексивных, иерархических, кооперативных, описывающих принятие качественных решений (на основе нечетких и/или вероятностных и/или функциональных графов) в условиях неопределенности и др.

Наряду с теоретическим исследованием аналитических решений игр на сетях, учитывая богатство сетевых моделей и их содержательных интерпретаций, чрезвычайно актуальным представляется их имитационное моделирование.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдеева З.К., Ковригa С.В., Макаренко Д.И., Максимов В.И. *Когнитивный подход в управлении* // Проблемы управления. 2007. № 3. С. 2–8.

2. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами.* М.: Синтег. 2001.

3. Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. *Механизмы управления эколого-экономическими системами.* М.: Физматлит. 2008.

4. Вагнер Г. *Основы исследования операций.* М.: Мир. 1972. Т. 1. - 3.

5. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука. 1985.

6. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио и связь. 1991.

7. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Модели влияния в социальных сетях (обзор)* // Управление большими системами. 2009. № 27. С. 205–281.

8. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях* // Проблемы управления. 2009. № 5. С. 28–35.

9. Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства.* М.: Издательство физико-математической литературы. 2010.

10. Губко М.В. *Задачи управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников* // Автоматика и телемеханика. 2004. № 8. С. 102–129.

11. Губко М.В. *Математические модели оптимизации иерархических структур.* М.: Ленанд. 2006.

12. Губко М.В., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* М.: Синтег. 2002.

13. Губко М.В., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Сетевые игры и игры на сетях* // Сборник трудов международной конференции «Networking games and management». Петрозаводск: ИПМИ РАН. 2009. С. 13–17.

14. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. *Некоторые игровые задачи управления и их приложения.* Тбилиси: Мецниереба. 1998.

15. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. *Принятие решений в условиях неопределенности.* М.: ВЦ АН СССР. 1991.

16. Кузнецов О.П., Кулинич А.А., Марковский А.В. *Анализ влияний при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт* // Человеческий фактор в управлении. М.: КомКнига. 2006. С. 311–344.

17. Куливец С. Г. *Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах* // Проблемы управления. 2010 (в печати).

18. Кулинич А.А. *Модель поддержки принятия решений для создания коалиции в условиях неопределенности* // Труды IV Международной конференции по проблемам управления. М.: ИПУ РАН. 2009. С. 1243–1251.

19. Кулинич А.А. *Систематизация когнитивных карт и методов их анализа*// Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций. Материалы 7-й международной кон-ференции. М.: ИПУ РАН. 2007. С. 50-56.

20. Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н. *Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем.* М.: Синтег. 2004.

21. Малинецкий Г.Г. *Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику.* М.: Наука. 1997.

22. Мишин С.П. *Оптимальные иерархии управления в экономических системах.* М.: ПМСОФТ. 2004.

23. Молодцов Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности.* М.: Наука. 1987.

24. Мулен Э. *Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели.* М.: Мир. 1991.

25. Нижегородцев Р.М. Грибова Е.Н. *Сценарный подход в задачах экономического прогнозирования*// Теоретические основы и модели долгосрочного макроэкономического прогнозирования. М.: МФК. 2004. С. 205–295.

26. Новиков Д.А. *«Когнитивные игры»: линейная импульсная модель* // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 14–22.

27. Новиков Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд.* М.: Физматлит. 2008.

28. Новиков Д.А. *Сетевые структуры и организационные системы.* М.: ИПУ РАН. 2003.

29. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами.* М.: Физматлит. 2007.

30. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Прикладные модели информационного управления.* М.: ИПУ РАН. 2004.

31. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Рефлексивные игры.* М.: Синтег. 2003.

32. Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. *Механизмы управления динамическими активными системами.* М.: ИПУ РАН. 2002.

33. Оуэн Г. *Теория игр.* М.: Мир. 1971.

34. Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. *Игры поиска.* СПб.: Изд-во СПбГУ. 1992.

35. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высшая школа. 1998.

36. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Динамические игры и их приложения.* Л.: Изд-во ЛГУ. 1982.

37. Плотинский Ю.М. *Теоретические и эмпирические модели социальных процессов.* М.: Логос. 1998.

38. Робертс Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* М.: Наука. 1986.

39. Юдицкий С.А., Мурадян И.А., Желтова Л.В. *Моделирование динамики развития конфигураций организационных систем на основе сетей Петри и графов приращений* // Проблемы управления. 2007. № 6. С. 26–34.

40. Axelrod R. *The Structure of Decision: Cognitive Maps of Political Elite.* Princeton: Princeton University Press. 1976.

41. Florian M., Hearn D. *Network equilibrium models and algorithms* // Network Routing. Elsevier Science. 1995. P. 485–550.

42. Jackson M. *Social and Economic Networks.* Princeton: Princeton University Press. 2008.

43. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. *Microeconomic Theory.* N.Y.: Oxford Univ. Press. 1995.

44. Myerson R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict.* London: Harvard Univ. Press. 1997.

45. Papadimitriou C.H., Koutsoupias E. *Worst-Case Equilibria.* Lecture Notes in Computer Sciences. 1999. № 1563. P. 404–413.

46. Roughgarden T. *Selfish Routing and the Price of Anarchy.* MIT Press, 2005.

47. Shubik M. *Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions.* Massachusetts: MIT Press. 1982.

48. Wardrop J. *Some theoretical aspects of road traffic research* // Proc. Institute of Civil Engineers. 1952. Part II. Vol. 1. P. 325–378.

## GAMES AND NETWORKS

**Dmitry A. Novikov**, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr.Sc., Professor (novikov@ipu.ru).

*Abstract*: The paper contains a survey and structuring of modern trends in network-based games. The classification of network-based games is introduced from game-theoretical and graph-theoretical points of view.

*Keywords*: game theory, graph theory, network-based games.