Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 3-26

УДК 519.83
ББК 22.18

# МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ C-ЯДРА КОРНЕВОЙ ИГРЫ

Арина Николаевна Акимова
Виктор Васильевич Захаров
Факультет прикладной математики –
процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: arina_akimova@mail.ru, mcvictor@mail.ru

Показано, что в любой ТП-кооперативной игре основание большого (теневого) $SC$-ядра совпадает с $C$-ядром корневой игры. Сравнение определений большого $SC$-ядра и большого теневого $SC$-ядра с описанием агрегированно-монотонного $C$-ядра приводит к формальному геометрическому совпадению агрегированно-монотонного $C$-ядра либо с большим $SC$-ядром, либо с большим теневым $SC$-ядром. Предложен метод нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей $C$-ядро корневой игры в игре с $n$ игроками. Для обоснования метода применяется теория двойственности и индуктивный метод Б. Пелега.

*Ключевые слова*: ТП-кооперативная игра, $C$-ядро, большое (теневое) $SC$-ядро, корневая игра, агрегированно-монотонное $C$-ядро, линейное программирование, сбалансированный набор коалиций.

## 1. Введение

В процессе развития теории кооперативных игр с трансферабельными полезностями предлагались различные виды монотонности решений, одной из которых является агрегированная монотонность одноточечных решений, введенная Н. Мегиддо [8]. Однако часто главным требованием, предъявляемым к решению ТП-кооперативной игры, является его принадлежность $C$-ядру. Множество векторов выигрышей, образуемое всевозможными одноточечными решениями, удовлетворяющими свойству агрегированной монотонности и одновременно принадлежащими $C$-ядру, было названо агрегированно-монотонным $C$-ядром [7]. В той же статье для того, чтобы сформулировать точное аналитическое описание агрегированно-монотонного $C$-ядра, было введено понятие корневой игры по отношению к исходной ТП-кооперативной игре.

Ранее, исходя из геометрической точки зрения, было предложено множественное решение ТП-кооперативных игр, названное большим $SC$-ядром [13]. Было показано, что большое $SC$-ядро не пусто тогда и только тогда, когда игра сбалансирована. Позднее было предложено большое теневое $SC$-ядро как аналог большого $SC$-ядра в классе несбалансированных ТП-кооперативных игр [ 5, 14, 15]. Следует заметить, что определения этих решений были сформулированы с помощью множества оптимальных решений $X^0(v)$ специальной задачи линейного программирования, которое было названо основанием большого $SC$-ядра в случае сбалансированной игры и основанием большого теневого $SC$-ядра в случае несбалансированной игры.

В этой статье мы сначала покажем, что $C$-ядро корневой игры совпадает с множеством $X^0(v)$, а агрегированно-монотонное $C$-ядро, как множество векторов, формально совпадает либо с большим $SC$-ядром, либо с большим теневым $SC$-ядром в зависимости от сбалансированности игры. Затем мы докажем теорему о взаимно-однозначном соответствии между множеством потенциально-оптимальных граней и множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в игре с $n$ игроками, и на основе этой теоремы сформулируем метод нахождения $C$-ядра корневой игры (или множества $X^0(v)$) в ТП-кооперативной игре с произвольным числом игроков.

## 2. Большое $SC$-ядро, большое теневое $SC$-ядро и агрегированно-монотонное $C$-ядро

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ — конечное множество игроков. Любое непустое подмножество множества игроков $S \subseteq N$ называется *коалицией.* Каждой коалиции $S$ ставится в соответствие вещественное число $v(S)$, называемое значением коалиции $S$, которое представляет собой общий гарантированный доход этой коалиции, получаемый при кооперации ее членов. Построенная в результате функция $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$, определенная на множестве всех подмножеств из $N$ $(S \in 2^N)$, с вещественными значениями и естественным условием $v(\emptyset) = 0$, называется *характеристической функцией* игры.

Упорядоченная пара $\Gamma = (N, v)$ называется *кооперативной игрой с трансферабельными полезностями игроков* (или ТП-кооперативной игрой, или ТП-игрой) *в форме характеристической функции.* Обозначим через $G^N$ класс всех ТП-кооперативных игр с множеством игроков $N$, а через $B^N$ — множество всех сбалансированных игр из класса $G^N$.

*Допустимым вектором выигрышей* игры $(N, v)$ называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum\limits_{i\in N} \xi_i \leq v(N)$. *Преддележом* игры $(N, v)$ называется вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\sum\limits_{i\in N} \xi_i = v(N)$. *Дележом* игры $(N, v)$ называется преддележ $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям индивидуальной рациональности: $\xi_i \geq v(\{i\})\ \forall\, i \in N$. Множество всех допустимых векторов выигрышей обозначим через $X^*(v)$, множество всех преддележей — через $I^*(v)$, а множество всех дележей — через $I(v)$.

*Решением* на некотором классе ТП-кооперативных игр $G' \subseteq G^N$ называется отображение $\phi$, которое каждой игре $(N, v) \in G'$ ставит в соответствие некоторое подмножество множества допустимых векторов выигрышей $\phi(v) \subset X^*(v)$. Если для любой игры $(N, v) \in G'$ множество $\phi(v)$ состоит из единственного допустимого вектора выигрышей, то решение называется *одноточечным* или *значением* игры. Преддележ из множества $\phi(v)$ называют также *распределением.*

Для аналитического описания одной из наиболее важных концепций решений ТП-кооперативных игр, $C$-ядра, будем исходить из утверждения Оуэна [9].

**Теорема 2.1.** *Преддележ $\xi \in I^*(v)$ принадлежит $C$-ядру ТП-кооперативной игры $(N, v)$ тогда и только тогда, когда для каждой коалиции $S \subset N$ выполняется неравенство: $\sum\limits_{i \in S} \xi_i \geq v(S)$.*

Другими словами, $C$-ядро представляет собой множество коалиционно-рациональных (пред)дележей:

$$C(v) = \Big\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} \xi_i = v(N); \; \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), \; \forall S \subset N, \; S \neq \emptyset, N \Big\}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\min \sum_{i \in N} \xi_i \,, \tag{2.2}$$

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S)\,, \quad \forall S \subset N\,, \; S \neq \emptyset, N\,. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ произвольное оптимальное решение, а через $X^0(v)$ множество всех оптимальных решений ЗЛП (2.2)–(2.3).

Известно (см., напр., [[6], [13]), что $C$-ядро игры $(N, v)$ не пусто тогда и только тогда, когда для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N)\,. \tag{2.4}$$

Приведем определение $SC$-ядра ТП-кооперативной игры $(N, v)$, впервые изложенное в [13].

**Определение 2.1.** Множество векторов

$$SC(v, \xi^0) = \big\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v), \; \xi_i \geq \xi_i^0, \; \forall i \in N \big\} = \tag{2.5}$$

или в эквивалентной форме

$$= \Big\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \Big( v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0 \Big), \text{ где } \alpha_i \geq 0, \; \sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \text{ и } \sum_{i \in N} \xi_i^0 \leq v(N) \Big\} \tag{2.6}$$

называется *$SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N, v)$ относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$, а вектор $\xi^0$ — *основанием* данного $SC$-ядра.

Распространение понятия $SC$-ядра относительно вектора $\xi^0$ на все множество оптимальных решений $X^0(v)$ приводит к понятию большого $SC$-ядра [16].

**Определение 2.2.** Множество векторов

$$GSC(v) = \bigcup_{\forall\, \xi^0 \in X^0(v)} SC(v,\, \xi^0)$$

называется *большим $SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$.

При этом множество всех оптимальных решений задачи (2.2)–(2.3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого $SC$-ядра.*

Справедливо следующее утверждение [16].

**Теорема 2.2.** *В любой сбалансированной ТП-кооперативной игре $(N,\, v)$ большое $SC$-ядро содержится в $C$-ядре: $GSC(v) \subseteq C(v)$.*

Предположим теперь, что $C$-ядро игры $(N,\, v)$ является пустым. В классе несбалансированных игр были введены "теневые" аналоги $SC$-ядра и большого $SC$-ядра [14].

**Определение 2.3.** Множество векторов

$$\overline{SC}(v,\, \xi^0) = \left\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \in I^*(v),\ \xi_i \le \xi_i^0,\ \forall\, i \in N \,\right\} = \tag{2.7}$$

или в эквивалентной форме

$$= \Big\{\, \xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = \xi_i^0 + \alpha_i \Big(v(N) - \sum_{i \in N} \xi_i^0\Big),\ \text{где}$$
$$\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i \in N} \alpha_i = 1,\ \text{и}\ \sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N) \,\Big\} \tag{2.8}$$

будем называть *теневым $SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$ относительно вектора $\xi^0 \in X^0(v)$.

**Определение 2.4.** Множество векторов

$$\overline{\mathbf{GSC}}(v) = \bigcup_{\forall\, \xi^0 \in X^0(v)} \overline{SC}(v,\, \xi^0).$$

называется *большим теневым $SC$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$.

В этом случае множество всех оптимальных решений задачи (2.2)–(2.3) $X^0(v)$ будем называть *основанием большого теневого $SC$-ядра.*

Так как в несбалансированной игре для любого $\xi^0 \in X^0(v)$ выполняется неравенство, противоположное неравенству (2.4), т. е.

$$\sum_{i \in N} \xi_i^0 > v(N)\,,$$

то любое теневое $SC$-ядро относительно вектора $\xi^0$ не пусто, а, следовательно, не пусто и большое теневое $SC$-ядро.

Приведем определение свойства агрегированной монотонности одноточечных решений, предложенного Н. Мегиддо [8].

**Определение 2.5.** Значение $\phi$ на классе игр $G^N$ называется *агрегированно-монотонным,* если для любых двух игр $v$, $v' \in G^N$ таких, что $v(S) = v'(S)$ для всех $S \subset N$ и $v(N) < v'(N)$, имеет место неравенство $\phi(v) \leq \phi(v')$.

В статье [7] было введено понятие агрегированно-монотонного $C$-ядра и понятие корневой игры.

**Определение 2.6.** *Агрегированно-монотонным $C$-ядром* ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$ называется подмножество множества преддележей $I^*(v)$, которое является совокупностью найденных для данной игры $(N,\, v)$ всевозможных значений из класса игр $G^N$, обладающих свойством агрегированной монотонности и принадлежащих $C$-ядру, если последнее не пусто.

Для произвольной ТП-игры $(N,\, v)$ обозначим через $B_v^N$ множество сбалансированных игр, которые отличаются от игры $(N,\, v)$ только значением коалиции $N$:

$$B_v^N = \{\, v' \in B^N \mid v'(S) = v(S)\, \forall S \subset N\,\}\,. \tag{2.9}$$

**Определение 2.7.** *Корневой игрой* $(N,\, v_r)$ по отношению к ТП-игре $(N,\, v)$ называется наименьшая сбалансированная игра из множества $B_v^N$, т. е. $v_r \in B_v^N$ и $v_r(N) \leq w(N)$ для любой другой игры $w \in B_v^N$.

Рассмотрим ЗЛП (2.2)–(2.3) для произвольной игры $(N,\, v')$ из множества сбалансированных игр (2.9). Так как $v'(S) = v(S)$ для любой коалиции $S \subset N$, то

$$X^0(v') = X^0(v)\,, \forall\, v' \in B_v^N\,. \tag{2.10}$$

Неравенство (2.4), которое выполняется для любой сбалансированной игры, также справедливо для всех игр из множества (2.9), и с учетом (2.10) имеет вид: $\sum\limits_{i\in N} \xi_i^0 \leq v'(N)$ для произвольного $\xi^0 \in X^0(v)$. Тогда по определению 2.7 значение $v_r(N)$ корневой игры равно

$$v_r(N) = \sum_{i\in N} \xi_i^0 \,. \tag{2.11}$$

**Утверждение 2.1.** *Пусть $(N,\, v)$ — произвольная ТП-кооперативная игра. C-ядро корневой игры $(N,\, v_r)$ совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ ЗЛП (2.2)–(2.3).*

*Доказательство.* Непустое $C$-ядро игры $(N,\, v_r)$ можно рассматривать как множество оптимальных решений следующей ЗЛП (см., напр., [9]):

$$\min \ \sum_{i\in N} \xi_i \,, \tag{2.12}$$

$$\sum_{i\in S} \xi_i \geq v(S)\,, \quad \forall\, S \subset N\,,\ S \neq \emptyset\,, \tag{2.13}$$

$$\sum_{i\in N} \xi_i = v_r(N)\,, \tag{2.14}$$

которая отличается от задачи (2.2)–(2.3) только дополнительным ограничением (2.14). Поскольку $C(v_r) \neq \emptyset$, то оптимальное значение ЗЛП (2.12)–(2.14) равно $v_r(N)$. Тогда из (2.11) следует, что множества оптимальных решений задач (2.2)–(2.3) и (2.12)–(2.14) совпадают друг с другом, т. е. $X^0(v) = C(v_r)$. □

Следующая теорема обеспечивает точное аналитическое описание агрегированно-монотонного $C$-ядра [7].

**Теорема 2.3.** *Для агрегированно-монотонного $C$-ядра ТП-кооперативной игры $(N,\, v)$ справедливо представление*

$$\mathcal{A}C(v) = C(v_r) + \big(v(N) - v_r(N)\big)\, \Delta_N \,,$$

*где $C(v_r)$ — $C$-ядро корневой игры $(N,\, v_r)$ и $\Delta_N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 1,\ x_i \geq 0\ \forall\, i \in N\}$.*

**Утверждение 2.2.** *Пусть* $(N, v)$ *— произвольная ТП-кооперативная игра. Множество векторов из агрегированно-монотонного* $C$*-ядра совпадает с большим* $SC$*-ядром, если игра* $(N, v)$ *сбалансирована, и с большим теневым* $SC$*-ядром, если игра* $(N, v)$ *несбалансирована.*

*Доказательство.* Заметим, что описания $SC$-ядра и теневого $SC$-ядра в форме (2.6) и (2.8) отличаются друг от друга только условиями сбалансированности или несбалансированности игры $(N, v)$ в виде неравенства (2.4) и противоположного ему неравенства. Поэтому объединяя их в одно определение и распространяя его на все множество $X^0(v)$, получим следующее общее выражение для большого $SC$-ядра и большого теневого $SC$-ядра.

Множество векторов

$$X = X^0(v) + \Big(v(N) - \sum_{i\in N} \xi_i^0\Big)\, \Delta_N \tag{2.15}$$

является большим $SC$-ядром, если игра $(N, v)$ сбалансирована, и большим теневым $SC$-ядром, если игра $(N, v)$ несбалансирована.

Сравним выражение (2.15) с представлением агрегированно-монотонного $C$-ядра из теоремы 2.3. Принимая во внимание утверждение 2.1 и равенство (2.11), приходим к доказываемому утверждению. $\square$

### 3. Теоретическое обоснование метода

Для построения метода нахождения $C$-ядра корневой игры будем исходить из утверждения 2.1 о совпадении $C(v_r)$ с множеством $X^0(v)$. Как известно, множество оптимальных решений любой ЗЛП является также решением некоторой системы линейных уравнений и неравенств (см., напр., [4]). Поэтому рассмотрим задачу нахождения системы линейных ограничений, описывающей $C$-ядро корневой игры (или множество $X^0(v)$), минимальной по общему числу ограничений и содержащей наибольшее число ограничений типа равенств.

Представим ЗЛП (2.2)–(2.3) в векторно-матричной форме:

$$\min \quad (\xi, \mathbb{I})\,, \tag{3.1}$$

$$\xi\, A \geq V\,, \tag{3.2}$$

где $(\xi, \mathbb{I})$ — скалярное произведение вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $n$-мерного вектора $\mathbb{I} = (1, \ldots, 1)^T$. Если некоторым образом перенумеровать все коалиции $S \subset N$ $(S \neq \emptyset, N)$: $S_1, \ldots, S_p$, где $p = 2^n - 2$ — общее число ограничений в системе (2.3), то можно представить элементы матрицы $A$ и вектора $V$ в виде:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \begin{cases} 1\,, & \text{если} \;\; i \in S_j\,, \\ 0\,, & \text{если} \;\; i \notin S_j\,, \end{cases} \quad \text{где } i = \overline{1,\, n}\,,\; j = \overline{1,\, p}\,, \\ V &= \big(v(S_1),\, \ldots,\, v(S_p)\big)\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Множество допустимых решений (3.2) с геометрической точки зрения является выпуклым замкнутым многогранным множеством, которое обозначим $M$. Поэтому множеством оптимальных решений $X^0(v)$ может быть только некоторая грань $\Gamma$ множества $M$. Любую грань $\Gamma \in M$ такую, что $\Gamma \subseteq X^0(v)$, будем называть оптимальной гранью.

**Определение 3.1.** Грань $\Gamma \in M$ будем называть *потенциально-оптимальной в классе игр $G^N$*, если существует игра $(N, v)$ из класса $G^N$ такая, что $X^0(v) = \Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma' \subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma' \subset \Gamma$.

Множество всех потенциально-оптимальных граней в классе игр $G^N$ обозначим через $P_N^0$.

Задача (3.1)–(3.2) является двойственной к задаче:

$$\max \;\; \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\,:\; i \in S_j} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,, \\ \lambda_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1,\, p}\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

или в векторно-матричной форме

$$\max \;\; (V,\, \lambda)\,,$$

$$\begin{cases} A\,\lambda = \mathbb{I}\,, \\ \quad \lambda \geqq 0\,. \end{cases}$$

Оптимальное решение ЗЛП (3.4)–(3.5) связано с понятиями сбалансированного и минимального сбалансированного набора коалиций (или покрытия), предложенными Бондаревой [2, 3] и Шепли [11].

**Определение 3.2.** Пусть $\mathcal{B} = \{S_1, \dots, S_k\}$ — некоторый набор коалиций $S_j \subset N$, $S_j \neq \emptyset$. Набор коалиций $\mathcal{B}$ называется *сбалансированным,* если существуют такие положительные числа $\lambda_j > 0$, $\forall\, S_j \in \mathcal{B}$, что

$$\sum_{\substack{j\,:\; S_j \in \mathcal{B} \\ i \in S_j}} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,. \tag{3.6}$$

Набор чисел $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$ называется *системой балансирующих весов.*

**Определение 3.3.** Сбалансированный набор коалиций $\mathcal{B}$ называется *минимальным,* если он не содержит ни одного собственного подмножества $\mathcal{B}^* \subsetneq \mathcal{B}$, также являющегося сбалансированным набором коалиций.

Доказательство следующего необходимого и достаточного условия минимальности сбалансированного набора можно найти, например, в книге Оуэна [9].

**Теорема 3.1.** *Сбалансированный набор коалиций $\mathcal{B}$ является минимальным тогда и только тогда, когда для него существует единственная система балансирующих весов $(\lambda_j)_{S_j \in \mathcal{B}}$.*

Для того, чтобы найти все минимальные сбалансированные наборы коалиций в классе игр $G^N$, Б. Пелегом был разработан индуктивный метод [10], сущность которого заключается в последовательном нахождении всех минимальных сбалансированных наборов коалиций для игр с $n$ игроками, если известны все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с $n-1$ игроками. Заметим, что в работе Шепли [11] приведены все минимальные сбалансированные наборы коалиций для игр с числом игроков $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$.

Как известно, между оптимальными решениями пары двойственных задач существуют соотношения, устанавливаемые теоремами о дополняющей нежесткости, а также теоремой двойственности. Для пары двойственных задач линейного программирования в *стандартном* виде:

$$\min \quad (x, c)\,, \qquad \left\{ \begin{array}{r} x\,D \geq b\,, \\ x \geqq 0\,, \end{array} \right. \qquad (*) \qquad\qquad \max \quad (b, y)\,, \qquad \left\{ \begin{array}{r} D\,y \leq c\,, \\ y \geqq 0\,, \end{array} \right. \qquad (**)$$

где $D$ — матрица, $x$ и $b$ — вектор-строки, $y$ и $c$ — вектор-столбцы, эти теоремы формулируются следующим образом (см., напр., [12]).

**Теорема 3.2** (Теорема о дополняющей нежесткости в слабой форме)**.** *Допустимые векторы $x$ и $y$ задач $(*)$ и $(**)$ оптимальны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} (b - x\,D)\,y &= 0\,, \\ x\,(D\,y - c) &= 0\,. \end{aligned}$$

**Теорема 3.3** (Теорема о дополняющей нежесткости в сильной форме)**.** *Для заданной пары разрешимых двойственных задач $(*)$ и $(**)$ существует по крайней мере одна пара оптимальных решений $x$ и $y$, удовлетворяющих соотношениям:*

$$\begin{aligned} (b - x\,D) + y^T &> 0\,, \\ (D\,y - c) + x^T &> 0\,. \end{aligned}$$

**Теорема 3.4** (Теорема двойственности)**.** *Для того чтобы допустимый вектор $x$ (вектор $y$) являлся оптимальным решением ЗЛП $(*)$ (ЗЛП $(**)$, соответственно), необходимо и достаточно, чтобы существовал допустимый вектор $y$ (вектор $x$) двойственной задачи такой, что $(x,\,c) = (b,\,y)$. Оптимальные значения двойственных задач равны для любой пары их оптимальных решений.*

Кроме того, для допустимых векторов двойственный задач справедлива следующая теорема(см., напр., [12]).

**Теорема 3.5.** *Для любых допустимых векторов $x$ и $y$ задач $(*)$ и $(**)$, соответственно, выполняется неравенство: $(x,\,c) \geq (b,\,y)$.*

В следующей теореме мы покажем, что множество потенциально-оптимальных граней $P_N^0$ взаимно-однозначно связано с множеством минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр $G^N$.

Предварительно заметим, что система ограничений, описывающая произвольную грань $\Gamma \in M$, получается из системы (3.2) путем замены в ней некоторых $k$ неравенств на уравнения ($k \leq n$):

$$\xi\,\tilde{A} = \tilde{V}\,, \tag{3.7}$$

$$\xi\,\widehat{A} \geq \widehat{V}\,, \tag{3.8}$$

причем столбцы матрицы $\tilde{A}$ должны быть линейно независимыми, т. е. $\operatorname{rank}\tilde{A} = k$. При этом размерность грани $\Gamma$ определяется как $q = n - k$. Обозначим через $U(\Gamma) = (S_{i_1}, \ldots, S_{i_k})$ множество коалиций, соответствующих неравенствам в (3.2), которые заменяются на уравнения для получения системы (3.7)–(3.8).

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.6.** *Грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в классе игр $G^N$ тогда и только тогда, когда множество коалиций $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором в классе игр $G^N$.*

*Доказательство.* Необходимость. Предположим, что некоторая грань $\Gamma \in M$ является потенциально-оптимальной в классе игр $G^N$ и задается системой ограничений (3.7)–(3.8), где столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, а $U(\Gamma) = (S_1, \ldots, S_k)$ — множество коалиций, перенумерованных в том же порядке, в котором они соответствуют столбцам матрицы $\tilde{A}$. По определению 3.1, существует игра $(N, v)$ из класса $G^N$ такая, что $X^0(v) = \Gamma$. Рассмотрим связь между оптимальными решениями задач (2.2)–(2.3) и (3.4)–(3.5) для данной игры. Пусть $\xi^0 \in X^0(v)$ и $\lambda^0$ — соответствующие произвольные оптимальные решения этих задач.

Заметим, что рассматриваемые задачи не являются задачами линейного программирования в стандартном виде, поэтому для них условия дополняющей нежесткости в слабой форме сводятся к единственному равенству: $(V - \xi\, A)\,\lambda = 0$, которое равносильно условиям:

$$\begin{cases} \text{если } \lambda_j > 0\,, \text{ то } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} = v(S_j)\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,, \\ \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} > v(S_j)\,, \text{ то } \lambda_j = 0\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

а условия дополняющей нежесткости в сильной форме — к единственному неравенству: $(V - \xi\, A) + \lambda^T > 0$, которое равносильно условиям:

$$\begin{cases} \text{если } \lambda_j = 0\,, \text{ то } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} > v(S_j)\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,, \\ \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, a_{ij} = v(S_j)\,, \text{ то } \lambda_j > 0\,,\ j \in \{1, \ldots, p\}\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

По теореме 3.2 условия дополняющей нежесткости в слабой форме выполняются для любой пары оптимальных решений двойственных задач $\xi^0$ и $\lambda^0$. При этом для некоторых пар оптимальных решений равенства $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^0\, a_{ij} = v(S_j)$ при некоторых $S_j$ могут выполняться одновременно. По теореме 3.3 условия дополняющей нежесткости в сильной форме гарантируют, что существует по крайней мере одна пара оптимальных решений $\xi^0$ и $\lambda^0$, для которых условия $\lambda_j^0 = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^0\, a_{ij} = v(S_j)$ не могут иметь место одновременно.

Таким образом, существует, по крайней мере, одна пара оптимальных решений $\xi^0$ и $\lambda^0$ рассматриваемых задач такая, что

$$\begin{cases} \xi^0\, \tilde{A} = \tilde{V}\,, \\ \xi^0\, \widehat{A} > \widehat{V}\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda_j^0 > 0 \ \ \forall\, S_j \in U(\Gamma)\,, \\ \lambda_j^0 = 0 \ \ \forall\, S_j \notin U(\Gamma)\,. \end{cases}$$

Подставляя $\lambda^0$ в ограничения-равенства из (3.5), получим, что ненулевые компоненты $\lambda^0$ удовлетворяют системе:

$$\sum_{\substack{j\,:\; i \in S_j \\ S_j \in \mathcal{B}}} \lambda_j^0 = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,.$$

Тогда из определения 3.2 следует, что $U(\Gamma)$ является сбалансированным набором коалиций.

Из ненулевых компонент вектора $\lambda^0$ образуем вектор

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0,\, \ldots,\, \lambda_k^0)\,,$$

располагая $\lambda_j^0$ в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества $U(\Gamma)$. Так как столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ линейно независимы, то вектор $\tilde{\lambda}^0$ является едиственным решением системы уравнений $\tilde{A}\,\lambda = \mathbb{I}$. Тогда по теореме 3.1 получаем, что $U(\Gamma)$ является минимальным сбалансированным набором коалиций.

Достаточность. Пусть $(N,\, v)$ — произвольная игра из класса $G^N$. Рассмотрим ЗЛП (3.4)–(3.5) для данной игры. Заметим, что крайними точками выпуклого многогранника $M'$, описываемого системой ограничений (3.5), являются векторы $\lambda$, ненулевые компоненты которых образуют системы балансирующих весов, соответствующие минимальным сбалансированным наборам коалиций. Следовательно, по крайней мере одно из оптимальных решений $\lambda^0$ задачи (3.4)–(3.5) является крайней точкой $M'$ и отвечает некоторому минимальному сбалансированному набору коалиций $\mathcal{B} = (S_1, \ldots, S_k)$. Обозначим систему балансирующих весов для $\mathcal{B}$ через

$$\tilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_k^0)\,,$$

располагая компоненты $\lambda_j^0 > 0$ оптимального вектора $\lambda^0$ в том же порядке, что и соответствующие им коалиции из множества $\mathcal{B}$.

Согласно теореме 3.1 система балансирующих весов $\tilde{\lambda}^0$ является единственным решением системы ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{j\,:\,i\in S_j\\ S_j\in\mathcal{B}}} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,, \\ \lambda_j > 0\,, \quad \forall\, S_j \in \mathcal{B}\,, \end{cases}$$

которую можно представить в векторно-матричной форме как

$$\tilde{A}\,\lambda = \mathbb{I}\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{3.11}$$

Тогда столбцы матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}^j\}_{j=1}^k$ — линейно независимы, а их число $k \le n$.

Покажем, что если $U(\Gamma) = \mathcal{B}$, то $X^0(v) = \Gamma$. Пусть грань $\Gamma$ описывается системой (3.7)–(3.8) с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$. Возьмем произвольный вектор $\xi \in \Gamma$, и умножим равенство (3.7), которому удовлетворяет этот вектор, справа скалярно на вектор $\tilde{\lambda}^0$:

$$\xi\,\tilde{A}\,\tilde{\lambda}^0 = \tilde{V}\,\tilde{\lambda}^0\,. \tag{3.12}$$

С одной стороны, левую часть этого выражения можно преобразовать согласно (3.11):

$$\xi\,\tilde{A}\,\tilde{\lambda}^0 = \xi\,\mathbb{I} = \sum_{i\in N} \xi_i\,. \tag{3.13}$$

С другой стороны, правая часть (3.12) равна оптимальному значению ЗЛП (3.4)–(3.5), так как

$$\tilde{V}\,\tilde{\lambda}^0 = \sum_{j\,:\,S_j\in\mathcal{B}} \lambda_j^0\, v(S_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^0\, v(S_j) = \max \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,. \tag{3.14}$$

Тогда по теореме 3.4 $\sum\limits_{i\in N}\xi_i$ является оптимальным значением ЗЛП (2.2)–(2.3), и, следовательно, ввиду произвольности выбора вектора $\xi\in\Gamma$, справедливо включение $\Gamma\subseteq X^0(v)$.

Предположим, что $\Gamma\subset X^0(v)$, т. е. $\Gamma\neq X^0(v)$. Тогда существует другая оптимальная грань $\Gamma' = X^0(v)$ такая, что $\Gamma\subset\Gamma'$. Это означает, что любое решение системы (3.7)–(3.8) также является решением системы, описывающей грань $\Gamma'$:

$$\xi\,\tilde{A}' \;=\; \tilde{V}', \tag{3.15}$$
$$\xi\,\widehat{A}' \;\geq\; \widehat{V}', \tag{3.16}$$

причем все столбцы матрицы $\tilde{A}'$ также являются столбцами матрицы $\tilde{A}$, и, следовательно, $U(\Gamma')\subset U(\Gamma)=\mathcal{B}$. По доказанному в первой части данной теоремы множество $U(\Gamma')$ является минимальным сбалансированным набором коалиций. Следовательно, сбалансированный набор коалиций $\mathcal{B}$ не является минимальным. Полученное противоречит доказывает, что сделанное предположение неверно, и $\Gamma = X^0(v)$.

Для того, чтобы грань $\Gamma$ являлась потенциально-оптимальной, согласно определению 3.1 нужно показать, что существует такая игра из класса $G^N$, что $X^0(v)=\Gamma$ и для любой другой оптимальной грани $\Gamma^*\subseteq X^0(v)$ справедливо включение $\Gamma^*\subset\Gamma$.

Так как $X^0(v)=\Gamma$ в исходной игре $(N,\,v)$, то для любой другой оптимальной грани $\Gamma^*\subseteq X^0(v)$ возможны два случая: либо $\Gamma^*\subset\Gamma$, либо $\Gamma^*\nsubseteq\Gamma$. В первом случае игра $(N,\,v)$ является искомой игрой, а грань $\Gamma$ — потенциально-оптимальной гранью.

Рассмотрим второй случай. Можно утверждать, что существует, по крайней мере, еще одна оптимальная грань $\hat\Gamma = X^0(v)$, $\hat\Gamma\neq\Gamma$, такая, что $\Gamma^*\subseteq\hat\Gamma$. Построим новую игру $(N,\,\hat v)$:

$$\begin{cases} \hat v(S) = v(S)-\varepsilon & \text{для } \forall\, S\subset N\colon S\in\big(U(\hat\Gamma)\setminus U(\Gamma)\big)\,, \\ \hat v(S) = v(S) & \text{для остальных коалиций } S\subset N\,, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $\varepsilon>0$.

Рассмотрим ЗЛП (3.4)–(3.5) для новой игры $(N,\, \hat{v})$:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \hat{v}(S_j)\,, \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\,:\ i\in S_j} \lambda_j = 1\,, \quad \forall\, i \in N\,. \\ \lambda_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1,\, p}\,. \end{cases} \tag{3.19}$$

Заметим, что множество допустимых векторов (3.19) при изменении характеристической функции игры не меняется, а значение целевой функции (3.18) для любого допустимого вектора $\lambda$ может, разве что, уменьшиться:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \hat{v}(S_j) \;&= \sum_{j\,:\ S_j\in U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \lambda_j\,\big(v(S_j) - \varepsilon\big) + \sum_{j\,:\ S_j\notin U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \lambda_j\, v(S_j) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,. \end{aligned}$$

Более того, значение целевой функции (3.18) для вектора $\lambda^0$ остается тем же, что и в исходной игре $(N,\, v)$, так как $\lambda^0_j > 0$ только при $S_j \in U(\Gamma) = \mathcal{B}$, а другие компоненты $\lambda^0_j = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \lambda^0_j\, \hat{v}(S_j) \;&= \sum_{j\,:\ S_j\in U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \lambda^0_j\,\big(v(S_j) - \varepsilon\big) + \sum_{j\,:\ S_j\in U(\Gamma)} \lambda^0_j\, v(S_j) + \\ &+ \sum_{j\,:\ S_j\notin U(\hat{\Gamma})\cup U(\Gamma)} \lambda^0_j\, v(S_j) = \sum_{j\,:\ S_j\in \mathcal{B}} \lambda^0_j\, v(S_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda^0_j\, v(S_j)\,. \end{aligned}$$

Следовательно, предложенное изменение характеристической функции не повлияет на оптимальное значение задачи, а вектор $\lambda^0$ также является оптимальным решением новой ЗЛП (3.18)–(3.19). Тогда по теореме 3.4 оптимальное значение задачи (2.2)–(2.3) при переходе от игры $(N,\, v)$ к игре $(N,\, \hat{v})$ также не меняется. А поскольку значения $\hat{v}(S) = v(S)$ для $S \in U(\Gamma)$, то в новой игре $X^0(\hat{v}) = \Gamma$.

Покажем, что $\hat{\Gamma} \nsubseteq X^0(\hat{v})$. Пусть в игре $(N,\, v)$ грань $\hat{\Gamma}$ описывается системой ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} \xi_i = v(S) \qquad \text{при}\ \forall\, S \in U(\hat{\Gamma})\,, \\ \sum\limits_{i\in S} \xi_i \geq v(S) \qquad \text{при}\ \forall\, S \notin U(\hat{\Gamma})\,, \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме:

$$\xi\,\breve{A} \;=\; \breve{V}\,, \tag{3.20}$$
$$\xi\,\bar{A} \;\geq\; \bar{V}\,, \tag{3.21}$$

причем $U(\hat{\Gamma}) \not\subseteq U(\Gamma)$ и $U(\Gamma) \not\subseteq U(\hat{\Gamma})$. Так как в исходной игре $X^0(v) = \hat{\Gamma}$, то по необходимости множество $U(\hat{\Gamma})$ является минимальным сбалансированным набором коалиций и существует система балансирующих весов $\hat{\lambda}^0$, которая является единственным решением системы уравнений:

$$\breve{A}\,\lambda = \mathbb{I}\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{3.22}$$

Тогда в игре $(N,\,\hat{v})$ грань $\hat{\Gamma}$ можно описать системой ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S}\xi_i = v(S) - \varepsilon & \text{при } \forall\, S \in U(\hat{\Gamma}) \setminus U(\Gamma)\,, \\ \sum\limits_{i\in S}\xi_i = v(S) & \text{при } \forall\, S \in U(\hat{\Gamma}) \cap U(\Gamma)\,, \\ \sum\limits_{i\in S}\xi_i \geq \hat{v}(S) & \text{при } \forall\, S \notin U(\hat{\Gamma})\,, \end{cases}$$

которую представим в векторно-матричной форме следующим образом:

$$\xi\,\breve{A}' \;=\; \breve{V}'\,, \tag{3.23}$$
$$\xi\,\breve{A}'' \;=\; \breve{V}''\,, \tag{3.24}$$
$$\xi\,\bar{A} \;\geq\; \bar{V}'\,, \tag{3.25}$$

где без уменьшения общности можно считать, что $(\breve{A}'|\breve{A}'') = \breve{A}$ и, соответственно, $(\breve{V}'|\breve{V}'') = \breve{V}$.

Пусть $\hat{\xi} \in \hat{\Gamma}$ — произвольный вектор грани $\hat{\Gamma}$. Представим уравнения (3.23) и (3.24) в виде одного: $\xi\,(\breve{A}'|\breve{A}'') = (\breve{V}'|\breve{V}'')$, подставим в него $\hat{\xi}$ и умножим его справа скалярно на вектор $\hat{\lambda}^0$:

$$\hat{\xi}\,(\breve{A}'|\breve{A}'')\,\hat{\lambda}^0 = (\breve{V}'|\breve{V}'')\,\hat{\lambda}^0\,. \tag{3.26}$$

Левую часть этого выражения преобразуем согласно (3.22):

$$\hat{\xi}\,(\breve{A}'|\breve{A}'')\,\hat{\lambda}^0 = \hat{\xi}\,\breve{A}\,\hat{\lambda}^0 = \hat{\xi}\,\mathbb{I} = \sum_{i\in N}\hat{\xi}_i\,.$$

Правую часть (3.26) представим в виде

$$(\breve{V}'|\breve{V}'')\,\hat{\lambda}^0 = \sum_{j:\,S_j\in U(\hat{\Gamma})\setminus U(\Gamma)} \hat{\lambda}^0_j\,(v(S_j)-\varepsilon) + \sum_{j:\,S_j\in U(\hat{\Gamma})\cap U(\Gamma)} \hat{\lambda}^0_j\,v(S_j) < \\ < \sum_{j:\,S_j\in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}^0_j\,v(S_j)\,.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\sum_{i\in N}\hat{\xi}_i < \sum_{j:\,S_j\in U(\hat{\Gamma})} \hat{\lambda}^0_j\,v(S_j)\,.$$

Так как сумма справа равна оптимальному значению ЗЛП (3.4)–(3.5), совпадающему с оптимальным значением ЗЛП (3.18)–(3.19), то по теореме 3.5 вектор $\hat{\xi}$ не является допустимым вектором ЗЛП (2.2)–(2.3) для игры $(N,\,\hat{v})$. Следовательно, грань $\hat{\Gamma}$ не может быть оптимальной в новой игре, т. е. $\hat{\Gamma} \nsubseteq X^0(\hat{v})$.

Таким образом, в случае, когда кроме грани $\Gamma = X^0(v)$ существует оптимальная грань $\Gamma^* \subseteq X^0(v)$ такая, что $\Gamma^* \nsubseteq \Gamma$, построенная игра $(N,\,\hat{v})$ является искомой игрой из определения 3.1, и, следовательно, грань $\Gamma$ является потенциально-оптимальной. □

Из теоремы 3.6 следует, что для того, чтобы найти множество потенциально-оптимальных граней $P^0_N$, достаточно найти множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр $G^N$, и наоборот.

Так как для каждой потенциально-оптимальной грани $\Gamma$, по определению 3.1, найдется игра из класса $G^N$ такая, что $X^0(v) = \Gamma$, то значение целевой функции (2.2) является постоянной величиной для любого вектора $\xi \in \Gamma$. Поэтому введем для нее специальное обозначение:

$$\sigma(\Gamma) = \sum_{i\in N}\xi_i\,, \quad \forall\,\xi\in\Gamma\,, \quad \Gamma\in P^0_N\,. \tag{3.27}$$

При доказательстве достаточности теоремы 3.6 были получены соотношения (3.12)–(3.14), из которых с учетом $\mathcal{B} = U(\Gamma)$ следует, что для любой потенциально-оптимальной грани $\Gamma$ и соответствующей системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}$ справедливо равенство:

$$\sum_{i\in N}\xi_i = \sum_{j:\,S_j\in U(\Gamma)} \tilde{\lambda}_j\,v(S_j)\,. \tag{3.28}$$

Следующее утверждение дает критерий выбора оптимальной грани $\Gamma = X^0(v)$ из множества $P_N^0$.

**Утверждение 3.1.** *Оптимальное значение ЗЛП (2.2)–(2.3) равно*

$$z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)\,. \tag{3.29}$$

*Доказательство.* Возьмем некоторую потенциально-оптимальную грань $\Gamma^1 \in P_N^0$ и рассмотрим игру $(N, v)$, в которой $X^0(v) = \Gamma^1$. Пусть $\Gamma^2 \in P_N^0$ — любая другая потенциально-оптимальная грань.

По теореме 3.6 множества $U(\Gamma^1)$ и $U(\Gamma^2)$ являются минимальными сбалансированными наборами коалиций, которым соответствуют системы балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$.

Так как $X^0(v) = \Gamma^1$, то из (3.27), (3.28) и теоремы двойственности 3.4 получаем равенство:

$$\min \sum_{i \in N} \xi_i = \sigma(\Gamma^1) = \sum_{j\colon S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1\, v(S_j) = \max \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, v(S_j)\,. \tag{3.30}$$

Следовательно, для систем балансирующих весов $\tilde{\lambda}^1$ и $\tilde{\lambda}^2$ справедливо неравенство:

$$\sum_{j\colon S_j \in U(\Gamma^1)} \tilde{\lambda}_j^1\, v(S_j) \geq \sum_{j\colon S_j \in U(\Gamma^2)} \tilde{\lambda}_j^2\, v(S_j)\,,$$

эквивалентное неравенству $\sigma(\Gamma^1) \geq \sigma(\Gamma^2)$.

Откуда, ввиду произвольности выбора $\Gamma^2 \in P_N^0$, следует:

$$\sigma(\Gamma^1) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)\,. \tag{3.31}$$

Обозначая оптимальное значение ЗЛП (2.2)–(2.3) через $z^0$, из (3.30) и (3.31) получаем равенство (3.29). □

Из утверждения 3.1 следует, что если наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ достигается только на одной потенциально-оптимальной грани:

$$\arg \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \Gamma^*\,,$$

то именно эта грань является множеством оптимальных векторов ЗЛП (2.2)–(2.3): $X^0(v) = \Gamma^*$.

Предположим, что $\sigma(\Gamma)$ достигает своего наибольшего значения на нескольких потенциально-оптимальных гранях:

$$\arg\max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k\}.$$

Тогда возникает проблема выбора $X^0(v)$ из данной совокупности граней.

Рассмотрим случай, когда $\sigma(\Gamma)$ достигает наибольшего значения только на двух потенциально-оптимальных гранях $\Gamma^1$, $\Gamma^2 \in P_N^0$. Покажем, что тогда множество векторов, принадлежащих грани $\Gamma^1$, совпадает с множеством векторов, принадлежащих грани $\Gamma^2$.

Возьмем произвольные векторы $\xi^1 \in \Gamma^1$ и $\xi^2 \in \Gamma^2$ и рассмотрим вектор $\xi = \alpha\,\xi^1 + (1-\alpha)\,\xi^2$, где $\alpha \in [0;\,1]$. Так как многогранное множество $M$ является выпуклым, то $\xi \in M$.

Значение целевой функции (2.2) для данного вектора $\xi$ при любом $\alpha \in [0;\,1]$ равно:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N} \xi_i &= \alpha \sum_{i\in N} \xi_i^1 + (1-\alpha) \sum_{i\in N} \xi_i^2 = \\ &= \alpha \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) + (1-\alpha) \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma).\end{aligned}$$

Но по условию $\arg\max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1,\, \Gamma^2\}$. Следовательно, вектор $\xi$ принадлежит либо $\Gamma^1$, либо $\Gamma^2$, либо обеим граням одновременно. Таким образом, между гранями $\Gamma^1$ и $\Gamma^2$ нет никакой другой грани множества $M$ и никаких внутренних векторов из $M$. Тогда

а) либо одна из граней является подмножеством другой: например, $\Gamma^2 \subset \Gamma^1$;

б) либо множества векторов, принадлежащих граням $\Gamma^1$ и $\Gamma^2$, совпадают друг с другом.

Но по определению 3.1 ни одна из потенциально-оптимальных граней не может быть подмножеством другой потенциально-оптимальной грани. Следовательно, п. а) невозможен, и в результате остается только п. б).

Обобщая это рассуждение на несколько потенциально-оптимальных граней, приходим к выводу, что если

$$\arg\max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma) = \{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k\}, \tag{3.32}$$

то множества векторов, принадлежащих граням $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k$, совпадают друг с другом. Следовательно, множеством $X^0(v)$ является любая из граней $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k$.

*Замечание* 3.1. Пусть $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k$ — потенциально-оптимальные грани из (3.32). Тогда каждый вектор $\xi^0 \in X^0(v)$ удовлетворяет всем ограничениям типа равенств, которые входят в систему ограничений, описывающую какую-либо из рассматриваемых граней.

## 4. Формулировка метода

На основании теоремы 3.6, утверждения 3.1 и замечания 3.1 получаем следующий метод нахождения $C$-ядра корневой игры с $n$ игроками.

1. Найти, используя индуктивный метод Б. Пелега, множество всех минимальных сбалансированных наборов коалиций в классе игр $G^N$. По теореме 3.6 каждому минимальному сбалансированному набору коалиций $\mathcal{B}$ взаимно-однозначно соответствует некоторая потенциально-оптимальная грань $\Gamma \in P_N^0$ с $U(\Gamma) = \mathcal{B}$.

2. Вычислить значения $\sigma(\Gamma)$ для всех $\Gamma \in P_N^0$ и определить наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$ на множестве $P_N^0$:
$$z^0 = \max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)\,.$$
По утверждению 3.1 величина $z^0$ является оптимальным значением ЗЛП (2.2)–(2.3) или общим гарантированным доходом коалиции $N$ в корневой игре: $v_r(N) = z^0$.

3. Выделить все потенциально-оптимальные грани, на которых достигается наибольшее значение $\sigma(\Gamma)$:
$$\{\Gamma^1, \ldots, \Gamma^k\} = \arg\max_{\Gamma \in P_N^0} \sigma(\Gamma)$$
и найти множество коалиций
$$Y = U(\Gamma^1) \cup \ldots \cup U(\Gamma^k)\,.$$

4. Составить систему ограничений для множества $X^0(v)$, принимая во внимание замечание 3.1:
$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} \xi_i = v(S) & \text{при } S \subset N\colon S \in Y\,, \\ \sum\limits_{i\in S} \xi_i \geq v(S) & \text{при } S \subset N\colon S \notin Y\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

По утверждению 2.1 система (4.1) описывает $C$-ядро корневой игры $(N, v_r)$. Эта система, во-первых, содержит на одно ограничение меньше, чем классическое описание $C$-ядра из теоремы 2.1. Во-вторых, в этой системе имеется максимальное число ограничений типа равенств. Для окончательного нахождения $C$-ядра корневой игры остается найти его крайние точки, исходя из полученной системы.

## 5. Заключение

В этой статье мы показали, что $C$-ядро корневой игры совпадает с множеством оптимальных решений $X^0(v)$ задачи линейного программирования (2.2)–(2.3), а агрегированно-монотонное $C$-ядро, как подмножество множества преддележей, формально геометрически совпадает либо с большим $SC$-ядром, либо с большим теневым $SC$-ядром.

Совпадение $C$-ядра корневой игры с множеством $X^0(v)$ позволило обосновать и сформулировать метод для нахождения системы ограничений наиболее простого вида, описывающей $C$-ядро корневой игры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова А.Н. *Аналитический метод решения специальной задачи линейного программирования* // Тезисы докладов международного конгресса “Нелинейный динамический анализ”, С.-Петербург, Россия. 2007. С. 315.

2. Бондарева О.Н. *Теория ядра в игре n лиц* // Вестник Ленинградского университета, Серия: мат., мех., астр. 1962. № 13(3). С. 140–142.

3. Бондарева О.Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. 1963. № 10. С. 119–140.

4. Еремин И.И. *Линейная оптимизация и системы линейных неравенств.* Москва: Издательский центр “Академия”. 2007.

5. Захаров В.В., Акимова А.Н. *О некоторых селекторах C-ядра* // Вестник Санкт-Петербургского Университета, Сер. 1. 2002. № 3. С. 10–16.

6. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* С.-Петербург: Издательство Европейского университета в С.-Петербурге. 2004.

7. Calleja P., Rafels C., Tijs S. *The Aggregate-Monotonic Core* // Games and Economic Behavior. 2009. V. 66. P. 742–748.

8. Megiddo N. *On the nonmonotonicity of the bargaining set, the kernel and the nucleolus of a game* // SIAM J. on Applied Mathematics. 1974. V. 27. P. 355–358.

9. Owen G. *Game theory* (third edition). New York: Academic Press. 1995.

10. Peleg B. *An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets* // Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. № 2. P. 155–162.

11. Shapley L.S. *On balanced sets and cores* // Naval Research Logistic Quarterly. 1967. V. 14. P. 453–460.

12. Simonnard M. *Linear programming.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. 1966.

13. Zakharov V.V. *About selectors of the core in dynamic games* // Proceedings of the 7th ISDG symposium on Dynamic Game and Applications, Kanagawa, Japan. 1996.

14. Zakharov V.V., Akimova A.N. *Nucleolus as a Selector of Subcore* // Proceedings Volume from the 11th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization” (Zakharov V.V., ed), S.-Petersburg, Russia. Great Britain: Pergamon. 2000. V. 2. P. 675–680.

15. Zakharov V.V., Akimova A.N. *Geometrical Properties of Subcore* // Game Theory and Applications (Petrosjan, L.A., and V.V. Mazalov, eds). 2002. V. 8. P. 279–289.

16. Zakharov V.V., Kwon O-H. *Selectors of the core and consistency properties* // Game Theory and Applications. 1999. V. 4. P. 237–250.


## A METHOD FOR ESTIMATING THE CORE OF ROOT GAME

**Arina N. Akimova**, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, assistant (arina_akimova@mail.ru)
**Vicktor V. Zakharov**, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg State University, Dr.Sc., professor (mcvictor@mail.ru).

*Abstract*: It is showen that the base of grand (shadow) subcore coincides with the core of the root game in any TU-cooperative game. Comparing definitions of grand subcore and grand shadow subcore with description of aggregate-monotonic core leads to the formal geometrical coincidence of aggregate-monotonic core with either grand subcore or grand shadow subcore. The method for estimating the simplest set of equations and inequalities describing the core of a root game in TU-game with any number of players ($n \geq 3$) is proposed. To develop the method dual theory and inductive method by B. Peleg are used.

*Keywords*: TU-cooperative game, core, grand (shadow) subcore, root game, aggregate-monotonic core, linear programming, balanced collection of coalitions.