Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 27-46

УДК 519.86
ББК в.6.3.1.0

ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ РЕЧНОЙ ВОДЫ

Ольга Ивановна Горбанева
Южный федеральный университет
344091, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 «а»
e-mail: gorbaneva@mail.ru

В статье описана и исследована задача распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды путем нахождения равновесия по Штакельбергу. Система состоит из двух центральных элементов, каждому из которых подчиняются все остальные элементы. Экономический центр распределяет ресурсы, а экологический центр следит за состоянием окружающей среды. Задачу можно разбить на две более простые подзадачи: задачу распределения ресурсов и задачу распределения качеством речной воды. Модель распределения ресурсов рассматривается в случаях отсутствия механизма коррупции, в случаях попустительства и вымогательства при распределении ресурсов и контроле над использованием ресурсов. Модель управления качеством речной воды учитывает различные случаи нарушения норм сброса загрязняющих веществ в речные воды.

Ключевые слова: древовидная иерархическая система, механизмы коррупции, теоретико-игровые модели.

---

1. Введение

Рыночная экономика требует высокого уровня использования ресурсов хозяйствующих субъектов. С другой стороны, действия субъектов рынка всегда связаны с риском и конфликтом интересов. Поэтому задачи оптимизации распределения ресурсов следует рассматривать с теоретико-игровых позиций. Основная часть объединений субъектов экономической деятельности представляет собой сложные многоуровневые образования, состоящие из следующих структурных составляющих: Центра, прерогативой которого является определение общих стратегических целей; объектов, организационно подчиненных Центру, имеющие свои собственные цели и довольно большую свободу в выборе своего будущего состояния; и объектов, не подчиняющихся Центру организационно, а связанных с ним неформально в процессе производственной, хозяйственной, финансовой и информационной деятельности (потребители продукции данного предприятия, сервисные организации и т.д.). Нормальной деятельности экономических систем препятствует коррупция [4]. Это сложное явление тесно связано с множеством экономических, политических, социально-психологических и других трудно формализуемых процессов, протекающих в обществе, и требует учета при моделировании.

В данной статье задача распределения ресурсов в иерархических системах управления решается нахождением равновесия по Штакельбергу [2] при наличии двух механизмов коррупции: связанных с величиной распределения ресурсов и с величиной контроля над использованием ресурсов, причем в качестве функций зависимости данных величин от взятки брались линейные. В каждом случае рассматривались как «жесткая», так и «мягкая» разновидности коррупции [4]. Задача рассматривалась при помощи аппарата кооперативных игр. В этом случае найдены доходы и кооперативные эффекты всех коалиций, вычислены векторы Шепли и пропорционального распределения [1].

2. Задача распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов и ее математическая модель

Рассматривается иерархически управляемая система (рис.1) включающая в себя следующие элементы:

- два источника воздействия верхнего уровня:
  - Экономический Центр;
  - Экологический Центр;
- N источников нижнего уровня – подразделения экономического Центра, которое мы назовем Подчиненными;
- управляемая система – водный объект.

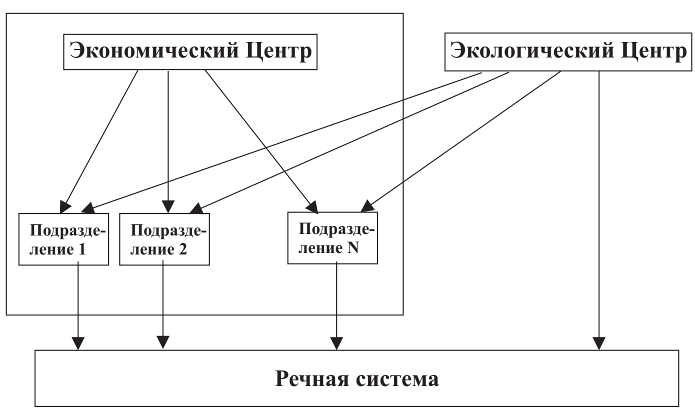

Рисунок 1. Иерархически управляемая система

Центры воздействуют на Подчиненных, а Подчиненные на Речную систему. Экономический Центр на речную систему не воздействует, а Экологический Центр может воздействовать только в том случае, если Подчиненные очистили сточные воды недостаточно для того, чтобы состояние системы осталось в допустимых пределах.
Рассмотрим каждый из этих элементов в отдельности:

1. Экономический Центр. Центру следует распределить ресурсы между Подчиненными таким образом, чтобы в процессе производства Подчиненных получить максимальную прибыль, т.е., чтоб была максимальной величина $\sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i)$, где $g_i(u_i r_i)$ — выигрыш системы от деятельности i-го Подчиненного, r_i – доля ресурса, выделяемая i-му Подчиненному Центром (от R), u_i – доля выделенного ресурса, используемая i-м Подчиненным для решения общесистемных задач.
   Нужно учесть следующие факторы:

   (a) Центр может задать Подчиненному минимальную долю ресурсов q_i, меньше которой он не может потратить на цели всей системы
   $$0 \le q_i \le 1\,,$$
   т.е. q_i – нижняя граница значений u_i, контролируемая Центром (от r_i);

   (b) Центр также может иметь свою частную несистемную цель, выражаемую производственной функцией $H(x)$, для достижения которой он направляет все ресурсы, которые остались у Центра после распределения Подчиненным – в количестве $\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right)$. То есть, Центр также стремится максимизировать величину $H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right)$.

   (c) В случае, если Подчиненный предлагает Центру взятку b_i, то она может повлиять или на величину распределенных ему ресурсов $r_i = r_i(b_i)$ или на величину контроля над использованием ресурсов $q_i = q_i(b_i)$. Прибыль от получения взятки Центром также нужно учесть в целевой функции Центра.

Итак, целевая функция Центра состоит из трех слагаемых: доход от производства всех Подчиненных, доход от нецелевого использования ресурсов, доход от взятки.

Количество ресурсов, выделенных Центром Подчиненному, будем измерять в процентах или в доле от всех имеющихся у Центра ресурсов. Таким образом, задача Экономического Центра состоит в максимизации целевой функции (2.1) при ограничениях (2.2) – (2.4):

$$J_0 = H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\left(b_i\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} g_i\left(u_i r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i r_i\left(b_i\right) \to \max \quad (2.1)$$

$$0 \le q_i\left(b_i\right) \le 1 \quad (2.2)$$

$$0 \le r_i\left(b_i\right) \le 1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\left(b_i\right) \le 1 \quad (2.4)$$

От выбора Центра зависят следующие величины: величины распределения ресурсов Подчиненным r_i и величины контроля над использованием ресурсов q_i.

2. Экологический Центр. Для обеспечения экологической обстановки объекта Экологический Центр назначает Подчиненному следующие виды штрафов:

   (a) штрафы за загрязнения K_{ch}, превышающие допустимые пределы, но не превышающие критические пределы,

   (b) штрафы за загрязнения K_{ca}, превышающие критические пределы.

   Существуют максимальные пределы штрафов K_{chmax}, K_{camax}, т.е.

$$0 \le K_{ch} \le K_{chmax}\,,$$
$$0 \le K_{ca} \le K_{camax}\,.$$

   В случае, если объем сброса загрязняющих веществ Подчиненного не превышает допустимый уровень, то Подчиненный штраф за превышение норм сбросов не платит.

   В случае, если объем сброса загрязняющих веществ Подчиненного после очистки превышает допустимый уровень $\widetilde{w_1}$, но не превышают критический уровень $\widetilde{w_2}$, Центр назначает Подчиненному штраф K_{ch} за единицу сброса загрязняющих веществ сверх допустимой нормы $\widetilde{w_1}$, т.е. Подчиненный платит штраф за $\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1}\right)$ единиц загрязняющих веществ, где s_i – функция штрафа Подчиненного за загрязнение воды, назначаемая за пределами рассматриваемой экологической системы, например, государством; w_i – объем сброса загрязняющих веществ до очистки Подчиненным; p_i – уровень очистки Подчиненным сточных вод; $w_i(1-p_i)$ – объем сброса загрязняющих веществ после очистки Подчиненным.

Сточные воды, недостаточно очищенные Подчиненными, очищает сам Экологический Центр. Функция затрат Центра на очистку речных вод – $c_a(y)$, где y – объем загрязняющих веществ всех Подчиненных после очистки, т.е.

$$y=\sum_{i=1}^{n} w_i\left(1-p_i\right) .$$

Итак, задача экологического Центра состоит в максимизации целевой функции

$$G_0=-c_a\left(y\right)+\sum_{j=1}^{n} K_{ch}s_i\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1}\right)\to\max_{K_{ch}} \tag{2.5}$$

при ограничении

$$0\le K_{ch}\le K_{chmax}\,.$$

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ Подчиненного после очистки превышает критический уровень $\widetilde{w_2}$, Центр назначает Подчиненному штраф K_{ch} за единицу сброса загрязняющих веществ сверх допустимой нормы $\widetilde{w_1}$, и штраф K_{ca} за единицу сброса загрязняющих веществ сверх критической нормы $\widetilde{w_2}$. То есть Подчиненный платит первый вид штрафа за $\left(\widetilde{w_2}-\widetilde{w_1}\right)$ единиц загрязняющих веществ, а второй вид штрафа за $\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_2}\right)$ единиц загрязняющих веществ.

Объем загрязняющих веществ после очистки Подчиненными в размере $\left(w_i\left(1-p_i\right)-\widetilde{w_1}\right)$ очищается Экологическим Центром с функцией затрат $c_a(y)$.

Таким образом, в целевую функцию Центра входят средства, полученные в качестве штрафов Подчиненных, минус средства, потраченные на очистку воды:

$$G_0 = -c_a\left(y\right) + \sum_{j=1}^{n} K_{ch} s_i \left(\widetilde{w_2} - \widetilde{w_1}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} K_{ca} s_i \left(w_i\left(1-p_i\right) - \widetilde{w_2}\right) \to \max_{K_{ch}, K_{ca}} \tag{2.6}$$

при ограничении

$$0 \leq \quad K_{ch} \leq \quad K_{chmax}\,, \tag{2.7}$$

$$0 \leq \quad K_{ca} \leq \quad K_{camax}\,. \tag{2.8}$$

3. Подчиненный. Подчиненный использует ресурсы, выделенные ему Центром, для производства в общесистемных целях, доход от которого выражается производственной функцией $g_i(x)$. Не исключено, что у Подчиненного кроме общесистемных экономических целей имеются и свои частные цели, доход от реализации которых выражается в виде производственной функции $h_i(x)$. Для получения как можно большего количества ресурсов Подчиненный может предложить Экономическому Центру взятку в размере определенной доли b_i от того количества ресурсов r_i, которое ему выделит Центр. Из количества ресурсов r_i, полученных от Центра, часть средств в размере $u_i r_i$ Подчиненный тратит на общие цели, часть на взятку (в количестве $b_i r_i$), а оставшиеся – на свои частные цели (в размере $r_i - u_i r_i - b_i r_i = (1 - b_i - u_i) r_i$), откуда следует, что

$$b_i + u_i \leq 1\,. \tag{2.9}$$

Подчиненный не может потратить на общие цели ресурсов меньше определенной доли q_i, указываемой Центром, т.е.

$$q_i(b_i) \leq u_i \leq 1\,. \tag{2.10}$$

Так как взятка – доля от ресурсов, выделенных Центром Подчиненному, то

$$0 \leq b_i \leq 1\,. \tag{2.11}$$

Но при производстве продукции Подчиненный загрязняет реку сточными водами, за что платит штраф, назначаемый государством в размере s_i за единицу сброшенных веществ. Если объем сбросов сточных вод больше допустимого или критического уровней, Подчиненный либо выплачивает дополнительные штрафы, назначаемые Экологическим Центром за превышение лимитов сброса загрязняющих веществ, либо очищает свои сточные воды с выбранным им уровнем очистки p_i, измеряемом в доле или процентах от объема сброшенных веществ w_i, и функцией затрат $c_p(p_i)$. Уровень очистки p_i может иметь следующие пределы:

$$0 \le p_i \le 1 - \varepsilon\,. \tag{2.12}$$

Полностью сточные воды очистить нельзя, можно приблизиться к 100% очистки только на определенный уровень ε, который определяется техническими средствами, применяемыми для очистки вод Подчиненным.

Если после очистки сточных вод количество загрязняющих веществ все-таки превышает допустимый или критический предел, то Подчиненный платит соответствующий штраф.

Таким образом, в целевую функцию Подчиненного входит доход от деятельности в общих и в своих частных целях за вычетом средств, выплачиваемых государству или Экологическому Центру в качестве штрафов и потраченных на очистку сточных вод.

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки меньше допустимого уровня, т.е. $0 \le w_i(1-p_i) \le \widetilde{w_1}$, целевая функция Подчиненного имеет вид

$$\begin{aligned} y_i^{(0)} = \quad & h_i\left(\left(1 - b_i - u_i\right) r_i\right) + g_i\left(u_i r_i\right) - \\ & - w_i C_p\left(p_i\right) - s_i w_i\left(1 - p_i\right) \to \max_{u_i, b_i, p_i} \end{aligned} \tag{2.13}$$

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше допустимого уровня, но меньше критического, т.е. $\widetilde{w_1} \le w_i(1 - p_i) \le \widetilde{w_2}$, то целевая функция Подчиненного имеет вид

$$y_i^{(1)} = h_i\left(\left(1 - b_i - u_i\right) r_i\right) + g_i\left(u_i r_i\right) - w_i C_p\left(p_i\right) - \\ - s_i \widetilde{w_1} - K_{ch} s_i\left(w_i\left(1 - p_i\right) - \widetilde{w_1}\right) \to \max_{u_i, b_i, p_i} \qquad (2.14)$$

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше критического уровня, т.е. $w_i\left(1 - p_i\right) \geq \widetilde{w_2}$, то целевая функция Подчиненного имеет вид

$$y_i^{(2)} = h_i\left(\left(1 - b_i - u_i\right) r_i\right) + g_i\left(u_i r_i\right) - w_i C_p\left(p_i\right) - s_i \widetilde{w_1} - \\ - K_{ch} s_i\left(\widetilde{w_2} - \widetilde{w_1}\right) - K_{ca} s_i\left(w_i\left(1 - p_i\right) - \widetilde{w_2}\right) \to \max_{u_i, b_i, p_i} \quad (2.15)$$

То есть в задачу Подчиненного включается целевая функция (2.13), (2.14) или (2.15) при ограничениях (2.9)-(2.12).

От выбора Подчиненного зависят следующие величины: u_i – доля выделенного ресурса, используемая i-м Подчиненным для решения общесистемных задач; b_i – доля выделенного ресурса, возвращаемая i-м Подчиненным Центру в качестве взятки (от r_i) и p_i – уровень очистки сброшенных в реку сточных вод.

4. Речная система является пассивным объектом, не имеет целевых функций и управляемых величин.

Итак, соотношения (2.1) – (2.15) составляют модель распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов, которая является иерархической игрой $(n+2)$-х лиц: Экономического Центра, Экологического Центра и n Подчиненных.

Заметим, что два Центра: Экологический и Экономический – не зависят от действий друг друга, т.е. стратегии каждого из них никак не влияют ни на значение целевой функции, ни на ограничения другого.

Кроме того, в составе целевой функции Подчиненного можно выделить две части:

1. «экономическая составляющая», которую образуют первые 2 слагаемых $h_i\left(\left(1 - b_i - u_i\right) r_i\right) + g_i\left(u_i r_i\right)$. Эта часть целевой функции зависят от стратегий Подчиненного u_i и b_i, которые не влияют и не зависят от действий Экологического Центра, и от стратегий Экономического Центра r_i и q_i. Кроме того, эта часть

целевой функции Подчиненного не зависит от действий Экологического Центра и, в свою очередь, никак не влияет на его действия.

2. «экологическая составляющая», которая состоит из остальных слагаемых функции (2.13), (2.14) или (2.15). Эта составляющая зависит только от стратегий Экологического Центра K_{ch} и K_{ca} и от стратегии Подчиненного p_i, которая не влияет на действия и целевую функцию Экономического Центра и не зависит от них.

Учитывая, что два Центра не влияют на деятельность друг друга, и целевая функция Подчиненного состоит из двух независящих друг от друга частей, модель распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов можно разбить на две модели: модель распределения ресурсов и модель управления качеством речной воды.

Модель распределения ресурсов в древовидной системе управления является игрой $(n+1)$ лиц: Экономического Центра и n Подчиненных. Задача экономического Центра имеет вид (2.1)-(2.4).
Задача Подчиненного имеет вид:

$$J_i = h_i\left(\left(1 - b_i - u_i\right) r_i\right) + g_i\left(u_i r_i\right) \to \max \tag{2.16}$$

при ограничениях (2.9)-(2.11).

Стратегиями Экономического Центра являются величины распределения ресурсов Подчиненным r_i и величины контроля над использованием ресурсов q_i.

Модель управления качеством речной воды является игрой $(n+1)$ лиц: Экологического Центра и n Подчиненных.

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки меньше допустимого уровня, т.е. $0 \leq w_i\left(1 - p_i\right) \leq \widetilde{w_1}$, задача Подчиненного имеет вид (2.13), (2.12), а выигрыш Экологического Центра находится как

$$G_0 = -C_a\left(y\right) .$$

Здесь Экологический Центр не решает свою задачу оптимизации, так как его стратегиями являются назначение штрафов, до которых здесь дело не доходит, поскольку Подчиненный не нарушает пределы сбросов сточных вод в реку.

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше допустимого уровня, но меньше критического, т.е. $\widetilde{w_1} \leq w_i\,(1-p_i) \leq \widetilde{w_2}$, то задача Подчиненного имеет вид (2.14), (2.12), а задача Экологического Центра имеет вид (2.5), (2.7).

В случае, если объем сброса загрязняющих веществ после очистки больше критического уровня, т.е. $w_i\,(1-p_i) \geq \widetilde{w_2}$, то задача Подчиненного имеет вид (2.15), (2.12), а задача Экологического Центра имеет вид (2.6)-(2.8).

Таким образом стратегиями Экологического Центра являются назначение штрафов K_{ch} и K_{ca}, а стратегией Подчиненного — уровень очистки сточных вод p_i.

3. Математические модели распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов с использованием методов теории игр в нормальной форме

В данном разделе рассматривается двухуровневая древовидная модель управления качеством водных объектов [2-3], состоящая из одного Центра и n подчиненных ему подразделений. Центр имеет некоторое количество ресурсов R, которое необходимо распределить между Подчиненными. Не исключено, что Центр оставляет часть ресурсов на собственные цели, и что Подчиненные, в свою очередь, могут распределить доставшееся им количество ресурсов как на общесистемные цели, так и на свои частные цели. Учтена возможность влияния Подчиненных на количество распределенных им ресурсов при помощи механизма коррупции. И Центр, и Подчиненные стремятся максимизировать свои целевые функции от использования ресурсов J_0 и J_i, $i = 1, \ldots, n$, соответственно. Для простоты примем количество $R = 1$.

В целевую функцию Центра включаются средства, полученные от использования ресурсов Подчиненными в общих целях, средства, полученные от использования оставшихся ресурсов в своих собственных интересах, и средства, полученные от Подчиненных в качестве взятки.

Целевая функция Подчиненного состоит из дохода от его деятельности, направленной на общесистемные цели, и от деятельности, направленной на свои частные цели [3].

Задачи (2.1)–(2.4), (2.16), (2.9)–(2.11) – иерархическая игра $(n+1)$-го лица в нормальной форме: Центра и n Подчиненных. Центр имеет право первого хода. Стратегиями Центра являются распределение ресурсов r_i и назначение контроля над использованием ресурсов q_i. Стратегиями Подчиненных являются следующие величины: доля ресурса u_i, выделенного Центром, используемая на общесистемные цели, и доля ресурсов b_i, возвращаемая Центру в качестве взятки.

Рассматриваются следующие механизмы коррупции [4]:

1. $r_i = r_i\left(b_i\right)$ – коррупция при выделении ресурсов;
2. $q_i = q_i\left(b_i\right)$ – коррупция при контроле выполнения общесистемных требований.

И q-коррупция, и r-коррупция рассматривается в двух случаях: в случаях мягкой коррупции (попустительство) и жесткой коррупции (вымогательства) (рис.2).

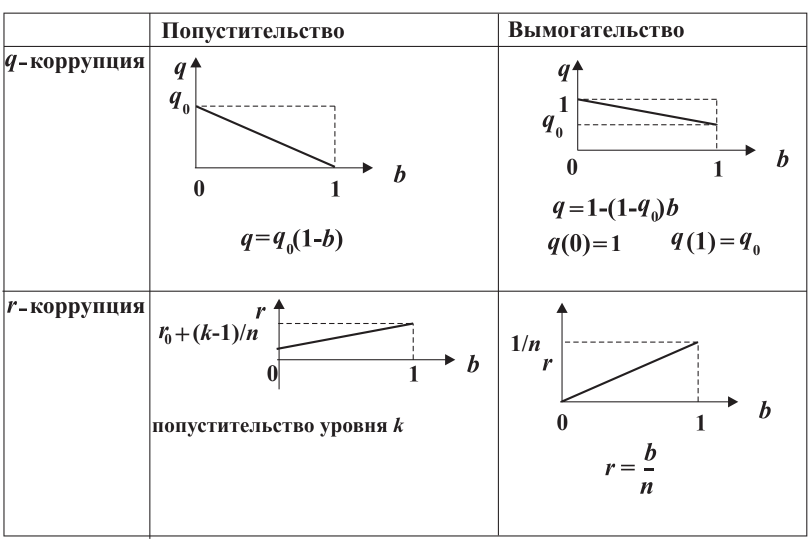

Рисунок 2. Виды коррупции

3.1. Распределение ресурсов при отсутствии коррупции ($r_i(b_i) \equiv r_{i0}$)

Теоретико-игровая модель выглядит следующим образом:
задача Центра

$$J_0 = H\left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i\right) + \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i r_i) \to \max \tag{3.1}$$

$$0 \le q_i \le 1$$

$$0 \le r_i \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \le 1 \tag{3.2}$$

задача Подчиненного

$$J_i = g_i(u_i r_i) + h_i((1 - b_i - u_i) r_i) \to \max \tag{3.3}$$

$$q_i \le u_i \le 1,\ i = 1, \ldots, n.$$

Равновесием игры по Штакельбергу (3.1)-(3.3) является следующий набор стратегий участников системы:
при $\beta = 1$, $u_i = 1$, $b_i = 0$, $q_i = 1$, $r_i = \begin{cases} 1, i = im, \\ 0, i \ne im, \end{cases}$
где $g_{im}(1) \ge g_i(1)$, $i = 0, \ldots, n$, (т.е. в im достигается $\max\limits_{i=0,\ldots,n} g_i(1)$),
при $\beta \ne 1$, $u_i = 1$, $b_i = 0$, $q_i = 1$, $r_i^* = \frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[1-\beta]{g_i(x)} + \sqrt[1-\beta]{H(x)}}$.

Содержательный смысл: Центр назначает величину контроля над использованием ресурсов – 100%, т.е. не менее 100%, полученных от Центра ресурсов Подчиненный должен потратить на общесистемные цели. В случае $\beta = 1$ (т.е. когда эластичность производства равна 1) Центру выгодно все ресурсы отдать тому Подчиненному, у которого производственная мощность больше. В том числе здесь (при $\beta = 1$) возможен случай, когда все ресурсы Центру выгоднее всего оставить себе, если его производственная мощность нецелевой деятельности больше производственных мощностей всех Подчиненных.

В случае попустительства при контроле над использованием ресурсов Центр может способствовать тому, чтобы все полученные от Центра ресурсы Подчиненный использовал на достижение общесистемных целей, поскольку возможности использования ресурсов для достижения личных целей у Подчиненного нет, а взятку платить Подчиненному невыгодно, т.к. на количество выданных ресурсов эта взятка не повлияет.

3.2. Распределение ресурсов при вымогательстве $\left(r_i\left(b_i\right)=\frac{b_i}{n}\right)$

Равновесием по Штакельбергу в игре:

$$J_0=H\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}g_i\left(\frac{u_ib_i}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{n^2}\rightarrow\max$$
$$0\le q_i\le 1$$
$$0\le\frac{b_i}{n}\le 1$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{n}\le 1$$
$$J_i=g_i\left(\frac{u_ib_i}{n}\right)+h_i\left(\frac{\left(1-b_i-u_i\right)b_i}{n}\right)\rightarrow\max$$
$$q_i\le u_i\le 1, b_i+u_i\le 1, i=1,\ldots,n.$$

является следующий набор стратегий участников системы при $\beta\neq 1$ $r_i=\max\left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}}{2\left(\sqrt[1-\beta]{g_i(x)}+\sqrt[1-\beta]{h_i(x)}\right)},q_i\right\}$, где стратегия q_i находится методом последовательных приближений с заданной точностью,

$$b_i=\begin{cases}\frac{1}{2}, & u_i\neq q_i,\\ \text{находится методом дихотомии}, & u_i=q_i.\end{cases}$$

Содержательный смысл: если Центр не препятствует Подчиненному в достижении наибольшего значения его целевой функции (т.е. принуждает Подчиненного использовать в общих целях количество ресурсов, не большее чем выгодно Подчиненному, то 50% ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки [3]

Доказано, что задачу Центра можно решить при помощи метода итераций, а задачу Подчиненного решается методом дихотомии.

В статье также исследован случай введения механизма коррупции (попустительства) $q_i\left(b_i\right)=q_{i0}\left(1-b_i\right)$ на величину контроля над использованием ресурсовы, и в этом случае равновесие по Штакельбергу в игре выглядит следующим образом:

$q_{i0}=1, b_i=\frac{1}{2}$. Следовательно, $r_i=\frac{1}{2n}$.
Заметим, что:

1. Центр здесь не оставляет Подчиненным возможности использовать ресурсы на свои частные цели, т.к. все ресурсы, не пошедшие на общесистемные цели, Центр забирает себе в качестве взятки;

2. Ровно половину ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки.

3.3. Распределение ресурсов при попустительстве $\left(r_i\left(b_i\right)=r_{i0}+\frac{(k-1)b_i}{n}\right)$

Теоретико-игровая модель выглядит следующим образом:

$$J_0 = H\left(1-\sum_{i=1}^{n} r_{i0}-\frac{k-1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} g_i\left(u_i\left[r_{i0}+\frac{(k-1)\,b_i}{n}\right]\right)+\sum_{i=1}^{n} b_i\left(r_{i0}+\frac{(k-1)\,b_i}{n}\right)\to\max \quad (3.4)$$

$$0\le q_i\le 1$$

$$0\le r_{i0}+\frac{(k-1)\,b_i}{n}\le 1 \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i0}+\frac{(k-1)\,b_i}{n}\right)\le 1 \quad (3.6)$$

– задача Центра,

$$J_i = g_i\left(u_i\left[r_{i0}+\frac{(k-1)\,b_i}{n}\right]\right)+$$

$$h_i\left((1-b_i-u_i)\left[r_{i0}+\frac{(k-1)\,b_i}{n}\right]\right)\to\max \quad (3.7)$$

$$q_i\le u_i\le 1, b_i+u_i\le 1, i=1,\ldots,n$$

– задача Подчиненного.

Оптимальной стратегией Подчиненного в игре (3.4)-(3.7), соответствующей заданной стратегии Центра $\left(q_i, r_{i0}\right), i=1,\ldots,n$ является

$$u_i=\max\left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{g_i\left(x\right)}}{2\left(\sqrt[1-\beta]{g_i\left(x\right)}+\sqrt[1-\beta]{h_i\left(x\right)}\right)}\left(1+\frac{nr_{i0}}{k-1}\right), q_i\right\}$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{nr_{i0}}{2(k-1)}, & u_i \neq q_i, \\ \text{находится методом дихотомии}, & u_i = q_i. \end{cases}$$

Таким образом, если Центр не препятствует Подчиненному в достижении наибольшего значения его целевой функции (т.е. принуждает Подчиненного использовать в общих целях количество ресурсов, не большее чем выгодно Подчиненному), то менее 50% ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки, что меньше, чем в случае вымогательства при распределении ресурсов [3].

В работе также исследован случай введения механизма коррупции (попустительства) $q_i\left(b_i\right) = q_{i0}\left(1 - b_i\right)$ на величину контроля над использованием ресурсов, и в том случае равновесие по Штакельбергу выглядит следующим образом:
$q_{i0} = 1, b_i = \frac{1}{2} - \frac{nr_{i0}}{2(k-1)}$. Следовательно, $r_i = \frac{nr_{i0}+k-1}{2n}$.

Заметим, что:

1. Центр здесь не оставляет Подчиненным возможности использовать ресурсы на свои частные цели, т.к. все ресурсы, не пошедшие на общесистемные цели, Центр забирает себе в качестве взятки;

2. Менее половины ресурсов Подчиненный возвращает Центру в качестве взятки.

4. Математические модели распределения ресурсов в древовидных системах управления качеством водных объектов с использованием теории кооперативных игр

В статье найдены величины выигрышей всех возможных коалиций, их кооперативные эффекты, и оптимальные дележи в виде вектора Шепли и вектора пропорционального распределения [1] в игровой модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством водных объектов.

Значения выигрышей всех возможных коалиций в игре (2.1)-(2.4), (2.13), (2.9)-(2.11) в случае $\beta \neq 1$.

$$v\left(0\right) = J_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}} + H\left(1\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta},$$

$$v(i) = J_i = \frac{g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}}, i = 1, \ldots, n,$$

$$v(L) = \frac{\sum\limits_{i \in L} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}},$$

$$v\left(\{0\} \bigcup \{i\}\right) = \left(\sum_{j \neq i} \sqrt[1-\beta]{g_j(1)} + \sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{H}\right)^{1-\beta},$$

$$v\left(\{0\} \bigcup L\right) = \left(\sum_{i \notin L} \sqrt[1-\beta]{g_i(1)} + \sum_{i \in L} \left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \sqrt[1-\beta]{H}\right)^{1-\beta},$$

$$v(N) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \sqrt[1-\beta]{H}\right)^{1-\beta},$$

Здесь Центр в качестве производственных мощностей входящих с ним в одну коалицию Подчиненных принимает удвоенные величины плюс фактическую величину мощности при нецелевом использовании ресурсов, за счет чего повышает долю ресурсов, выделенных данным Подчиненным.

Вектор Шепли для всех участников системы имеет вид [2-3]:

$$\Phi_0 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta} -$$

$$- \frac{n-1}{2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[1-\beta]{h_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \gamma(s) \sum_{\forall K, |K| = s-1} \left(\sum_{i \ni K} \sqrt[1-\beta]{g_i(1)} + \sum_{i \in K}\left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt[1-\beta]{H(1)}\right)^{1-\beta}$$

$$\Phi_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{i \in M} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} \gamma(s) \sum_{\forall K, |K|=s-1, l \in K} \left[\left(\sum_{i \notin K} \sqrt[1-\beta]{g_i(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i \in K} \left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{H(1)} \right) \right)^{1-\beta} - \right.$$

$$- \sum_{s=2}^{n} \gamma(s) \sum_{\forall K, |K|=s-1} \left(\sum_{i \ni K - \{l\}} \sqrt[1-\beta]{g_i(1)} + \sum_{i \in K - \{l\}} \left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}\ \sqrt[1-\beta]{H(1)} \right)^{1-\beta} \right) \right]$$

$$l = 1, \ldots, n.$$

Здесь Центр в качестве производственных мощностей входящих с ним в одну коалицию Подчиненных принимает удвоенные величины плюс фактическую величину мощности при нецелевом использовании ресурсов, за счет чего повышает долю ресурсов, выделенных данным Подчиненным [2-3].

Вектор пропорционального распределения [1] для всех участников имеет вид:

$$x_0 = \left(\sum_{i \in N} (\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)}) + \sqrt[1-\beta]{H(1)} \right)^{1-\beta} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}$$

$$x_l = \left(\sum_{i \in N} \left(\sqrt[1-\beta]{2g_i(1)} + \sqrt[1-\beta]{h_i(1)} \right) + \sqrt[1-\beta]{H(1)} \right)^{1-\beta} \cdot$$

$$\cdot \frac{g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} g_i(1)^{\frac{1}{1-\beta}} + H(1)^{\frac{1}{1-\beta}}}.$$

Итак, больше половины выигрыша коалиции Центр забирает себе.

5. Модель управления качеством речной воды в эколого-экономической системе

Решением задачи (2.13), (2.12) является следующая стратегия Подчиненного

$$p_i = \begin{cases} \max\{1 - \frac{\widetilde{w_1}}{w_i}, 0\}, & s_i < \frac{D}{(1-v)} \cdot \max^2\{\frac{\widetilde{w_1}}{w_i}, 1\}, \\ 1 - \sqrt{\frac{D}{(1-v)s_i}}, & \frac{D}{(1-v)} \cdot \max^2\{\frac{\widetilde{w_1}}{w_i}, 1\} \le s_i \le \frac{D}{(1-v)\varepsilon^2}, \\ 1 - \varepsilon, & s_i > \frac{D}{(1-v)\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия Подчиненного в задаче (2.5), (2.7), (2.14), (2.12)

$$p_i = \begin{cases} \max\{1 - \frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, 0\}, & K_{ch} < \frac{D}{s_i} \cdot \max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, 1\}, \\ 1 - \sqrt{\frac{D}{K_{ch} s_i}}, & \frac{D}{s_i} \cdot \max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, 1\} \le K_{ch} \le \frac{D}{s_i \varepsilon^2}, \\ 1 - \varepsilon, & K_{ch} > \frac{D}{s_i \varepsilon^2}. \end{cases}$$

Оптимальные стратегии участников в задаче (2.6) - (2.8), (2.15), (2.12)

$$p_i = \begin{cases} 0, & K_{ca} < \frac{D}{s_i}, \\ 1 - \sqrt{\frac{D}{K_{ca} s_i}}, & \frac{D}{s_i} \le K_{ca} \le \frac{D}{s_i \max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, \varepsilon\}}, \\ 1 - \varepsilon, & K_{ca} > \frac{D}{s_i \max^2\{\frac{\widetilde{w_2}}{w_i}, \varepsilon\}}. \end{cases}$$

6. Заключение

В работе рассмотрена игровая модель распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством водных ресурсов. Данная модель распадается на две частные модели взаимодействия субъектов эколого-экономической системы, включающей Экономический Центр, Экологический Центр и Подчиненных. В первой модели изучено распределение ресурсов Экономическим Центром между Подчиненными с учетом возможности нецелевого использования и коррупции. Исследован новый случай введения коррупции: коррупция при контроле над использованием ресурсов. Найдены выигрыши всех возможных коалиций между всеми участниками системы. Во второй модели исследована возможность обеспечения экологических требований путем экономического воздействия Экологическим Центром на Подчиненного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агиева М.Т., Мальсагов Г.А., Угольницкий Г.А. *Моделирование иерархической структуры управления образованием*, Издательство ООО “ЦВВР”. Ростов-на-Дону. 2003.

2. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А. *Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее приложения* // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1. 2007. С. 24–29.

3. Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.*Модели распределения ресурсов в иерархических системах управления качеством речной воды* // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН. № 26. 2009. С. 64–80.

4. Рыбасов Е.А., Угольницкий Г.А. *Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции* // Компьютерное моделирование. Экология. Вып. 2., Москва: Вузовская книга, 2004.

RESOURCE ALLOCATION GAME-MODELS IN THE HIERARCHICAL SYSTEMS OF RIVER WATER QUALITY CONTROL

Olga I. Gorbaneva, Southern Federal University, Cand.Sc. (gorbaneva@mail.ru).

Abstract: The resource allocation problem in the hierarchical systems of river water quality control described and investigated by Stackelberg equilibrium finding. The problem may be divided into two subproblems: the resource allocation problem in hierarchical systems and the river water quality control problem. Three cases of allocation resource model are considered: no corruption mechanism, connivance and racket under resource allocation and the resource using controlling.

Keywords: tree-type hierarchical system, corruption mechanisms, game-theoretic models.