Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 47-66

УДК 519.83

ББК 22.18

ОПТИМИЗАЦИЯ В КЛАССЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОАЛИЦИОННЫХ ИГР

Ксения Владимировна Григорьева
Факультет прикладной математики –
– процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр. 35
e-mail: kseniya196247@mail.ru

В работе рассмотрен один из классов многошаговых стохастических игр с различными коалиционными разбиениями. Исследуемая здесь игра задается на древовидном графе, где в каждой вершине z определяется коалиционное разбиение игроков, функция выигрыша коалиций и вероятности перехода в следующие вершины в зависимости от ситуации, реализовавшейся в игре, заданной в вершине z. Предложен новый математический метод решения стохастических коалиционных игр на основе вычисления обобщенного PMS-вектора как решения коалиционных игр. Предложенный метод иллюстрируется на примере трехшаговой стохастической игры трех лиц с переменной коалиционной структурой.

Ключевые слова: оптимизация, многошаговые игры, стохастические игры, равновесие по Нэшу, PMS-вектор.

---

1. Введение

В работе рассмотрен один из классов многошаговых стохастических игр с различными коалиционными разбиениями, предложен новый математический метод решения стохастических коалиционных игр на основе вычисления обобщенного PMS-вектора, введенного впервые в [4, 6] как решения коалиционных игр. Предложенный метод иллюстрируется на примере двухшаговой стохастической игры трех лиц с переменной коалиционной структурой.

Напомним, что *коалиционной игрой* является игра, в которой принимающие решение игроки объединены в фиксированные коалиции с целью получения максимально возможного выигрыша, а *стохастической игрой* является многошаговая игра со случайными переходами из состояния в состояние, разыгрываемая одним и более игроками.

2. Постановка задачи

Пусть задан конечный древовидный граф $\Gamma = (Z,\ L)$, где Z – множество вершин графа, а L – точечно-множественное отображение, заданное на множестве Z: $L\,(z) \subset Z,\ z \in Z$. Конечный древовидный граф с начальной вершиной z_0 будем обозначать через $\Gamma\,(z_0)$.

В каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma\ (z_0)$ задана *игра в нормальной форме*

$$G\,(z) = \langle N, X_1, \ldots, X_n,\ K_1, \ldots, K_n \rangle\,,$$

где

- $N = \{1,\ \ldots,\ n\}$ – множество игроков, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
- $X_j = \left\{ x_j^z \middle|\ x_j^z = k\,,\ k = \overline{1\,,\, m_j} \right\}$ – множество чистых стратегий игрока $j \in N$, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;
  - m_j – число чистых стратегий игрока $j \in N$ в множестве X_j;
  - x_j^z – чистая стратегия игрока $j \in N$ в вершине $z \in Z$;
  - $\mu_j^z = \left\{\, \mu_k^j \right\}_{k=\overline{1,m_j}} \in \Sigma_j$ – смешанная стратегия игрока $j \in N$ в вершине $z \in Z$, где μ_k^j – вероятность выбора j-м игроком k-й чистой стратегии: $\mu_k^j \geq 0\,,\ \ j = \overline{1\,,\, n}\,,\ \ k = \overline{1\,,\, m_j}\ ,\ \ \sum\limits_{k=1}^{m_j} \mu_k^j = 1;$

- Σ_j – множество всех смешанных стратегий j-го игрока;

- набор чистых стратегий $x^z = (x_1^z, \ldots, x_n^z) \in X$, $x_j^z \in X_j$, $j = \overline{1, n}$, называется *ситуацией игры* $G(z)$ в вершине $z \in Z$;

- $X = \prod\limits_{i=\overline{1,n}} X_i$ – множество ситуаций, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;

- набор смешанных стратегий $\mu^z = (\mu_1^z, \ldots, \mu_n^z) \in \Sigma$, $\mu_j^z \in \Sigma_j$, $j = \overline{1, n}$, называется *ситуацией игры* $G(z)$ *в смешанных стратегиях* в вершине $z \in Z$;

- $\Sigma = \prod\limits_{j=\overline{1,n}} \Sigma_j$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях, одинаковое для всех вершин $z \in Z$;

- $K_j(x^z)$, $x^z \in X$, – функция выигрыша j-го игрока, одна и та же для всех вершин $z \in Z$; предполагается, что $K_j(x^z) \geq 0$ $\forall\, x^z \in X$ и $\forall\, j \in N$.

Далее, пусть в каждой вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$ задано коалиционное разбиение множества N

$$\Sigma_z = \{S_1, \ldots, S_l\}, \; l \leq n, \; S_i \cap S_j = \emptyset, \; \forall\, i \neq j, \; \bigcup_{i=1}^{l} S_i = N,$$

т.е. множество игроков N разделено на l коалиций, каждая из которых действует как один игрок. Коалиционные разбиения, вообще говоря, различны для разных вершин z.

Тогда в каждой вершине $z \in Z$ мы имеем *одновременную коалиционную игру l лиц в нормальной форме ассоциированную с игрой* $G(z)$

$$G(z, \Sigma_z) = \left\langle N, \tilde{X}_{S_1}^z, \ldots, \tilde{X}_{S_l}^z, H_{S_1}^z, \ldots, H_{S_l}^z \right\rangle,$$

где

- $\tilde{X}_{S_i}^z = \prod\limits_{j \in S_i} X_j$ – множество стратегий $\tilde{x}_{S_i}^z$ коалиции $S_i, i = \overline{1, l}$, где *стратегия* $\tilde{x}_{S_i}^z \in \tilde{X}_{S_i}^z$ *коалиции* S_i – это набор стратегий игроков из коалиции S_i, т.е. $\tilde{x}_{S_i}^z = \left\{ x_j^z \in X_j \,\middle|\, j \in S_i \right\}$;

• набор стратегий $\tilde{x}^z = \left(\tilde{x}^z_{S_1}, \ldots, \tilde{x}^z_{S_l}\right) \in \tilde{X}^z$, $\tilde{x}^z_{S_i} \in \tilde{X}^z_{S_i}$, $i = \overline{1,\, l}$, называется *ситуацией в игре* $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$;

• $\tilde{X}^z = \prod\limits_{i=\overline{1,\,l}} \tilde{X}^z_{S_i}$ – множество ситуаций в одновременной игре $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$;

• $\tilde{\mu}^z_i$ – смешанная стратегия коалиции S_i, $i = \overline{1,\, l}$, в вершине $z \in Z$;

• $\tilde{\Sigma}^z_i$ – множество смешанных стратегий коалиции S_i, $i = \overline{1,\, l}$, в вершине $z \in Z$;

• набор смешанных стратегий $\tilde{\mu}^z = (\tilde{\mu}^z_1, \ldots, \tilde{\mu}^z_l) \in \tilde{\Sigma}^z$, $\tilde{\mu}^z_i \in \tilde{\Sigma}^z_i$, $i = \overline{1,\, l}$, называется *ситуацией игры* $G\,(z)$ *в смешанных стратегиях* в вершине $z \in Z$;

• $\tilde{\Sigma}^z = \prod\limits_{i=\overline{1,\,l}} \tilde{\Sigma}^z_i$ – множество ситуаций в смешанных стратегиях в вершине $z \in Z$;

- функция выигрыша коалиции S_i определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции S_i, т.е.

$$H^z_{S_i}\,(\tilde{x}^z) = \sum_{j \in S_i} K_j\,(x)\ ,\ \ i = \overline{1,\, l}\,,$$

  где $x^z = (x^z_1, \ldots, x^z_n)$ и $\tilde{x}^z = \left(\tilde{x}^z_{S_1},\ \ldots\ ,\ \tilde{x}^z_{S_l}\right)$ – одна и та же ситуация в играх $G\,(z)$ и $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$, такая, что для каждой компоненты x^z_j, $j = \overline{1,\, n}$, из ситуации x^z следует, что эта же компонента x^z, $j \in S_i$, входит в состав стратегии $\tilde{x}^z_{S_i}$ из ситуации $\tilde{x}^z$.

Примем единое обозначение x^z для ситуации в играх $G\,(z)$ и $G\,(z, \Sigma_z)$. Из этого однако не следует, что $\mu^z = \tilde{\mu}^z$.

Далее, для каждой вершины $z \in Z$ графа $\Gamma\ (z_0)$ определены вероятности перехода $p\,(z,\ y\,;\ x^z)$ в следующие вершины $y \in L\,(z)$ графа $\Gamma\ (z_0)$, которые зависят от ситуации x^z, реализовавшейся в игре $G\,(z\,,\ \Sigma_z)$ с фиксированным в ней коалиционным разбиением:

$$p\,(z,\ y\,;\ x^z) \geq 0\,,$$
$$\sum_{y \in L(z)} p\,(z,\ y\,;\ x^z) = 1\,.$$

Определение 2.1. *Конечношаговой коалиционной стохастической игрой* $\tilde{\Gamma}(z_0)$ *будем называть игру на конечном древовидном графе* $\Gamma(z_0)$ *с начальной вершиной* z_0*:*

$$\tilde{\Gamma}(z_0) = \left\langle N, \Gamma(z_0), \{G(z, \Sigma_z)\}_{z\in Z}, \{p(z, y; x^z)\}_{z\in Z, y\in L(z), x^z\in X^Z}, k_{\tilde{\Gamma}} \right\rangle,$$

где

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *– множество игроков, одинаковое для всех вершин* $z \in Z$*;*
- $\Gamma(z_0)$ *– древовидный граф с начальной вершиной* z_0*;*
- $\{G(z, \Sigma_z)\}_{z\in Z}$ *– одновременные коалиционные игры* l *лиц в нормальной форме, заданные в каждой вершине* $z \in Z$ *графа* $\Gamma(z_0)$*;*
- $\{p(z, y; x^z)\}_{z\in Z, y\in L(z), x^z\in X^Z}$ *– вероятности реализации коалиционной игры* $G(y, \Sigma_y)$ *в вершине* $y \in L(z)$ *при условии, что на предыдущем шаге в одновременной игре* $G(z, \Sigma_z)$ *реализовалась ситуация* x^z*;*
- $k_{\tilde{\Gamma}}$ *– число шагов в стохастической игре* $\tilde{\Gamma}(z_0)$*, конечное и фиксированное; шаг* k *в вершине* $z_k \in Z$ *определяется из условия* $z_k \in (L(z_0))^k$*, т.е. вершина* z_k *достигается из вершины* z_0 *за* k *шагов.*

Состояниями в данной позиционной стохастической игре $\tilde{\Gamma}$ являются вершины графа $z \in Z$ с заданными в них коалиционными разбиениями Σ_z, т.е. пара вида (z, Σ_z). Игра $\tilde{\Gamma}$ является стохастической, так как переход из состояния (z, Σ_z) в состояние (y, Σ_y), $y \in L(z)$, определяется заданной вероятностью перехода $p(z, y; x^z)$.

Игра происходит следующим образом. Игра $\tilde{\Gamma}(z_0)$ начинается в вершине z_0, где реализуется игра $G(z_0, \Sigma_{z_0})$ с некоторым коалиционным разбиением Σ_{z_0}. Игроки выбирают свои стратегии, образуется ситуация игры x^{z_0}. Затем с заданными вероятностями $p(z_0, z_1; x^{z_0})$ в зависимости от ситуации x^{z_0} осуществляется переход из вершины z_0 на древовидном графе $\Gamma(z_0)$ в игры $G(z_1, \Sigma_{z_1})$, $z_1 \in L(z_0)$. В игре $G(z_1, \Sigma_{z_1})$ игроки снова выбирают свои стратегии, образуется ситуация игры x^{z_1}. Затем из вершины $z_1 \in L(z_0)$ делается переход на графе в вершину $z_2 \in (L(z_0))^2$, снова образуется ситуация игры x^{z_2}, и так до тех пор, пока не будут достигнуты вершины $z_{k_{\tilde{\Gamma}}} \in (L(z_0))^{k_{\tilde{\Gamma}}}$, $L\left(z_{k_{\tilde{\Gamma}}}\right) = \emptyset$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}(z)$ подыгру игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$, берущую начало в вершине $z \in Z$ графа $\Gamma(z_0)$, т.е. с коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$. Подыгра $\tilde{\Gamma}(z)$ очевидно также является стохастической игрой.

Введем обозначения:

- $u_j^z(\cdot)$ – стратегия игрока j, $j = \overline{1, n}$, в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, которая каждой вершине $y \in Z$ ставит в соответствие стратегию x_j^y игрока j в одновременной игре $G(y, \Sigma_y)$ при $y \in \Gamma(z)$, т.е.
$$u_j^z(y) = \left\{ x_j^y \,\middle|\, y \in \Gamma(z) \right\};$$
- $u_{S_i}^z(\cdot)$ – стратегия коалиции S_i в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$, которая есть набор стратегий $u_j^z(\cdot)$, $j \in S_i$;
- $u^z(\cdot) = (u_1^z(\cdot), \ldots, u_n^z(\cdot)) = \left(u_{S_1}^z(\cdot), \ldots, u_{S_n}^z(\cdot)\right)$ – ситуация в подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$.

Нетрудно показать, что выигрыш $E_j^z(u^z(\cdot))$ игрока j, $j = \overline{1, n}$, в любой подыгре $\tilde{\Gamma}(z)$ определяется как математическое ожидание выигрыша игрока j по следующей формуле ([2], с. 158):

$$E_j^z(u^z(\cdot)) = K_j(x^z) + \sum_{y \in L(z)} \left[p(z, y; x^z)\, E_j^y(u^y(\cdot))\right]. \qquad (2.1)$$

Выигрыш $H_{S_i}^z(x^z)$ коалиции $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, в каждой коалиционной игре $G(z, \Sigma_z)$ игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ в вершине $z \in Z$ в каждой ситуации x^z определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции S_i:

$$H_{S_i}^z(x^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x^z). \qquad (2.2)$$

Выигрыш коалиции $H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right),\ S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$, в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ игры $\tilde{\Gamma}\left(z_0\right)$ в вершине $z\in Z$ определяется как сумма выигрышей игроков из коалиции S_i в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ в вершине $z\in Z$:

$$H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right)=\sum_{j\in S_i}E^z_j\left(u^z\left(\cdot\right)\right)=$$

$$=\sum_{j\in S_i}\left\{K_j\left(x^z\right)+\sum_{y\in L(z)}\left[p\left(z,\,y\,;\,x^z\right)\,E^y_j\left(u^y\left(\cdot\right)\right)\right]\right\}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что в любой вершине $z\in Z$ при коалиционном разбиении Σ_z игра $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами E^z_j игроков $j=\overline{1,\,n}$, определенными формулой (2.1), является бескоалиционной игрой между коалициями $S_i\in\Sigma_z$ с выигрышами коалиций $H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right)$, определенными формулой (2.3). Для конечных бескоалиционных игр существование ситуации равновесия в смешанных стратегиях доказано [3, с. 137].

Напомним, что ситуацией равновесия по Нэшу (Nash Equilibrium, NE) называется ситуация $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$:

$$H^z_{S_i}\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)\geq H^z_{S_i}\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\ ||\ u^z_{S_i}\left(\cdot\right)\right)\quad\forall\ u^z_{S_i}\left(\cdot\right)\in U^z_{S_i}\,,\ \ \forall\ S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}\,,$$

где $U^z_{S_i}$ – множество стратегий $u^z_{S_i}\left(\cdot\right)$ коалиции $S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$, а запись $\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\ ||\ u^z_{S_i}\left(\cdot\right)\right)$ означает, что коалиция S_i отклоняется от ситуации $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$, выбирая стратегию $u^z_{S_i}\left(\cdot\right)$ вместо стратегии $\bar{u}^z_{S_i}\left(\cdot\right)\in\bar{u}^z\left(\cdot\right)$.

Поскольку выигрыши игроков $j,\ j=\overline{1,\,n}$, не выделены из коалиционного выигрыша в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$, то на следующем шаге в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(y\right),\ y\in L\left(z\right)$, при другом коалиционном разбиении в вершине y, выбор игрока j может оказаться нетривиальным и отличным от соответствующего выбора, входящего в равновесную стратегию $\bar{u}^z_j\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$.

Таким образом, решить коалиционную стохастическую подыгру $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ означает *построить* ситуацию равновесия $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с учетом наличия коалиционных структур в подыграх, включенных в подыгру $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$, в частности, путем вычисления PMS-вектора выигрышей игроков во всех подыграх, включенных в подыгру $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$.

Поставим следующую задачу: построить решение коалиционной стохастической игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$, построив ситуацию равновесия $\bar{u}^z(\cdot)$ в игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$, используя в качестве оптимального решения коалиционных игр обобщенный PMS-вектор, см. [4].

3. Построение решения в многошаговой стохастической игре

Предложим способ построения решения многошаговой стохастической игры $\tilde{\Gamma}(z)$ своего рода методом обратной индукции, т.е. двигаясь от окончательной позиции к начальной аналогично схеме построения абсолютного равновесия по Нэшу в позиционной игре с полной информацией [2, 3]. В качестве оптимального решения коалиционных игр будем использовать обобщенный PMS-вектор ([4, 6]).

Напомним алгоритм построения обобщенного PMS-вектора в коалиционной игре. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$ значения выигрыша $H^z_{S_i}(x^z)$ по формуле (2.2):

$$H^z_{S_i}(x^z) = \sum_{j \in S_i} K_j(x^z) .$$

Предполагая рациональность в поведении игроков, в игре $G(z, \Sigma_z)$ найдем ситуацию NE $\bar{x}^z = \left(\bar{x}^z_{S_1}, \ldots, \bar{x}^z_{S_l}\right)$ или $\bar{\mu}^z = \left(\bar{\mu}^z_{S_1}, \ldots, \bar{\mu}^z_{S_l}\right)$. Ситуаций NE в игре может быть много [5], тогда решение коалиционной игры определяется неоднозначно.

Отметим, что в случае $l = 1$ задача поиска ситуации равновесия является задачей максимизации суммарного выигрыша игроков из коалиции S_1, в случае $l = 2$ – задачей поиска ситуации равновесия в биматричной игре, во всех остальных случаях – задачей поиска ситуации равновесия в бескоалиционной игре.

Выигрыш каждой коалиции в ситуации равновесия $H^z_{S_i}(\bar{\mu}^z)$ разделим в соответствии с вектором Шепли [7] $Sh(S_i) = (Sh(S_i : 1), \ldots, Sh(S_i : s))$:

$$Sh(S_i : j) = \sum_{\substack{S' \subset S_i \\ S' \ni j}} \frac{(s'-1)!\,(s-s')!}{s!} \left[v(S') - v(S' \setminus \{j\})\right] \quad \forall\, j = \overline{1, s},$$

где $s = |S_i|$ $(s' = |S'|)$ – количество элементов множеств S_i (S'), а $v(S')$ – максимальный гарантированный выигрыш коалиции $S' \subset S_i$ ([2], с. 51). При этом

$$v(S_i) = \sum_{j=1}^{s} Sh(S_i : j).$$

Тогда PMS-вектор в ситуации NE в смешанных стратегиях в игре $G(z, \Sigma_z)$ определяется как

$$\mathrm{PMS}(\bar{\mu}^z) = (\mathrm{PMS}_1(\bar{\mu}^z), \ldots, \mathrm{PMS}_n(\bar{\mu}^z)),$$

где

$$\mathrm{PMS}_j(\bar{\mu}^z) = Sh(S_i : j), j \in S_i, \ i = \overline{1, l}.$$

Более подробно об этом см. [4].

Замечание 3.1. Найти ситуацию NE – отдельная сложная задача, тогда вычисление PMS-вектора, соответственно, технически затруднено. В этом случае в качестве решения коалиционной игры можно предложить использовать любое другое «оптимальное» решение, например, оптимальность по Парето или арбитражную схему Нэша [1].

Перейдем непосредственно к построению решения в игре $\tilde{\Gamma}(z_0)$.

Шаг 1. Вычислим для всех коалиций $S_i \in \Sigma_z$, $i = \overline{1, l}$, каждой коалиционной игры $G(z, \Sigma_z)$, $L(z) = \emptyset$, PMS-вектор в ситуации NE в смешанных стратегиях:

$$\mathrm{PMS}(z) = (\mathrm{PMS}_1(z), \ldots, \mathrm{PMS}_n(z)),$$

где $\mathrm{PMS}(z) := \mathrm{PMS}(\bar{\mu}^z)$ и $\mathrm{PMS}_j(z) := \mathrm{PMS}_j(\bar{\mu}^z)$ – PMS-вектор и PMS-компоненты соответственно в одношаговой коалиционной игре $G(z, \Sigma_z)$, $L(z) = \emptyset$.

Шаг 2. Пусть игроки действуют не только на последнем шаге игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ оптимально, а на протяжении всей игры. Тогда рассмотрим с конца игры $\tilde{\Gamma}(z_0)$ все двухшаговые подыгры $\tilde{\Gamma}(z)$, $y \in L(z)$, $L(y) = \emptyset$, с выигрышами коалиций

$$H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right)=\sum_{j\in S_i}\left\{K_j\left(x^z\right)+\sum_{y\in L(z)}\left[p\left(z,\,y\,;\,x^z\right)\,\mathrm{PMS}_j\left(y\right)\right]\right\} \qquad (3.1)$$

$\forall\ S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$. Найдем ситуацию NE $\bar{x}^z$ или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами, определенными формулой (3.1). Заметим, что полученная здесь ситуация $\bar{x}^z$ в общем случае не является NE в одновременной игре $G\left(z\,,\ \Sigma_z\right)$. Вычислим для всех коалиций $S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$, PMS-вектор в ситуации NE $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$:

$$\overline{\mathrm{PMS}}\left(z\right)=\left(\overline{\mathrm{PMS}}_1\left(z\right),\ldots,\overline{\mathrm{PMS}}_n\left(z\right)\right)\ ,$$

где $\overline{\mathrm{PMS}}\left(z\right):=\overline{\mathrm{PMS}}\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)$ и $\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z\right):=\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)$ – PMS-вектор и PMS-компоненты соответственно.

Шаг k. Рассмотрим теперь с конца все k-шаговые подыгры $\tilde{\Gamma}(z)$, $y\in[L(z)]^{k-1}$, $L(y)=\emptyset$. Пусть уже построено NE $\bar{u}^{z'}(\cdot)$ и найден PMS-вектор $\overline{\mathrm{PMS}}(z')$ во всех $(k-1)$-шаговых подыграх $\tilde{\Gamma}(z')$, $z'\in L(z)$. Вычислим выигрыши коалиций

$$H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right)=\sum_{j\in S_i}\left\{K_j\left(x^z\right)+\sum_{z'\in L(z)}\left[p\left(z,\,z'\,;\,x^z\right)\,\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z'\right)\right]\right\} \qquad (3.2)$$

$\forall\ S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$. Найдем ситуацию NE $\bar{x}^z$ или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами, определенными формулой (3.2).

Введем *оператор* PMS$\oplus$, который каждому коалиционному разбиению Σ_z и набору выигрышей $H^z_{S_i}\left(u^z\left(\cdot\right)\right)$ коалиций из этого разбиения ставит в соответствие компоненты PMS-вектора соответствующей коалиционной игры $G\left(z,\ \Sigma_z\right)$:

$$\overline{\mathrm{PMS}}_j(z)=\mathrm{PMS}\oplus\sum_{j\in S_i}\left\{K_j\left(x^z\right)+\sum_{z'\in L(z)}\left[p\left(z,\,z'\,;\,x^z\right)\ \overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z'\right)\right]\right\} \qquad (3.3)$$

где $\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z\,\right):=\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(\bar{u}^z\left(\cdot\right)\right)$, $\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(z'\,\right):=\overline{\mathrm{PMS}}_j\left(\bar{u}^{z'}\left(\cdot\right)\right),\ j=\overline{1\,,\,n}$.

Действие оператора PMS$\oplus$ сводится к вычислению NE $\bar{x}^z$ или $\bar{\mu}^z$ и соответственно $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\left(z\right)$ с выигрышами коалиций, определенными формулой (3.2), а затем к вычислению PMS-компонент коалиции $S_i\in\Sigma_z,\ i=\overline{1,\,l}$, в ситуации $\bar{u}^z\left(\cdot\right)$.

Таким образом, для любого $k = \overline{3,\, k_{\tilde{\Gamma}}}$ применение оператора PMS$\oplus$ к правой части формулы (3.2), т.е. формула (4.1), определяет рекуррентное вычисление PMS-вектора на каждом последующем шаге k игры $\tilde{\Gamma}\,(z_0)$ в зависимости от предыдущего $k-1$.

4. Выигрыш игрока на каждом шаге в коалиционной стохастической игре

Пусть найдено решение в многошаговой стохастической коалиционной игре $\tilde{\Gamma}\,(z_0)$. Игроки начинают игру в вершине z_0 в соответствии с этим решением. Вопрос: как определить, какой выигрыш они получат на каждом шаге игры?

Игроки $j = \overline{1,\, n}$ на каждом шаге игры $\tilde{\Gamma}\,(z_0)$ в качестве компонент дележа выигрыша соответствующей коалиции будут получать величину w_j, равную значению разности между выигрышем игрока $j = \overline{1,\, n}$ в подыгре $\tilde{\Gamma}\,(z)$ и математическим ожиданием выигрышей игрока $j = \overline{1,\, n}$ в подыграх $\tilde{\Gamma}\,(y)$ на следующем шаге:

$$w_j\left(\bar{x}^z\right) = \overline{\mathrm{PMS}}_j(z) - \sum_{y \in L(z)} \left[p(z,\, y\,;\, \bar{x}^z)\, \overline{\mathrm{PMS}}_j(y)\right], \tag{4.1}$$

где $\bar{x}^z \in \bar{u}^z(\cdot)$.

5. Примеры

Пример 5.1. Пусть в игре участвуют три игрока, у каждого из которых по две стратегии, а также определены выигрыши каждого игрока во всех ситуациях игры, см. табл. 1.

Таблица 1.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Выигрыши коалиций	
I	II	III	I	II	III	(I, II)	(I, II, III)
1	1	1	4	2	1	6	7
1	1	2	1	2	2	3	5
1	2	1	3	1	5	4	9
1	2	2	5	1	3	6	9
2	1	1	5	3	1	8	9
2	1	2	1	2	2	3	5
2	2	1	0	4	3	4	7
2	2	2	0	4	2	4	6

1. Решим коалиционную игру $G(\Sigma_1)$, $\Sigma_1 = \{S = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}\,,\ N \backslash S = \{\mathrm{III}\}\}$, вычислив PMS-вектор ([4]) следующим образом.

1.1. Найдем NE в смешанных стратегиях в игре:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \eta = 3/7 & 1-\eta & = 4/7 \\
 & & 1 & 2 & \\
0 & (1,\,1) & [6,\,1] & [3,\,2] & \\
0 & (2,\,2) & [4,\,3] & [4,\,2] & \\
\xi = 1/3 & (1,\,2) & [4,\,5] & [6,\,3] & \\
1-\xi = 2/3 & (2,\,1) & [8,\,1] & [3,\,2]\,. &
\end{array}
$$

Очевидно, что первая строка доминируется последней, а вторая - третьей. Используя теорему о вполне смешанном равновесии [3, p. 135], получим

$$\bar{y} = \left(\ 3/7\,,\ \ 4/7\ \right),\ \bar{x} = \left(\ 0\,,\ \ 0\,,\ \ 1/3\,,\ \ 2/3\ \right)\,.$$

Реализация выигрышей коалиций S и $N \backslash S$ в смешанных стратегиях имеет место со следующими вероятностями:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \eta_1 & \eta_2 \\
\xi_1 & 0 & 0 \\
\xi_2 & 0 & 0 \\
\xi_3 & {}^{1}\!/_{7} & {}^{4}\!/_{21} \\
\xi_4 & {}^{2}\!/_{7} & {}^{8}\!/_{21}
\end{array}
$$

Вычислим математическое ожидание выигрышей в NE в смешанных стратегиях:

$$E\left(\bar{x},\,\bar{y}\right)=\frac{1}{7}\,[4,\,5]+\frac{2}{7}\,[8,\,1]+\frac{4}{21}\,[6,\,3]+\frac{8}{21}\,[3,\,2]=\left[\frac{36}{7},\,\frac{7}{3}\right]=\left[5\frac{1}{7},\;2\frac{1}{3}\right].$$

1.2. Найдем гарантированные выигрыши $v\left\{\mathrm{I}\right\}$ и $v\left\{\mathrm{II}\right\}$ игроков I и II, см. табл. 2. Для этого зафиксируем смешанную стратегию игрока III

$$\bar{y}=\left(\;3/7\,,\quad 4/7\;\right)\,.$$

Тогда математическое ожидание выигрышей игроков коалиции S при фиксированной стратегии коалиции $N\backslash S$ имеет вид:

$$\begin{array}{l}
E_{S(1,\,1)}\left(\bar{y}\right)=\left(\frac{3}{7}\cdot 4+\frac{4}{7}\cdot 1\,,\;\frac{3}{7}\cdot 2+\frac{4}{7}\cdot 2\right)\,=\left(2\frac{2}{7},\,2\right)\,;\\
E_{S(1,\,2)}\left(\bar{y}\right)=\left(\frac{3}{7}\cdot 3+\frac{4}{7}\cdot 5\,,\;\frac{3}{7}\cdot 1+\frac{4}{7}\cdot 1\right)\,=\left(4\frac{1}{7},\,1\right)\,;\\
E_{S(2,\,1)}\left(\bar{y}\right)=\left(\frac{3}{7}\cdot 5+\frac{4}{7}\cdot 1\,,\;\frac{3}{7}\cdot 3+\frac{4}{7}\cdot 2\right)\,=\left(2\frac{5}{7},\,2\frac{3}{7}\right)\,;\\
E_{S(2,2)}\left(\bar{y}\right)=\left(\frac{3}{7}\cdot 0+\frac{4}{7}\cdot 0\,,\;\frac{3}{7}\cdot 4+\frac{4}{7}\cdot 4\right)\,=\left(0,\,4\right)\,.
\end{array}$$

Следовательно, гарантированные выигрыши вычисляются следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}
\min H_1\left(x_1=1,\,x_2,\,\bar{y}\right)=\min\left\{2\frac{2}{7};\,4\frac{1}{7}\right\}=2\frac{2}{7}\,;\\
\min H_1\left(x_1=2,\,x_2,\,\bar{y}\right)=\min\left\{2\frac{5}{7};\,0\right\}=0;
\end{array}\right|\;v\left\{\mathrm{I}\right\}=\max\left\{2\frac{2}{7};\,0\right\}=2\frac{2}{7};$$

$$\left.\begin{array}{l}
\min H_2\left(x_1,\,x_2=1,\,\bar{y}\right)=\min\left\{2;\,2\frac{3}{7}\right\}=2\,;\\
\min H_2\left(x_1,\,x_2=2,\,\bar{y}\right)=\min\left\{1;\,4\right\}=1;
\end{array}\right|\;v\left\{\mathrm{II}\right\}=\max\left\{2;\,1\right\}=2.$$

Таким образом, гарантированные выигрыши равны: $v\left\{\mathrm{I}\right\}=2\frac{2}{7}$, $v\left\{\mathrm{II}\right\}=2$.

1.3. Разделим выигрыш $E_1\left(\bar{x},\,\bar{y}\right)=5\frac{1}{7}$ по вектору Шепли [7]:

$$Sh_1=v\left\{\mathrm{I}\right\}+\tfrac{1}{2}\left(v\left\{\mathrm{I,II}\right\}-v\left\{\mathrm{II}\right\}-v\left\{\mathrm{I}\right\}\right)=2\tfrac{2}{7}+\tfrac{1}{2}\left(5\tfrac{1}{7}-2\tfrac{2}{7}-2\right)=2\tfrac{5}{7};$$
$$Sh_2=v\left\{\mathrm{II}\right\}+\tfrac{1}{2}\left(v\left\{\mathrm{I,II}\right\}-v\left\{\mathrm{II}\right\}-v\left\{\mathrm{I}\right\}\right)=2\tfrac{3}{7}.$$

Таким образом, PMS-вектор равен:

$$\mathrm{PMS}_1=2\frac{5}{7};\;\;\mathrm{PMS}_2=2\frac{3}{7};\;\;\mathrm{PMS}_3=2\frac{1}{3}\,.$$

2. Решим кооперативную игру $G\left(\Sigma_2\right)$, $\Sigma_2=\left\{N=\left\{\mathrm{I,II,\,III}\right\}\right\}$, см. табл. 3. Найдем максимальный выигрыш H_N коалиции N и разделим его по вектору Шепли [7]:

$$Sh_1=\frac{1}{6}\left[v\left\{\mathrm{I,II}\right\}+v\left\{\mathrm{I,III}\right\}-v\left\{\mathrm{II}\right\}-v\left\{\mathrm{III}\right\}\right]+\frac{1}{3}\left[v\left\{N\right\}-v\left\{\mathrm{II,III}\right\}+v\left\{\mathrm{I}\right\}\right]\,;$$

Таблица 2.

					The strategies of $N \backslash S$, the payoffs of S					
				y	**0,43**			**0,57**		
	Math. Expectation		*x*		1		S	2		S
Strategies of S	2,286	2,000	**0,00**	1, 1	**4**	**2**	6	**1**	**2**	3
	4,143	1,000	**0,33**	1, 2	**3**	**1**	4	**5**	**1**	6
	2,714	2,429	**0,67**	2, 1	**5**	**3**	8	**1**	**2**	3
	0,000	4,000	**0,00**	2, 2	**0**	**4**	4	**0**	**4**	4
	v1	**v2**			**v1**	**v2**		**v1**	**v2**	
	2,286	2,000		min 1	3	2		1	2	
	0,000	1,000		min 2	0	1		0	1	
	2,286	**2**		max	**3**	**2**		**1**	**2**	

$$Sh_2 = \frac{1}{6}\left[v\{\mathrm{II},\mathrm{I}\} + v\{\mathrm{II},\mathrm{III}\} - v\{\mathrm{I}\} - v\{\mathrm{III}\}\right] + \frac{1}{3}\left[v\{N\} - v\{\mathrm{I},\mathrm{III}\} + v\{\mathrm{II}\}\right];$$

$$Sh_3 = \frac{1}{6}\left[v\{\mathrm{III},\mathrm{I}\} + v\{\mathrm{III},\mathrm{II}\} - v\{\mathrm{I}\} - v\{\mathrm{II}\}\right] + \frac{1}{3}\left[v\{N\} - v\{\mathrm{I},\mathrm{II}\} + v\{\mathrm{III}\}\right].$$

Найдем гарантированные выигрыши:

$$v\{\mathrm{I},\mathrm{II}\} = \max\{4,\ 3\} = 4;\ v\{\mathrm{I},\mathrm{III}\} = \max\{3,\ 2\} = 3;$$

$$v\{\mathrm{II},\mathrm{III}\} = \max\{3,\ 4\} = 4;$$

$$v\{\mathrm{I}\} = \max\{1,\ 0\} = 1;\ v\{\mathrm{II}\} = \max\{2,\ 1\} = 2;\ v\{\mathrm{III}\} = \max\{1,\ 2\} = 2.$$

Таблица 3.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Выигрыш коалиции	Вектор Шепли		
I	II	III	I	II	III	H_N(I, II, III)	$\lambda_1 H_N$	$\lambda_2 H_N$	$\lambda_3 H_N$
1	1	1	4	2	1	7			
1	1	2	1	2	2	5			
1	2	1	3	1	5	9	2.5	3.5	3
1	2	2	5	1	3	9	2.5	3.5	3
2	1	1	5	3	1	9	2.5	3.5	3
2	1	2	1	2	2	5			
2	2	1	0	4	3	7			
2	2	2	0	4	2	6			

Тогда

$$Sh_1^{(2,1,1)}=Sh_1^{(1,2,2)}=Sh_1^{(1,2,1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}[9-4]+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=2\frac{1}{2},$$

$$Sh_2^{(2,1,1)}=Sh_2^{(1,2,2)}=Sh_2^{(1,2,1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}[9-3]+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=3\frac{1}{2},$$

$$Sh_3^{(2,1,1)}=Sh_3^{(1,2,2)}=Sh_3^{(1,2,1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}[9-4]+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}=3.$$

3. Решим бескоалиционную игру $G(\Sigma_3)$, $\Sigma_3 = \{S_1 = \{\mathrm{I}\}, S_2 = \{\mathrm{II}\}, S_3 = \{\mathrm{III}\}\}$. В чистых стратегиях NE не существует.

Воспользуемся вычисленными в п. 2 гарантированными выигрышами $v\{\mathrm{I}\} = 1$; $v\{\mathrm{II}\} = 2$; $v\{\mathrm{III}\} = 2$. Найдем оптимальные стратегии, согласно арбитражной схеме Нэша ([1]), см. табл. 4, где «$-$» означает, что стратегии не оптимальны по Парето, а «+» – оптимальны по Парето. Тогда оптимальными будем считать ситуации (1, 1, 2) и (2, 1, 2), которые дают одинаковый выигрыш (1, 2, 2) в обеих ситуациях.

Таким образом, получен следующие результаты:

- Для $\Sigma_1=\{S=\{\mathrm{I,II}\}, N\backslash S=\{\mathrm{III}\}\}$, имеем выигрыш $\left(\left(2\frac{5}{7}, 2\frac{3}{7}\right), 2\frac{1}{3}\right)$.
- Для $\Sigma_2 = \{N = \{\mathrm{I, II, III}\}\}$ – $\left(2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 3\right)$.
- Для $\Sigma_3 = \{S_1 = \{\mathrm{I}\}, S_2 = \{\mathrm{II}\}, S_3 = \{\mathrm{III}\}\}$ – оптимальный выигрыш (1, 2, 2) в ситуациях (1, 1, 2) и (2, 1, 2).

Таблица 4.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Оптимальность по Парето (P) и арбитражная схема Нэша	
I	II	III	I	II	III	Арбитражная схема Нэша	P
1	1	1	4	2	1	$(4-1)(2-2)(1-2)<0$	-
1	1	2	1	2	2	$(1-1)(2-2)(2-2)=0$	+
1	2	1	3	1	5	$(3-1)(1-2)(5-2)<0$	-
1	2	2	5	1	3	$(5-1)(1-2)(3-2)<0$	-
2	1	1	5	3	1	$(5-1)(3-2)(1-2)<0$	-
2	1	2	1	2	2	$(1-1)(2-2)(2-2)=0$	+
2	2	1	0	4	3	$(0-1)(4-2)(3-2)<0$	-
2	2	2	0	4	2	$(0-1)(4-2)(2-2)<0$	-

Пример 5.2. Рассмотрим на примере 5.1 двухшаговую стохастическую игру $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$, см. рис. 1. На графе, изображенном на рис. 1, указаны вероятности перехода из одной одновременной игры G в другую одновременную игру, при этом тройка $(p_1,\,p_2,\,p_3)$ определяется из табл. 5. Оптимальные выигрыши игроков в каждой игре G получены в примере 5.1:

$$\mathrm{PMS}_{G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})}}=\left(2\frac{5}{7},\ 2\frac{3}{7},\ 2\frac{1}{3}\right),\ \mathrm{PMS}_{\text{кооп}}=\left(2\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 3\right),$$

$$\mathrm{PMS}_{\text{бескоал}}=(1,\ 2,\ 2)\,.$$

1. Выпишем вектор выигрышей в игре $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)$, см. формулу (3.2):

$$\begin{gathered}E_{\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)}(2,\,2,\,2)=K\,(2,\,2,\,2)+\\ +p_1\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}||\,G_{\text{бескоал}},\ (2,\,2,\,2)\right)\,\mathrm{PMS}_{\text{бескоал}}+\\ +p_2\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}||\,G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})},\ (2,\,2,\,2)\right)\mathrm{PMS}_{G_{(\mathrm{I},\,\mathrm{II})\cup(\mathrm{III})}}+\\ +p_3\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}||\,G_{\text{кооп}},\ (2,\,2,\,2)\right)\,\mathrm{PMS}_{\text{кооп}}\,.\end{gathered}$$

Из табл. 5 следует, что $K\,(2,\,2,\,2)=(0,\ 4,\ 2)$. Тогда

$$\begin{gathered}E_{\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II},\,\mathrm{III})}\right)}(2,\,2,\,2)=(0,\ 4,\ 2)+0.25\cdot(1,\ 2,\ 2)+0.5\cdot\left(2\tfrac{5}{7},\ 2\tfrac{3}{7},\ 2\tfrac{1}{3}\right)+\\ +0.25\cdot(2.5,\ 3.5,\ 3)\approx(2.23,\ 6.59,\ 4.42)\ .\end{gathered}$$

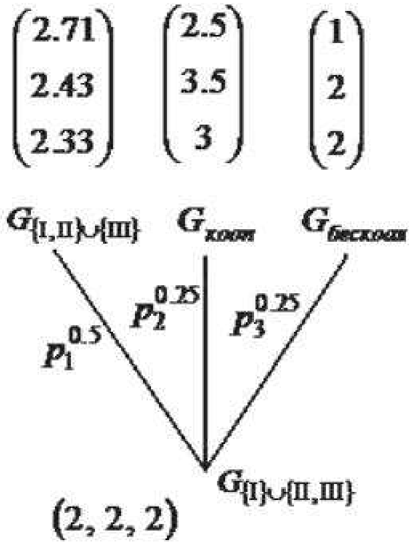

Рисунок 1. Исходная игра

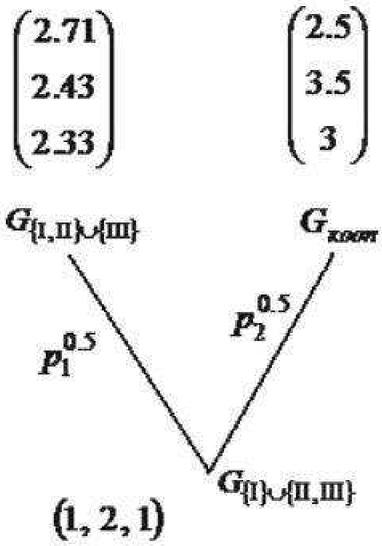

Рисунок 2. Решенная игра

Таблица 5.

Стратегии игроков			Выигрыши игроков			Переходные вероятности в игры $G_{(\mathrm{I,\,II})\cup(\mathrm{III})}$, $G_{\text{кооп}}$, $G_{\text{бескоал}}$			Выигрыши игроков и коалиций в игре $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II,\,III})}\right)$			
I	II	III	I	II	III	p_1	p_2	p_3	E_1	E_2	E_3	$H(\mathrm{II},\mathrm{III})$
1	1	1	4	2	1	0	0.5	0.5	5.75	4.75	3.50	8.25
1	1	2	1	2	2	0.5	0	0.5	2.86	4.21	4.17	8.38
1	2	1	3	1	5	0.5	0.5	0	5.61	3.96	7.67	11.63
1	2	2	5	1	3	0.33	0.33	0.33	7.05	3.62	5.42	9.04
2	1	1	5	3	1	0	0.33	0.67	6.50	5.50	3.33	8.83
2	1	2	1	2	2	0.33	0	0.67	2.57	4.14	4.11	8.25
2	2	1	0	4	3	0.67	0	0.33	2.15	6.29	5.22	11.51
2	2	2	0	4	2	0.5	0.25	0.25	2.23	6.59	4.42	11.01

Аналогично вычислим по формулам (3.1)-(3.2) вектор выигрышей в игре $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II,\,III})}\right)$ во всех остальных ситуациях, см. табл. 5.

2. Решим коалиционную игру $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I})\cup(\mathrm{II,\,III})}\right)$ с выигрышами H (II, III) и E_1, табл. 5.

2.1. Найдем NE в смешанных стратегиях в биматричной игре:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} \eta = 1 & 1-\eta = 0 \\ +1 & -2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \xi = 0 \\ 1-\xi = 1 \end{array} & \begin{array}{c} -(1\,,\,1) \\ -(2\,,\,2) \\ -(1\,,\,2) \\ +(2\,,\,1) \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (8.25\,,\ 5.75) & (8.83\,,\ 6.5) \\ (9.04\,,\ 7.05) & (11.01\,,\ 2.23) \\ (8.38\,,\ 2.86) & (8.25\,,\ 2.57) \\ (\mathbf{11.63}\,,\ \mathbf{5.61}) & (11.51\,,\ 2.15) \end{array}\right) \end{array}$$

Первая, вторая и третья строки доминируются четвертой. Второй столбец доминируется первым. Здесь имеет место ситуация равновесия в чистых стратегиях: $\mu^1 = \left(\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1\ \right)$; $\mu^2 = \left(\ 1,\ \ 0\ \right)$.

2.2. Гарантированные выигрыши соответственно равны $v\,\{\mathrm{II}\} = 4.21$, $v\,\{\mathrm{III}\} = 4.17$.

2.3. Разделим средний выигрыш коалиции $\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ в ситуации NE $E\left(\mu^1, \mu^2\right) = 11.63$ между ее игроками в соответствии с вектором Шепли:

$$Sh_2 = v\{\mathrm{II}\} + \frac{1}{2}\left[v\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\} - v\{\mathrm{II}\} - v\{\mathrm{III}\}\right] = 5.84,$$

$$Sh_3 = v\{\mathrm{III}\} + \frac{1}{2}\left[v\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\} - v\{\mathrm{II}\} - v\{\mathrm{III}\}\right] = 5.8.$$

PMS-вектор игроков II и III коалиции $\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}$ принимает следующие значения:

$$\mathrm{PMS}_1 = 5.61;\;\; \mathrm{PMS}_2 = 5.84;\;\; \mathrm{PMS}_3 = 5.8\,.$$

3. Поскольку игра $\tilde{\Gamma}\left(G_{(\mathrm{I}) \cup (\mathrm{II}, \mathrm{III})}\right)$ – двухшаговая, то, применяя формулу (4.1), на первом шаге игроки получат следующий выигрыш:

$$w = \left(\; 3.86, \;\; 3.09, \;\; 3.3 \;\right).$$

Кроме того, в оптимизированном варианте рассмотренная двухшаговая стохастическая игра имеет вид, отличный от графа, представленного на рис. 1. Изобразим решенную игру на рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьева К.В. *Арбитражная схема Нэша в решении биматричных коалиционных игр* // Межвузовский тематический сборник трудов СПбГАСУ. 2009. № 15. С. 56–61.

2. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте.* Санкт-Петербург: Высшая Школа Менеджмента. 2009.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е. *Теория игр*, Москва: Высшая Школа. 1998.

4. Grigorieva X., Mamkina S. *Solutions of Bimatrix Coalitional Games* // Contributions to game and management. Collected papers printed

on the Second International Conference «Game Theory and Management» [GTM'2008], Edited by Leon A. Petrosjan, Nikolay A. Zenkevich.
Graduate School of Management, SpbSU. 2009. P. 147–153.

5. Nash J. *Non-cooperative Games* // Ann. Mathematics. 1951. V. 54. P. 286–295.

6. Petrosjan L., Mamkina S. *Dynamic Games with Coalitional Structures* // Intersectional Game Theory Review. 2006. V. 8(2). P. 295–307.

7. Shapley L.S. *A Value for n-Person Games* // In: Contributions to the Theory of Games(Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, eds.). Princeton University Press. 1953. P. 307–317.

SOLUTIONS FOR A CLASS STOCHASTIC COALITIONAL GAMES

Kseniya V. Grigorieva, Saint-Petersburh State University, Saint-Petersburg, Cand.Sc. (kseniya196247@mail.ru).

Abstract: In the paper one of classes of multistage stochastic games with various coalition structures is considered. Game researched here is set on the tree graph where in each vertex z coalition structures of players, function of a payoff of coalitions and probability of transition in following vertexes depending on a situation realised in game, set in vertex z is defined. A new mathematical method of the decision of stochastic coalition games on the basis of calculation of the generalised PMS-vector as decisions of coalition games is offered. The offered method is illustrated by example of three-step stochastic game of three persons with variable coalition structure.

Keywords: optimization, multistage games, stochastic games, Nash equilibrium, PMS-vector.