Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 67-92

УДК 517.977.8+519.834
ББК 22.18

УСТОЙЧИВЫЙ ВЕКТОР ШЕПЛИ В КООПЕРАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ЭКОЛОГИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА*

Николай Анатольевич Зенкевич
Надежда Владимировна Козловская
Высшая школа менеджмента
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Волховский пер. д. 3
e-mail: zenkevich@gsom.pu.ru, kknn@yandex.ru.

В статье исследована теоретико-игровая модель территориального экологического производства. Процесс управления выбросами моделируется неантагонистической дифференциальной игрой. Предложен устойчивый механизм перераспределения прибыли в случае кооперации предприятий с целью уменьшения общего загрязнения окружающей среды. Найдено абсолютное равновесие по Нэшу. В качестве кооперативного решения игры построен и исследован устойчивый вектор Шепли, который обладает свойствами динамической устойчивости, стратегической устойчивости и устойчивости против иррационального поведения. Приведен численный пример.

Ключевые слова: дифференциальная игра, кооперативная игра, динамическое программирование, уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, вектор Шепли, равновесие по Нэшу, абсолютное равновесие,

---

* Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ, СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-1-00301-а).

устойчивость кооперативного решения, динамическая устойчивость, стратегическая устойчивость, устойчивость против иррационального поведения.

1. Введение

В статье исследована теоретико-игровая модель территориального экологического производства, которая основана на работе Л.А. Петросяна и Г. Заккура [8]. В статье [8] моделировалось международное экологическое соглашение, результатом которого явилось динамически устойчивое (состоятельное во времени) распределение совокупных затрат при условии снижения общего уровня загрязнения. Затраты складывались из двух составляющих: выраженный в денежном эквиваленте экономический ущерб, включающий материальный ущерб, ущерб здоровью граждан и окружающей среде, и затраты на снижение выбросов с максимального уровня до некоторого допустимого. Такая постановка оправдана и логична, когда речь идет о межгосударственных соглашениях, направленных на заботу о благосостоянии и экологической безопасности граждан.

В том случае, если экологические проблемы рассматриваются на региональном уровне, а участниками конфликтно-управляемого процесса являются непосредственные виновники загрязнения - промышленные предприятия, проведение природоохранных мероприятий и плата за нанесенный ущерб окружающей среде остаются важнейшими задачами наряду с получением прибыли от хозяйственной деятельности.

В настоящее время мы наблюдаем недостаточную эффективность рыночного механизма применительно к ресурсам общего пользования, таким как вода и воздух. В данной работе мы рассматриваем процесс регулирования выбросов в атмосферу, в результате которого издержки внешнего эффекта переносятся на его виновника. Такой процесс называется интернализацией [4]. Несмотря на то, что экологическое регулирование является сложной системой инструментов управления, которая включает различные рычаги, стимулы, стандарты и нормативы, большинство известных механизмов неэффективно в силу специфичности самого объекта исследования.

В статье исследована проблема кооперативного социально- ответственного соглашения, когда предприятия добровольно принимают решения о дополнительном регулировании, в результате которого они существенно снижают объемы выбросов по сравнению с законодательно допустимым уровнем. Добровольный подход к экологическому регулированию успешно применяется в ряде экономически развитых стран [3]. Добровольное регулирование, как правило, приводит как к кооперации участников соглашения между собой, так и к сотрудничеству с государством. Ранее подобные модели экологического регулирования исследовались в работах [6, 11].

В работе [9] также исследовано расширение модели [8] на случай асимметрии игроков, что привело к существенным техническим усложнениям. В данной статье рассматривается задача, когда основная цель предприятий заключается не в минимизации затрат, а в максимизации прибыли. Для этого вводятся функция прибыли и функция цены, где последняя является обратной функции спроса. Предполагается, что региональные предприятия конкурируют по Курно. В модели найдено равновесие по Нэшу [7], которое является абсолютным, т.е. оно остается равновесием по Нэшу в любой подыгре, начинающейся с любого промежуточного момента времени из любого начального состояния. Для нахождения регионального кооперативного соглашения специальным образом построена характеристическая функция игры и доказана её супераддитивность. Цель данного исследования – построение устойчивого механизма перераспределения прибыли при долгосрочной кооперации. В качестве кооперативного решения дифференциальной игры выбран динамический вектор Шепли [10], который оказывается устойчивым.

Используемая концепция устойчивости кооперативного решения восходит к работе [2], где выделены три свойства устойчивой кооперации: динамическая устойчивость (состоятельность во времени), стратегическая устойчивость и устойчивость против иррационального поведения. Первое свойство - это динамическая устойчивость кооперативного решения. Впервые понятие динамической устойчивости было введено Л.А. Петросяном в работе [1]. При этом решение является динамически устойчивым, если оно обладает таким свойством, что в каждый момент времени при движении вдоль оптимальной траектории игроки придерживаются заранее выбранного принципа оптимальности. Кооперативное решение является стратегически устойчивым в том случае, если индивидуальные отклонения игроков оказываются не выгодны, т. е. существует равновесие по Нэшу которое осуществляет поддержку данного кооперативного решения. Устойчивость от иррационального поведения должна рассматриваться, поскольку нет уверенности в том, что все участники кооперации будут вести себя рационально на всем продолжительном промежутке реализации кооперативного соглашения. Участники должны быть уверены, что даже в случае реализации наихудшего сценария (например, аннулирования кооперативного соглашения) их выигрыш будет не меньше, чем при изначальном некооперативном поведении.

2. Решение задачи в случае конкуренции предприятий

2.1. Математическая модель задачи

Предположим, что на региональном рынке n предприятий (игроков) производят однородный товар. Обозначим множество игроков через $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Обозначим также $q_i = q_i(t)$ – объем выпуска предприятия i в момент времени t. Будем предполагать, что цена товара $p = p(t)$ в каждый момент времени t имеет вид:

$$p(t) = a - bQ(t), \tag{2.1}$$

где $a > 0,\ b > 0$ – параметры, $Q(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(t)$ – общий объем выпуска продукции. Здесь функция цены $p(t)$ является функцией обратной функции спроса:

$$Q = Q(t) = \frac{a - p(t)}{b}.$$

Производственные издержки предприятий предполагаются линейными:

$$C_i(q_i(t)) = cq_i(t), \quad c > 0,\ i \in I.$$

Будем предполагать, что игра начинается в момент времени t_0 из начального состояния s_0, где s_0 – это объем загрязнения в момент t_0, и имеет неограниченную продолжительность. Обозначим через $e_i(t)$ – выбросы предприятия i в момент времени t. Предполагается, что выбросы линейно зависят от объема производства предприятия i:

$$e_i(q_i(t)) = \alpha q_i(t), \quad \alpha > 0. \tag{2.2}$$

Под параметром $\bar{e}_i$ будем понимать норматив допустимого воздействия на окружающую среду, а именно показатель ПДВ (предельно допустимый выброс), определяющий максимально разрешенный уровень выбросов для предприятия i [1]:

$$0 \leq e_i(q_i(t)) \leq \bar{e}_i. \tag{2.3}$$

Из формулы (2.3) следует, что максимальный допустимый объем производства фирмы i равен:

$$q_i^{max} = \frac{\bar{e}_i}{\alpha},$$

тогда максимально допустимый общий объем выпуска равен:

$$Q^{max} = \frac{\bar{e}}{\alpha},$$

где $\bar{e} = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{e}_i$. Будем полагать, что параметры модели таковы, что верно неравенство:

$$a - c - \frac{b}{\alpha}\bar{e} \geq 0,$$

которое гарантирует неотрицательность цены (2.1).

Обозначим через $s = s(t)$ – общее загрязнение к моменту t. Предполагается, что динамика накопления загрязнения определяется дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) =& \alpha \sum_{k=1}^{n} q_i(t) - \delta s(t), \\ s(t_0) =& s_0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где δ – коэффициент, определяющий долю природно поглощенного загрязнения, $\alpha > 0$ – параметр. Предполагается также, что кроме производственных издержек, каждое предприятие несет ещё два типа издержек, не связанных с основной деятельностью: издержки на

[1] В соответствии с российским природоохранным законодательством, предельно допустимые выбросы разрабатываются самостоятельно каждым предприятием, а потом утверждаются региональным экологическим комитетом, поэтому их значения различны для каждого предприятия (Федеральный закон от 10.01.2002 „Об охране окружающей среды ", ст. 23.).

природоохранные мероприятия и издержки на возмещение ущерба от загрязнения. Будем считать, что издержки на природоохранные мероприятия в момент времени t имеют вид:

$$E_i(t) = \frac{\gamma}{2} e_i(t)(2\bar{e}_i - e_i(t)) = \frac{\gamma}{2} \alpha q_i (2\bar{e}_i - \alpha q_i),$$
$$\gamma > 0, \qquad 0 \le e_i(t) \le \bar{e}_i.$$

Понятно, что функция издержек $E_i(t)$ является возрастающей и достигает максимального значения в точке $q_i = \bar{e}_i$. Эта функция также выпукла вверх, что содержательно можно трактовать так: при снижении на единицу объема производства затраты на природоохранные мероприятия увеличиваются.

Будем считать, что издержки на возмещение ущерба от загрязнения линейно зависят от объема загрязнения:

$$D_i(s(t)) = \pi_i s(t), \qquad \pi_i > 0, \qquad i \in I.$$

Под ущербом от загрязнения будем понимать экономический ущерб, т.е. совокупность материального ущерба, ущерба здоровью граждан и ущерба, нанесенного окружающей среде производственной деятельностью, в денежном выражении. Будем предполагать, что каждое предприятие стремится максимизировать свою общую прибыль, дисконтированную на начальный момент t_0:

$$\Pi_i(s_0, t_0; q) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \{pq_i - C_i(q_i) - D_i(s) - E_i(q_i)\} dt, \qquad (2.5)$$

где $q = q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$, $t \ge t_0$ – траектория выпуска продукции, а $0 < \rho < 1$ – процентная ставка.

2.2. Вычисление равновесия по Нэшу

В равновесии по Нэшу каждый игрок стремится максимизировать свою прибыль (2.5):

$$W(\{i\}, s, t) = \max_{q_i} \Pi_i(s, t; q) = \max_{q_i} \int_{t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \{q_i(a - bQ) -$$
$$-cq_i - \pi_i s + \frac{\gamma}{2} \alpha q_i(\alpha q_i - 2\bar{e}_i)\} d\tau, \quad i \in I,$$

где динамика накопления загрязнения s задается (2.4). Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана. Обозначим функцию Беллмана для этой задачи через $W_i = W(\{i\}, s, t)$. Вышеупомянутая система уравнений может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho W_i = \max_{q_i}\{q_i(a - bQ) - cq_i - \pi_i s + \frac{\gamma\alpha^2}{2} q_i^2 - \gamma\alpha\bar{e}_i q_i + \\ + \frac{\partial W_i}{\partial s}(\alpha Q - \delta s)\}, \qquad i \in I.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Дифференцируя правую часть формулы (2.6) по q_i и приравнивая производную нулю, находим:

$$P_i = a - bQ - bq_i - c + \gamma\alpha^2 q_i - \gamma\alpha\bar{e}_i + \alpha\frac{\partial W_i}{\partial s}.$$

Вычислим вторую производную P_i по q_i:

$$\frac{dP_i}{dq_i} = \gamma\alpha^2 - 2b.$$

Таким образом, максимум существует, когда $\gamma\alpha^2 < 2b$. Будем искать функции Беллмана W_i в линейной форме [5]:

$$W_i = A_i s + B_i. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\frac{\partial W_i}{\partial s} = A_i.$$

Решая систему уравнений $P_i = 0,\ \ i \in I$ относительно q_i, находим:

$$\hat{q}_i^N = \frac{1}{b(n+1) - \alpha^2\gamma}\Big(a - c - \frac{b\alpha(A - \gamma\bar{e})}{b - \alpha^2\gamma}\Big) + \frac{\alpha A_i - \gamma\alpha\bar{e}_i}{b - \alpha^2\gamma},\ i \in I,$$

где $A = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j,\ \bar{e} = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{e}_j$.

Тогда стратегии игроков в равновесии по Нэшу равны:

$$q_i^N = \begin{cases} 0, & \hat{q}_i^N < 0, \\ \hat{q}_i^N, & 0 \le \hat{q}_i^N \le \dfrac{\bar{e}_i}{\alpha}, \\ \dfrac{\bar{e}_i}{\alpha}, & \dfrac{\bar{e}_i}{\alpha} \le \hat{q}_i^N. \end{cases} \tag{2.8}$$

В данном исследовании ограничимся случаем, когда $0 \le q_i^N \le \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$. Будем предполагать, что параметры модели таковы, что $\hat{q}_i^N \in [0, \frac{\bar{e}_i}{\alpha}]$. Подставляя (2.7) в систему (2.6), находим:

$$A_i = -\frac{\pi_i}{\rho+\delta},$$
$$B_i = \frac{1}{\rho}\big((a-c)q_i^N - bq_i^N Q^N + \alpha A_i Q^N + \frac{\gamma\alpha^2}{2}(q_i^N)^2 - \gamma\alpha\bar{e}_i q_i^N\big),$$

где q_i^N определяются формулой (2.8), а $Q^N = \sum_{j=1}^{n} q_j^N$. Найдем теперь равновесную по Нэшу траекторию. Подставляя найденные стратегии игроков (2.8) в уравнение динамики (2.4) и решая его получаем:

$$s^N(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}Q^N)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}Q^N,$$

где

$$Q^N = \frac{n(a-c) + \alpha A - \gamma\alpha\bar{e}}{b(n+1) - \alpha^2\gamma}. \tag{2.9}$$

В силу того, что равновесие по Нэшу является решением системы уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана, оно является абсолютным равновесием, т.е остается таковым в любой подыгре с любыми начальными условиями.

3. Характеристическая функция кооперативной игры

Для построения кооперативного решения в задаче экологического производства определим характеристическую функцию $V(K, s, t)$ этой игры. Идея построения характеристической функции следующая (см. [8]). Когда значение характеристической функции вычисляется для коалиции K, то действия игроков из K представляют собой наилучший ответ на фиксированное равновесие по Нэшу. Данный подход к вычислению характеристической функции имеет свои недостатки и достоинства. Достоинство заключается в том, что такой подход позволяет существенно сократить число вычислительных операций по сравнению со стандартным подходом, когда $V(K, s, t)$ представляет собой максимальный гарантированный выигрыш коалиции K, если даже остальные игроки объединяются в дополнительную коалицию $I \backslash K$. Недостатком подхода является тот факт, что характеристическая функция, вычисленная таким образом, в общем случае не является супераддитивной.

3.1. Значение характеристической функции для произвольной коалиции

Значение характеристической функции для произвольной коалиции K будем вычислять, решая уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. Функция Беллмана $W(K,s,t)$ является решением следующей задачи максимизации:

$$\begin{aligned} W(K,s,t) &= \max_{q_j\in K}\sum_{j\in K}\Pi_j(s,t;q) = \\ &= \max_{q_j\in K}\sum_{j\in K}\int\limits_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)}\{q_i(a-bQ)-cq_i-\pi_i s+ \\ &\quad +\frac{\gamma}{2}\alpha q_i(\alpha q_i-2\bar{e}_i)\}d\tau, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где динамика задается формулой (2.4). Обозначим через $W_K = W(K,s,t)$ функцию Беллмана задачи (3.1). Решение задачи (3.1) эквивалентно решению следующего уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned} \rho W_K = \max_{q_j\in K}\{&\sum_{j\in K} q_j(a-bQ) - c\sum_{j\in K} q_j - \sum_{j\in K}\pi_j s+ \\ &+\frac{\gamma\alpha^2}{2}\sum_{j\in K} q_j^2 - \gamma\alpha\sum_{j\in K}\bar{e}_j q_j + \frac{\partial W_K}{\partial s}(\alpha Q-\delta s)\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для нахождения наилучших ответов игроков q_i^K, $i\in K$ найдем производную правой части уравнения (3.2) по q_i:

$$\frac{dP^K}{dq_i} = a - bQ - b\sum_{j\in K} q_j - c + \gamma\alpha^2 q_i - \gamma\alpha\bar{e}_i + \alpha\frac{\partial W_K}{\partial s}.$$

Вспомним, что игроки, не входящие в коалицию K, действуют согласно фиксированным равновесным по Нэшу стратегиям, т. е. $q_i^K = q_i^N$, $i\in I\backslash K$. Тогда q_i^K, $i\in K$ могут быть найдены из системы:

$$a-c-b\sum_{j\in I\backslash K} q_j^N - 2b\sum_{j\in K} q_j^K + \gamma\alpha^2 q_i - \gamma\alpha\bar{e}_i + \alpha\frac{\partial W_K}{\partial s} = 0, \ \ i\in K. \tag{3.3}$$

Суммируя (3.3) по $i \in K$, находим:

$$\sum_{i\in K} q_i^K = \frac{1}{2bk-\alpha^2\gamma}(k(a-c) - \gamma\alpha\bar{e}^K + \alpha k\frac{\partial W_K}{\partial s} - bk\sum_{j\in I\setminus K} q_j^N), \quad (3.4)$$

где $\bar{e}^K = \sum\limits_{j\in K}\bar{e}_j$, $k = |K|$ – количество элементов в множестве K. Подставляя (3.4) в (3.3), находим q_i^K:

$$q_i^K = -\frac{1}{\alpha^2\gamma}(a - c - b\sum_{j\in I\setminus K} q_j^N - 2b\sum_{j\in K} q_j^K - \gamma\alpha\bar{e}_i + \alpha\frac{\partial W_K}{\partial s}), \quad (3.5)$$

где q_j^N определяются формулой (2.8).

Функцию Беллмана будем искать в линейной форме:

$$W_K = A_K s + B_K. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) и (3.5) в уравнение (3.2), находим коэффициенты:

$$\begin{gathered} A_K = \frac{\partial W_K}{\partial s} = -\frac{\sum\limits_{j\in K}\pi_j}{\rho+\delta}, \\ B_K = \frac{1}{\rho}((a-c)\sum_{j\in K} q_j^K - b\sum_{j\in K} q_j^K(\sum_{j\in K} q_j^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N) + \\ +\alpha A_K(\sum_{j\in K} q_j^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N) + \frac{\gamma\alpha^2}{2}\sum_{j\in K}(q_j^K)^2 - \gamma\alpha\sum_{j\in K}\bar{e}_j q_j^K). \end{gathered} \quad (3.7)$$

Из (3.4), (2.8) и (3.5) получаем:

$$\begin{gathered} q_i^K = \frac{\bar{e}_i}{\alpha} + \frac{1}{2bk-\alpha^2\gamma}\Big(\frac{(a-c)(b(k+1)-\alpha^2\gamma)}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} - \\ -\frac{\alpha b(A-\gamma\bar{e})(b(k+1)-\alpha^2\gamma)}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)} + \frac{2b-\alpha^2\gamma}{b-\alpha^2\gamma}(\alpha A_K - \frac{b}{\alpha}\bar{e}^K)\Big). \end{gathered} \quad (3.8)$$

Если сформировалась коалиция K, то её траектория $s^K(t)$ имеет вид:

$$s^K(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}(q^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N))e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}(q^K + \sum_{j\in I\setminus K} q_j^N), \quad (3.9)$$

где

$$q^K = \sum_{j\in K} q_j^K = \frac{1}{2bk-\alpha^2\gamma}(k(a-c) - \gamma\alpha\bar{e}^K + \alpha k A_K - bk\sum_{j\in I\setminus K} q_j^N).$$

3.2. Значение характеристической функции для максимальной коалиции

Рассмотрим теперь случай полной кооперации, т.е. случай, когда игроки объединяются в максимальную коалицию. Оптимальные (кооперативные) стратегии игроков q_i^I могут быть получены подстановкой соответствующих параметров в формулу (3.8):

$$q_i^I = \frac{\bar{e}_i}{\alpha} + \frac{1}{2bn - \alpha^2\gamma}(a - c + \alpha A - \frac{2b}{\alpha}\bar{e}).$$

Можно показать, что $0 \le q_i^I \le \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$, если $0 \le q_i^N \le \frac{\bar{e}_i}{\alpha}$.

Оптимальная (кооперативная) траектория $s^I(t)$ имеет вид:

$$s^I(t) = (s_0 - \frac{\alpha}{\delta}Q^I)e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}Q^I, \tag{3.10}$$

где

$$Q^I = \sum_{j\in I} q_j^I = \frac{n(a-c) + \alpha n A - \alpha\gamma\bar{e}}{2bn - \alpha^2\gamma}. \tag{3.11}$$

Функция Беллмана для максимальной коалиции имеет вид:

$$W_I(s,t) = W = As + B, \tag{3.12}$$

где

$$A = -\frac{\sum\limits_{j\in I}\pi_j}{\rho+\delta},$$

$$B = \frac{1}{\rho}((a-c)Q^I - b(q^I)^2 + \alpha A Q^I + \frac{\gamma\alpha^2}{2}\sum_{j\in I}(q_j^I)^2 - \gamma\alpha\sum_{j\in I}\bar{e}_j q_j^I).$$

Лемма 3.1. *Если $Q^I, Q^N \ge 0$, то загрязнение в случае полной кооперации не больше, чем загрязнение в равновесии по Нэшу, т.е.*

$$s^I(t) \le s^N(t).$$

Доказательство. Из формул (2.9) и (3.11) очевидно, что $Q^N > Q^I$. Рассматривая разность, имеем:

$$s^N(t) - s^I(t) = \frac{\alpha}{\delta}(Q^N - Q^I)(1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \ge 0.$$

□

Подытоживая результаты раздела 3, получаем явный вид характеристической функции кооперативной игры:

$$V(L,s,t)=\begin{cases}0, \quad L=\emptyset\\ W(\{i\},s,t), \quad L=\{i\}\\ W(I,s,t), \quad L=I\\ W(K,s,t), \quad L=K\end{cases}, \tag{3.13}$$

где $W(\{i\},s,t)$, $W(K,s,t)$, $W(I,s,t)$ задаются формулами (2.7), (3.6), (3.12).

4. Супераддитивность характеристической функции

Как уже отмечалось ранее, характеристическая функция (3.13) в общем случае не является супераддитивной. Поэтому проверка свойства супераддитивности является самостоятельной задачей. По причине громоздкости формул и выкладок при доказательстве в общем случае, приведем здесь доказательство теоремы о супераддитивности только для симметричного случая. Для доказательства будем предполагать, что:

$$e_i=\hat{e},\ A_i=\hat{A},\ i\in I.$$

Теорема 4.1. *Характеристическая функция (3.13) удовлетворяет свойству супераддитивности, для любых $s=s(t)$ и $t\geq t_0$:*

$$V(K\cup L,s,t)\geq V(K,s,t)+V(L,s,t), \quad K,L\subset I.$$

Доказательство. Для доказательства свойства супераддитивности необходимо показать, что:

$$\begin{gathered}V(K\cup L,s,t)-V(K,s,t)-V(L,s,t)=\\ =A_{K\cup L}s^{K\cup L}-A_Ks^K-A_Ls^L+B_{K\cup L}-B_K-B_L\geq 0.\end{gathered}$$

Доказательство будем проводить в два этапа. Сначала докажем, что

$$A_{K\cup L}s^{K\cup L}-A_Ks^K-A_Ls^L\geq 0. \tag{4.1}$$

Для этого рассмотрим левую часть (4.1):

$$A_{K\cup L}s^{K\cup L}-A_Ks^K-A_Ls^L=A_K(s^{K\cup L}-s^K)+A_L(s^{K\cup L}-s^L).$$

Из формулы (3.9) следует, что

$$s^K = s_0 e^{-\delta(t-t_0)} + \frac{\alpha}{\delta}(q^K + q_{I\setminus K})(1 - e^{-\delta(t-t_0)}),$$

где $q_{I\setminus K} = \sum\limits_{j\in I\setminus K} q_j^N$. Тогда

$$s^{K\cup L} - s^K = \frac{\alpha}{\delta}(1 - e^{-\delta(t-t_0)})(q^{K\cup L} - q^K + q_{I\setminus(K\cup L)} - q_{I\setminus K}) =$$
$$= \frac{\alpha}{\delta}(1 - e^{-\delta(t-t_0)})(\sum_K q_j^{K\cup L} - \sum_K q_j^K + \sum_L q_j^{K\cup L} - \sum_L q_j^N).$$

Пользуясь формулой (3.8), получаем:

$$\sum_K q_j^{K\cup L} - \sum_K q_j^K = -\frac{klb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(\frac{a-c}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$- \frac{\alpha(A-\gamma\bar{e})}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)}) - \frac{\alpha^2\gamma lk}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}$$
$$\frac{2b-\alpha^2\gamma}{b-\alpha^2\gamma}(\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e}) = -\frac{klb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(\frac{a-c}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$- \frac{\alpha(A-\gamma\bar{e})}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)} + \frac{\alpha^2\gamma}{b(b-\alpha^2\gamma)}(\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e})) =$$
$$= -\frac{klb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(\frac{a-c}{b(n+1)-\alpha^2\gamma} -$$
$$- \frac{\alpha(A-\gamma\bar{e})}{(b-\alpha^2\gamma)(b(n+1)-\alpha^2\gamma)} + \frac{\alpha\hat{A} - \frac{b}{\alpha}\hat{e}}{b-\alpha^2\gamma} - \frac{\alpha\hat{A}}{b} + \frac{\hat{e}}{\alpha}) =$$
$$= -\frac{lb(2b-\alpha^2\gamma)}{(2bk-\alpha^2\gamma)(2b(k+l)-\alpha^2\gamma)}(q_K - \frac{\alpha\hat{A}}{b}) < 0.$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_L q_j^{K\cup L} - \sum_L q_j^N < 0, \tag{4.2}$$

а значит и $s^{K\cup L} - s^K < 0$. Отсюда следует, что $A_K(s^{K\cup L} - s^K) > 0$ и, аналогично, $A_L(s^{K\cup L} - s^L) > 0$. Итак неравенство (4.1) доказано.

Далее докажем, что $B_{K\cup L} - B_K - B_L \geq 0$.

Рассмотрим разность, подставляя (3.7):

$\rho(B_{K\cup L} - B_K - B_L) = (a-c)(q^{K\cup L} - q^K - q^L) + \alpha A_{K\cup L}(q^{K\cup L} + q_{I\setminus(K\cup L)}) - \alpha A_K(q^K + q_{I\setminus K}) - \alpha A_L(q^L + q_{I\setminus L}) - bq^{K\cup L}(q^{K\cup L} + q_{I\setminus(K\cup L)}) +$

$bq^K(q^K+q_{I\setminus K})+bq^L(q^L+q_{I\setminus L})+\frac{\gamma\alpha^2}{2}(\sum_{K\cup L} q_j^{K\cup L}(q_j^{K\cup L}-\frac{2\bar{e}_j}{\alpha})-\sum_K q_j^K(q_j^K-\frac{2\bar{e}_j}{\alpha})-\sum_L q_j^L(q_j^L-\frac{2\bar{e}_j}{\alpha}))$.

После некоторых упрощений, можно получить:

$\rho(B_{K\cup L}-B_K-B_L)=\alpha A_L(\frac{1}{2}\sum_K q_j^{K\cup L}+\frac{1}{2}q^K-q_K)+\alpha A_K(\frac{1}{2}\sum_L q_j^{K\cup L}+\frac{1}{2}q^L-q_L)+\frac{b}{2}\sum_K q_j^{K\cup L}(q_L-q^L)+\frac{b}{2}q^L(q_K-\sum_K q_j^{K\cup L})+\frac{b}{2}\sum_L q_j^{K\cup L}(q_K-q^K)+\frac{b}{2}q^K(q_L-\sum_L q_j^{K\cup L})\geq 0,$

что верно вследствие (4.2).

$\square$

5. Устойчивость динамического вектора Шепли

5.1. Кооперативное решение дифференциальной игры

Пусть $s^I(t),\ t\geq t_0$ - это оптимальная (кооперативная) траектория, максимизирующая сумму выигрышей игроков и игроки согласны разделить максимальный суммарный выигрыш $V(I,s_0,t_0)$ в соответствии с некоторым дележом. Предположим, что в качестве дележа был выбран динамический вектор Шепли:

$$Sh(s,t)=(Sh_1(s,t),Sh_2(s,t),\ldots,Sh_n(s,t)),$$

компоненты которого определяются по формуле:

$$Sh_i(s,t)=\sum_{K\ni i}\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}[V(K,s,t)-V(K\setminus\{i\},s,t)].$$

Здесь мы не приводим явный вид вектора Шепли для данной модели ввиду её чрезмерной громоздкости. При этом структура вектора Шепли имеет вид:

$$Sh_i(s,t)=A_is(t)+Bsh_i, \tag{5.1}$$

где коэффициент Bsh_i вычисляется как вектор Шепли в статической игре с характеристической функцией:

$$V(K) = B_K, \quad K \in I.$$

5.2. Динамическая устойчивость вектора Шепли

Под динамически устойчивым кооперативным решением понимается такой дележ, который остается оптимальным в любой подыгре вдоль оптимальной траектории в соответствии с выбранным принципом оптимальности. Приведем строгие определения динамической устойчивости, следуя работе [8]. Для этого рассмотрим подыгры $\Gamma(s^I(t), t)$ исходной игры с начальными условиями $(s^I(t), t)$ на оптимальной траектории и обозначим через $Sh_i(s^I(t), t)$ вектор Шепли, в соответствующей подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$.

Определение 5.1. *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$ называется процедурой распределения дележа (ПРД) в соответствии с вектором Шепли, если*

$$Sh_i(s_0, t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \beta_i(t) dt, \quad i \in I.$$

Определение 5.2. *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$ – динамически-устойчивая ПРД, если при любых начальных $(s^I(t), t)$, при любом $t \in [t_0, \infty)$ выполняется следующее условие:*

$$Sh_i(s_0, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t-t_0)} Sh_i(s^I(t), t), \tag{5.2}$$
$$t \in [t_0, \infty), \ i \in I.$$

Теорема 5.1. *Вектор $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$, где $\beta(t)$ задается формулой*

$$\beta_i(t) = \rho Sh_i(s^I(t), t) - \frac{d}{dt} Sh_i(s^I(t), t)$$

- динамически-устойчивая ПРД.

Доказательство теоремы 5.1 приведено в [8]. Таким образом вектор Шепли (5.1), является динамически-устойчивым, при этом процедура распределения дележа имеет вид:

$$\beta_i(t) = -\pi_i s^I(t) - \alpha Q^I A_i + \rho B s h_i. \tag{5.3}$$

5.3. Свойство стратегической устойчивости

Процедура распределения дележа (5.3) гарантирует динамическую устойчивость вектора Шепли, а поэтому и индивидуальную рациональность решения $Sh(s^I(t), t)$ в каждой подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$ вдоль кооперативной траектории $s^I(t)$. Пусть $V_i(s_0, t_0)$ – это выигрыш игрока i в игре $\Gamma(x_0, t_0)$ в равновесии по Нэшу. Рассмотрим подыгры $\Gamma(s^I(t), t),\ t \in [t_0, \infty]$ вдоль кооперативной траектории $s^I(t)$. Если $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t))$ – динамически устойчивая ПРД, то должны выполняться следующие условия:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)} \beta_i(t) dt = Sh_i(t_0, s_0),$$

$$\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \beta_i(\tau) d\tau \geq V_i(s^I(t), t), \qquad i \in I,$$

где $V_i(s^I(t), t)$ – равновесный выигрыш игрока i в подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$. Но $\int\limits_t^{\infty} e^{-\rho(\tau-t)} \beta_i(\tau) d\tau$ – это выигрыш игрока i при кооперации в игре $\Gamma(s^I(t), t)$, который индивидуально рационален. В статье [2] доказана теорема, из которой следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-равновесие по Нэшу, причем выигрыши игроков в этом равновесии в точности равны $Sh(s_0, t_0) = (Sh_1(s_0, t_0), Sh_2(s_0, t_0), \dots, Sh_n(s_0, t_0))$. Это означает, что вектор Шепли (кооперативное решение) стратегически поддержан некоторым специально построенным ϵ-равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(s_0, t_0)$.

5.4. Условие Янга для устойчивого кооперативного решения

Компоненты построенного кооперативного решения в каждой подыгре $\Gamma(s^I(t), t)$ удовлетворяют условиям индивидуальной и коллективной рациональности. Кроме того, вектор Шепли является динамически и стратегически устойчивым. Тем не менее, это не гарантирует того, что отдельные игроки или группы игроков не будут предпринимать иррациональных действий, следствием которых может стать отказ остальных игроков от продолжения кооперативного соглашения. Такую ситуацию будем называть иррациональным поведением. Поэтому желательное свойство устойчивого соглашения заключается в том, что даже в случае отказа от кооперативного соглашения в любой момент $t \geq t_0$, каждый игрок ожидает получить выигрыш не меньше, чем если бы он действовал индивидуально. Такое свойство устойчивости кооперативного решения будем называть устойчивостью против иррационального поведения. Формально указанное свойство первые было сформулировано Д.В.К. Янгом в работе [12] в виде условия (условие Янга):

$$V_i(x_0, t_0) \leq V_i(x^I(t), t) + \int\limits_{t_0}^{t} \beta_i(\tau) d\tau,\ t \geq t_0,\ i \in I,$$

где $V_i(x, t)$ – это выигрыш игрока i в равновесии по Нэшу в игре, начинающейся в момент t из состояния x, $\beta_i(t)$ – процедура распределения. В нашем случае условие Д.В.К. Янга принимает вид:

$$V_i(s_0, t_0) \leq e^{-\rho(t-t_0)} V_i(s^I(t), t) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau - t_0)} \beta_i(\tau) d\tau,\ t \geq t_0,\ i \in I. \quad (5.4)$$

Тогда процедура распределения дележа $\beta_i(t)$, заданная формулой (5.3), может быть переписана в виде:

$$\beta_i(t) = -\pi_i s^I(t) + F_i,$$

а оптимальная траектория (3.10) примет вид:

$$S^I(t) = (s_0 - G) e^{-\delta(t-t_0)} + G,$$

где $G = \dfrac{\alpha}{\delta} Q^I$. Вычислим сначала интеграл в правой части неравенства (5.4):

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}\beta_i(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}(-\pi_i((s_0-G)e^{-\delta(\tau-t_0)}+G)+F_i)d\tau =$$

$$= \left(e^{-\rho(\tau-t_0)}\left(\frac{\pi_i(s_0-G)}{\rho+\delta}e^{-\delta(\tau-t_0)}+\frac{\pi_i G}{\rho}-\frac{F_i}{\rho}\right)\right)\Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= e^{-\rho(t-t_0)}\left(-A_i(s_0-D_2)e^{-\delta(t-t_0)}+\frac{\pi_i G}{\rho}-\frac{F_i}{\rho}\right)+A_i(s_0-G)-\frac{\pi_i G}{\rho}+\frac{F_i}{\rho}.$$

Тогда левая часть формулы (5.4) примет вид:

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau-t_0)}\beta_i(\tau)d\tau + e^{-\rho(t-t_0)}V_i(s^I(t),t) =$$

$$= e^{-\rho(t-t_0)}\left(-\frac{\delta}{\rho}A_i G + B_i - \frac{F_i}{\rho}\right)+A_i(s_0-G)-\frac{\pi_i}{\rho}G+\frac{F_i}{\rho}.$$

Правая часть формулы (5.4) равна:

$$V_i(s_0,t_0) = A_i s_0 + B_i.$$

Рассмотрим теперь разность левой и правой части. Для доказательства неравенства (5.4) необходимо доказать, что

$$\left(1-e^{-\rho(t-t_0)}\right)\left(\frac{\delta}{\rho}A_i G - B_i + \frac{F_i}{\rho}\right) \geq 0. \tag{5.5}$$

Понятно, что $1-e^{-\rho(t-t_0)} > 0$ при любом $t > t_0$ и $e^{-\rho(t-t_0)}-1 = 0$ при $t = t_0$. Поэтому условие Янга выполнено в начальный момент времени t_0. Обозначим через

$$\theta = \frac{\delta}{\rho}A_i G - B_i + \frac{F_i}{\rho}.$$

Если константа $\theta \geq 0$, то условие (5.5) выполнено при любом $t \geq t_0$, если же $\theta < 0$, то условие верно только в начальный момент времени. Покажем, что существует момент времени $T > t_0$, при котором условие Янга выполнено. Если это верно, то $\theta \geq 0$.

Поскольку $\beta(t)$ – динамически устойчивая ПРД, то условие (5.4) можно переписать, используя формулу (5.2), в виде:

$$Sh_i(s_0,t_0) - V_i(s_0,t_0) + e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t),t) - Sh_i(s^I(t),t)) \geq 0. \tag{5.6}$$

Поскольку $V_i(s^I(t),t)$ и $Sh_i(s^I(t),t)$ – ограниченные функции, а $e^{-\rho(t-t_0)}$ – бесконечно мала при $t \to \infty$, верно что

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t),t) - Sh_i(s^I(t),t)) = 0,$$

а поэтому, переходя к пределу при $t \to \infty$ в неравенстве (5.6), получаем, что

$$Sh_i(s_0,t_0) \geq V_i(s_0,t_0).$$

Это верное равенство, вследствие индивидуальной рациональности. Обозначим через $\varepsilon = Sh_i(s_0,t_0) - V_i(s_0,t_0)$. По определению предела, существует такое $T > 0$, что при любом $t > T$ выполнено неравенство

$$\left|e^{-\rho(t-t_0)}(V_i(s^I(t),t) - Sh_i(s^I(t),t))\right| < \varepsilon.$$

Тем самым мы доказали, что $\theta \geq 0$, и неравенство (5.5) верно при любом $t \geq 0$, что и требовалось доказать.

6. Числовой пример вычисления устойчивого вектора Шепли

Все вычисления производились в программном пакете MAPLE 10.

6.1. Параметры модели

В качестве примера рассмотрим модель экологического производства трех предприятий (игроков). Пусть параметры модели следующие:
$t_0 = 0$ – начальный момент соглашения,
$s_0 = 0$ – начальный объем загрязнения,
$p(t) = 4000 - 10(q_1(t) + q_2(t) + q_3(t))$ – функция цены,
$c = 3$ – удельные производственные издержки,
$\rho = 0.07$ – процентная ставка,
$\alpha = 12$ – удельный объем выбросов,
$\delta = 0.4$ – доля природного поглощения загрязнения,
$\gamma = 0.055$ – коэффициент, характеризующий величину затрат на природоохранные мероприятия,
$\bar{e}_1 = 1180,\ \bar{e}_2 = 1170,\ \bar{e}_3 = 1167$ – предельно допустимые выбросы,
$\pi_1 = 6,\ \pi_2 = 6.4,\ \pi_3 = 6.25$ – коэффициенты, отражающие возможности игроков компенсировать экологический ущерб.

Из формул (2.2) и (2.3) следует, что максимально возможные мгновенные объемы производства игроков следующие:

$$q_1^{max} = 98.33, \;\; q_2^{max} = 97.5, \;\; q_3^{max} = 97.25.$$

6.2. Результаты расчетов устойчивого вектора Шепли

6.2.1 Равновесные объемы производства

Равновесные по Нэшу объёмы производства равны:

$$q_1^N = 95.75, \;\; q_2^N = 94.02, \;\; q_3^N = 96.81,$$

при этом соответствующие объемы выбросов имеют значения:

$$e_1^N = 1149.05, \;\; e_2^N = 1128.22, \;\; e_3^N = 1161.73.$$

Из полученных значений видно, что в равновесии по Нэшу объемы производства игроков очень близки к максимально возможным, а соответствующие выбросы очень близки к ПДВ.

Кооперативные объемы производства равны:

$$q_1^I = 53.39, \;\; q_2^I = 52.55, \;\; q_3^I = 52.3,$$

при этом соответствующие кооперативные объемы выбросов принимают значения:

$$e_1^I = 640.64, \;\; e_2^I = 630.64, \;\; e_3^I = 627.64.$$

Заметим, что кооперативные объемы производства почти в два раза ниже максимума, при этом кооперативная цена существенно выше цены, реализуемой в равновесии по Нэшу:

$$\begin{aligned} p^N(t) &= 1134.16, \\ p^I(t) &= 2417.58. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Вычислим также стратегии игроков в случае формирования коалиций из двух игроков:

$$\begin{aligned} q_1^{1,2} &= 60.79, \quad q_2^{1,2} = 59.96 \\ q_1^{1,3} &= 61.94, \quad q_3^{1,3} = 60.85 \\ q_2^{2,3} &= 60.76, \quad q_3^{2,3} = 60.51. \end{aligned}$$

6.2.2 Характеристическая функция

По формулам (3.7) вычисляем коэффициенты характеристической функции кооперативной игры:

$$A_1 = -12.77, \quad A_2 = -\,13.61, \quad A_3 = -13.3,$$

$$B_1 = 26.147, \quad B_2 = 21923.7 \quad B_3 = 26326.3,$$

$$B_{1,2} = 86280.33, \quad B_{1,3} = 91511.86, \quad B_{2,3} = 87029,71,$$

$$B = B_I = 217350.63.$$

Кооперативная траектория имеет вид:

$$s^I(t) = 4747.27 - 4747.27e^{-0.2t}, \; t \geq 0.$$

Равновесная по Нэшу траектория:

$$s^N(t) = 8597.51 - 8597.51e^{-0.2t}, \; t \geq 0.$$

Приведем графики изменения динамики загрязнения в обоих случаях (рис. 1).

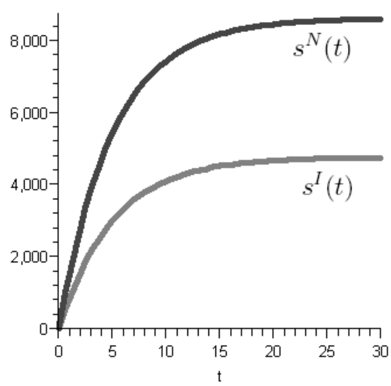

Рисунок 1. Динамика загрязнения

6.2.3 Решения модели: сравнительный анализ

Прибыли игроков в равновесии по Нэшу в момент $t \geq 0$ равны соответственно:

$$V(\{1\}, s^N(t), t) = 263777.4 + 109755.5e^{-0.2t},$$

$$V(\{2\}, s^N(t), t) = 196123.22 + 117072.5e^{-0.2t},$$

$$V(\{3\}, s^N(t), t) = 261761.8 + 114328.66e^{-0.2t}.$$

Общий кооперативный выигрыш в момент $t \geq 0$ составляет:

$$V(I, s^I, t) = 2916301.18 + 188707.8045e^{-0.2t}. \qquad (6.2)$$

В качестве принципа дележа при кооперации был выбран устойчивый динамический вектор Шепли. Кооперативные прибыли игроков в этом случае в момент времени $t \geq 0$ имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned}
Sh_1(s^I(t), t) =& 992916.94 + 60603.51e^{-0.2t},\\
Sh_2(s^I(t), t) =& 926692.83 + 64643.66e^{-0.2t},\\
Sh_3(s^I(t), t) =& 997023.3 + 63128.66e^{-0.2t}.
\end{aligned}$$

На рис. 2 изображены графики функций прибыли всех трех игроков. Видно, что $V(\{1\}, s, t)$ и $V(\{3\}, s, t)$ пересекаются, это происходит в момент времени $t = 4.1$. На рис. 3 показаны графики функций прибыли в кооперативном случае. На рис. 4 приведены графики, сравнивающие равновесную по Нэшу и кооперативную прибыль.

Мгновенные выигрыши игроков до перераспределения общей прибыли равны:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1(t) =& 70080.7 + 28533.83e^{-0.2t},\\
\hat{\beta}_2(t) =& 66812.56 + 30436.09e^{-0.2t},\\
\hat{\beta}_3(t) =& 67115.06 + 29722.74e^{-0.2t}.
\end{aligned}$$

Процедура распределения дележа, соответствующая вектору Шепли, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\beta_1(t) =& 69454 + 28533.83e^{-0.2t},\\
\beta_2(t) =& 64814.97 + 30436.09e^{-0.2t},\\
\beta_3(t) =& 69739.36 + 29722.74e^{-0.2t}.
\end{aligned}$$

На рис. 5 изображены графики функций $\beta_i(t)$ и $\hat{\beta}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые отражают перераспределение кооперативного выигрыша между игроками.

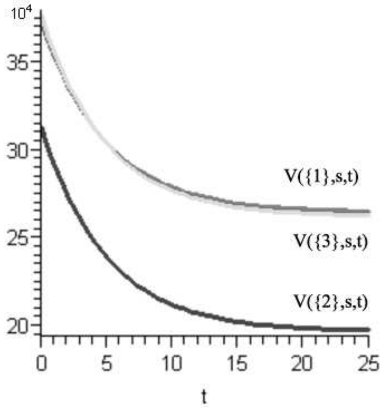

Рисунок 2. Прибыли игроков в случае конкуренции

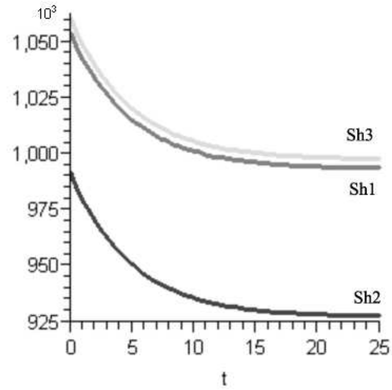

Рисунок 3. Прибыли игроков при кооперации

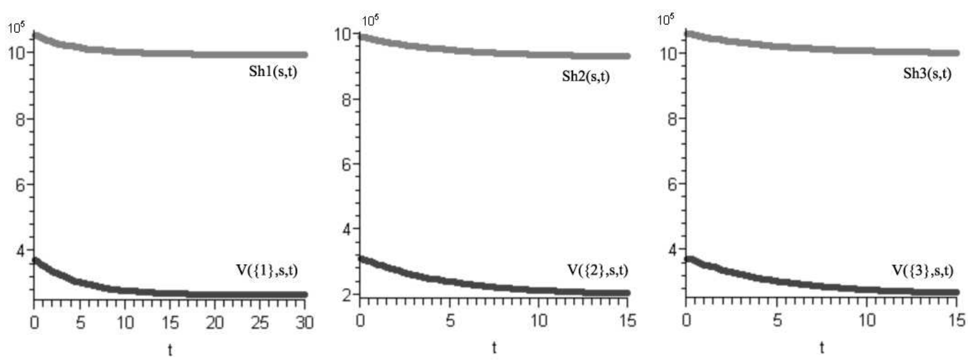

Рисунок 4. Сравнение кооперативных и конкурентных прибылей фирм

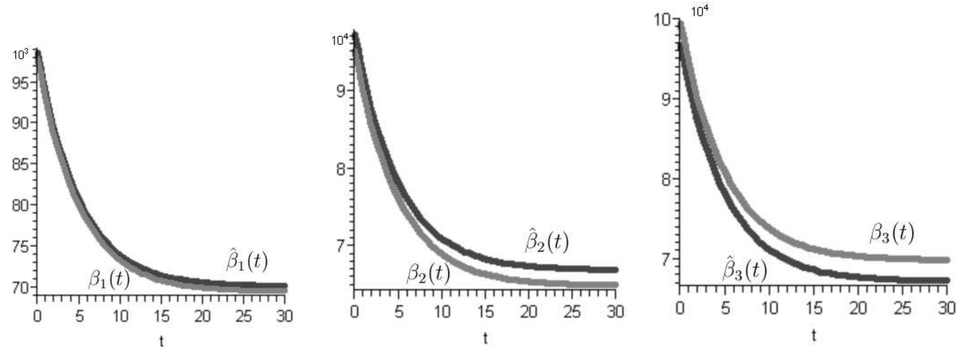

Рисунок 5. Сравнение мгновенных прибылей фирм при кооперации до перераспределения и после.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1977. Вып. 14. № 19. С. 46–52.

2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Мат. теория игр и её приложения. 2009. Т. 1. Вып. 1. С. 102–117.

3. Borkey P., Leveque F. *Voluntary approaches for environmental protection in the European Union - a survey* // European Environment. 2000. V. 10. P. 35–54.

4. Demsetz H. *Toward a theory of property rights* // The American Economic Review. 1967. V. 57. N 2. P. 347-359.

5. Dockner E. J., Jorgensen S., van Long N., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press. 2000. P. 485.

6. Katsoulacos Y., Xepapadeas A. *Environmental policy under oligopoly with endogenous market structure* // Scand. J. of Economics. 1995. V. 97. N 3. P. 411–420.

7. Nash J.F. *Equilibrium points in n-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

8. Petrosyan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. P. 381–398.

9. Petrosyan L., Kozlovskaya N. *Differential coalitional environmental management game* // Game theory and applications. Russia, St.Petersburg State University. V. 14. (Accepted.)

10. Shapley L.S. *A value for n-person games* // Contributions to the Theory of Games II. Prineton: Princeton University Press. 1953. P. 57–69.

11. Stimming M. *Capital accumulation subject to pollution control: Open-Loop versus feedback investment strategies* // Annals of Operations Research. 1999. V. 88. P. 309–336.

12. Yeung D. W. K. *An irrational - behavior - proofness condition in cooperative differential games* // Intern. J. of Game Theory Rew. 2006. V. 8. P. 739–744.

STABLE SHAPLEY VALUE IN COOPERATIVE GAME OF TERRITORIAL ENVIRONMENTAL PRODUCTION

Nikolay A. Zenkevich, St. Petersburg University, Graduate School of Management, Department of Operations Management, Dr.Sc., Associate Professor (zenkevich@gsom.pu.ru).
Nadezhda V. Kozlovskaya, St. Petersburg University, Graduate School of Management, Department of Operations Management, PhD student(kknn@yandex.ru).

Abstract: A game-theoretic model of territorial environmental production is studied. The process is modeled as cooperative differential game. The stable mechanism of distribution of the common cooperative benefit among players is proposed. We proved that the cooperative total stock of accumulated pollution is strictly less then the pollution under Nash equilibrium for the whole duration of the game. The perfect Nash equilibrium is found. We design a stable Shapley value as a cooperative solution, which is time-consistent. The Shapley value is also strategic stable and satisfies the irrational-behavior-proofness condition. The numerical example is given.

Keywords: differential game, cooperative game, dynamic programming, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Shapley value, Nash equilibrium, perfect equilibrium, stability of cooperative solution, time-consistency, strategic stability, irrational-behavior-proofness condition.