Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.1, с. 93-106

УДК 519.833.5
ББК В183 З-63

КОНСЕНСУС-ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ИГР С КОАЛИЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ

Александра Борисовна Зинченко
Георгий Викторович Мироненко
Полина Александровна Провоторова
Южный Федеральный Университет
344091, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 «а»
e-mail: zinch46@mail.ru, georim89@mail.ru, prov-pa@inbox.ru.

Выделен класс ТП-игр, для которых почти все концепции решения, кроме консенсус-значения, дают парадоксальные результаты. Доказано, что это игры большого босса. Предложено обобщение консенсус-значения для игр с коалиционной структурой.

Ключевые слова: коалиционная структура, коалиционное значение, консенсу-значение, игра большого босса, аксиоматизация.

1. Введение

Коалиционные структуры (объединения) возникают при формировании картелей, синдикатов, холдингов, политических альянсов и т.д. Такие ситуации моделируются кооперативными играми, позволяющими выделить выгодные коалиции и «справедливо» распределить прибыль между игроками. Если коалиции образовались до начала игры, т.е. известно разбиение $C = \{C_1, \dots C_m\}$ множества игроков N, то возможны следующие сценарии.

– Игроки каждой коалиции $C_p \in C$ делят между собой полезность $\nu(C_p)$, которую в состоянии получить коалиция C_p независимо от поведения других игроков.

– Все игроки объединяются, но внутри максимальной коалиции N образуются подкоалиции $C_1, \ldots, C_m$ (союзы [5], группы давления [9]), действующие при дележе $\nu(N)$ как единый игрок. Затем выигрыш каждой коалиции $C_p \in C$ распределяется между ее игроками.

Будем рассматривать игры второго типа. Оуэн предложил концепцию решения (коалиционное значение Оуэна [5]), дважды использующую значение Шепли: в игре между коалициями и играх внутри коалиций. Позже были введены коалиционные значения, сочетающие значение Шепли с взвешенным значением Шепли, значение Банзафа с значением Шепли, значение Шепли с p-биномиальным значением ($p \in [0, 1]$) и др. Ссылки можно найти, например, в [2]. Относительно недавно для игр с трансферабельной полезностью (ТП-игр) было предложено консенсус-значение [3], косвенно учитывающее возможность образование подкоалиций внутри коалиции N.

В данной статье выделен класс имеющих приложения ТП-игр, для которых основные концепции решения приводят к парадоксальным результатам, а консенсус-значение согласуется с моделируемой ситуацией и доминирует по Лоренцу другие решения. Доказывается, что такие игры соответствуют вершине многогранника (0-1)-редуцированных игр большого босса. Предлагается обобщение консенсус-значения для игр с коалиционной структурой. Доказывается, что коалиционное консенсус-значение однозначно определяется аксиомами эффективности, аддитивности, внутренней симметричности, внешней симметричности и свойством нейтрального игрока.

Вторая часть статьи содержит необходимые определения. В третьей части описано консенсус-значение ТП-игры, сформулированы его новые свойства. Четвертая часть посвящена коалиционному консенсус-значению и его аксиоматическому обоснованию.

2. Определения

Игрой с трансферабельной полезностью называется пара (N, ν), где $N = \{1, \ldots, n\}$ – конечное множество, $\nu \in G^N = \{g : 2^N \to R \mid g(\oslash) = 0\}$ – *характеристическая функция.* Игру (N, ν) часто отождествляют с характеристической функцией. Если $\nu, \omega \in G^N$ и $\alpha \in R$, то $\nu + \omega \in G^N$ и $\alpha\nu \in G^N$, где $(\nu + \omega)(S) = \nu(S) + \omega(S)$, $(\alpha\nu)(S) = \alpha\nu(S)$, $S \subseteq N$. Игроки $i, j \in N$ *симметричны* в (N, ν), если $\nu(S \cup i) = \nu(S \cup j)$, $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Игрок $i \in N$ *нейтрален* в (N, ν), если $\nu(S \cup i) - \nu(S) = \nu(i)$, $S \subseteq N \setminus i$.

Будем обозначать: $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$, $\tilde{x}$ – вектор, полученный из $x \in R^N$ упорядочением координат по неубыванию, $s =| S |$ – мощность множества S, $P^N = \{g : 2^N \to \{0, 1\} \mid g(\oslash) = 0, g(N) = 1\}$ – множество простых игр, $Ne(N, \nu)$ – множество нейтральных игроков игры (N, ν), $I(N, \nu) = \{x \in R^N \mid x(N) = \nu(N); x_i \geq \nu(i), i \in N\}$ – *множество дележей*, $C(N, \nu) = \{x \in I(N, \nu) \mid x(S) \geq \nu(S)$, $S \subset N\}$ – *C-ядро*, $\Re_1^{(i)}(N, \nu)$ – *переговорное множество* (для коалиции N) [1], $\eta(N, \nu)$ – *N-ядро* [6]. *D-ядром* $D(N, \nu)$ игры (N, ν) называется множество всех недоминируемых дележей (дележ x доминирует дележ y, если существует такая коалиция $S \subset N$, что $x(S) \leq \nu(S)$ и $x_i > y_i$ для всех $i \in S$). Если $\nu(N) \geq \nu(S) + \sum\limits_{i \in N \setminus S} \nu(i)$, $S \subset N$, то $D(N, \nu) = C(N, \nu)$. Пусть $x, y \in R^N$ и $x(N) = y(N)$. Говорят, что x *доминирует по Лоренцу* y, если $\sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{x}_i \geq \sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{y}_i$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ и, по крайней мере, одно из неравенств – строгое. Игра (N, ν) называется игрой в *(0-1)-редуцированной форме*, если $\nu(N) = 1$, $\nu(i) = 0$ для $i \in N$, $0 \leq \nu(S) \leq 1$ для $S \subset N$. Игра (N, ν) *квазисбалансирована*, если $m(N, \nu) \leq M^N(N, \nu)$ и $\sum\limits_{i \in N} m_i(N, \nu) \leq \nu(N) \leq \sum\limits_{i \in N} M_i^N(N, \nu)$, где

$$M_i^S(N, \nu) = \nu(S) - \nu(S \setminus i), \ i \in S \subseteq N, \tag{2.1}$$

$$m_i(N, \nu) = \max_{S: i \in S} (\nu(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j^N(N, \nu)), \ i \in N. \tag{2.2}$$

Игра (N, ν) является (0-1)-редуцированной *игрой большого босса* с игроком 1 в качестве босса, если

$$0 \leq \nu(S_1) \leq \nu(S_2) \leq 1, \ S_1 \subset S_2 \subset N, \ s_1 \geq 2, \tag{2.3}$$

$$\nu(S) = 0, \ s = 1 \text{ или } 1 \notin S, \tag{2.4}$$

$$\nu(N \setminus S) - \sum_{i \in S} \nu(N \setminus i) \leq s - 1, \ 1 \notin S, \ 2 \leq s < n. \tag{2.5}$$

Если упорядочить все непустые коалиции $(S_1, \ldots, S_d)$, то игре (N, ν) соответствует вектор линейного пространства R^d, $d = 2^n - 1$, i-я координата которого равна $\nu(S_i)$. Множество B_n^1 решений системы (2.3)-(2.5) есть многогранник в R^d (*многогранник (0-1)-редуцированных игр большого босса* с игроком 1 в качестве босса).

Значением называется функция φ, которая каждой игре (N,ν) ставит в соответствие вектор $\varphi(N,\nu) \in R^N$. Множество значений игры (N,ν) обозначим через $\Phi(N,\nu)$. Приведем некоторые аксиомы для $\varphi \in \Phi(N,\nu)$.

Аксиома 2.1. *(эффективность).* $\sum\limits_{i\in N} \varphi_i(N,\nu) = \nu(N)$.

Аксиома 2.2. *(симметричность). Если игроки $i, j \in N$ симметричны в (N,ν), то $\varphi_i(N,\nu) = \varphi_j(N,\nu)$.*

Аксиома 2.3. *(аддитивность).* $\varphi(N,\nu+\omega) = \varphi(N,\nu) + \varphi(N,\omega)$.

Аксиома 2.4. *(свойство нейтрального игрока). Если $i \in Ne(N,\nu)$, то* $\varphi_i(N,\nu) = \nu(i) + \frac{\nu(N) - \sum_{j\in N}\nu(j)}{2n}$.

Значение Шепли sh и *равномерное значение* e игры (N,ν), $\nu \in G^N$, определяются формулами

$$sh_i(N,\nu) = \sum_{S: i\in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} M_i^S(N,\nu), \tag{2.6}$$

$$e_i(N,\nu) = \nu(i) + \frac{\nu(N) - \sum\limits_{j\in N}\nu(j)}{n},\ i \in N, \tag{2.7}$$

а *τ-значение* τ квазисбалансированной игры (N,ν) - системой

$$\sum_{i\in N} \tau_i(N,\nu) = \nu(N),\ \tau(N,\nu) = \lambda m(N,\nu) + (1-\lambda)M^N(N,\nu),\ \lambda \in [0,1]. \tag{2.8}$$

3. Консенсус-значение

Консенсус-значение [3] является обобщением решения игры двух лиц. Пусть $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ - перестановка N, $\Pi(N)$ - множество всех перестановок. Вначале разыгрывается игра двух лиц: игрока π_n и коалиции $S_{n-1} = \{\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}\}$, действующей как единый игрок. Игрок π_n получает $x_{\pi_n} = \nu(\pi_n) + \frac{\Delta_n}{2}$, где $\Delta_n = \nu(N) - \nu(S_{n-1}) - \nu(\pi_n)$, а коалиция S_{n-1} выигрывает $x_{S_{n-1}} = \nu(S_{n-1}) + \frac{\Delta_n}{2}$. Игрок π_n выходит из игры. В новой игре между π_{n-1} и коалицией $S_{n-2} = \{\pi_1, \ldots, \pi_{n-2}\}$ выигрыши равны: $x_{\pi_{n-1}} = \nu(\pi_{n-1}) + \frac{\Delta_{n-1}}{2}$, $x_{S_{n-2}} = \nu(S_{n-2}) + \frac{\Delta n-1}{2}$, где $\Delta_{n-1} = x_{S_{n-1}} - \nu(S_{n-2}) - \nu(\pi_{n-1})$. Игрок π_{n-1} выходит из игры и т.д. Консенсус-значение k есть среднее векторов $x^\pi = (x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n})$: $k(N,\nu) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\pi \in \Pi(N)} x^\pi$. Доказано [3], что консенсус-значение однозначно определяется аксиомами 2.1-2.4 и

$$k(N,\nu) = \frac{e(N,\nu) + sh(N,\nu)}{2}, \tag{3.1}$$

следовательно $k(N,\nu)$ балансирует два крайних принципа распределения дохода от кооперации: эгалитарного, реализуемого $e(N,\nu)$, и утилитарного принципа, отраженного в $sh(N,\nu)$. Приведем примеры, обобщение которых позволит сформулировать новые свойства значения k.

Пример 3.1. ("Инвестиционная игра"). Рассмотрим проблему кооперативного инвестирования ([8], стр. 92) с тремя инвесторами и исходными капиталами 60, 40, 40 д.е. Имеются следующие возможности: 10% банковский депозит и инвестирование производственного процесса, приносящего 20% прибыли. Начальный вклад в производство не может быть меньше 100. Этой ситуации соответствует игра (N,ν), где

$$N = \{1,2,3\},\ \nu(1) = 66,\ \nu(2) = \nu(3) = 44,$$
$$\nu(1,2) = \nu(1,3) = 120,\ \nu(2,3) = 88,\ \nu(N) = 164.$$

Устойчивым в [8] назван единственный дележ $x^c = (76,44,44)$ C-ядра $C(N,\nu)$. Положив $\nu'(S) = \nu(S) - \sum\limits_{i \in S} \nu(i)$, $S \subseteq N$, перейдем к стратегически эквивалентной игре (N,ν'):

$$\nu'(i) = 0,\ i \in N,\ \nu'(2,3) = 0,\ \nu'(1,2) = \nu'(1,3) = \nu'(N) = 10. \tag{3.2}$$

Получаем $C(N,\nu') = \{(x^c)'\}$, $(x^c)' = (10,0,0)$. Теперь более наглядна парадоксальность "ядерного" распределения: вся прибыль от кооперации достается первому инвестору, несмотря на то, что самостоятельно он может получить только $\nu'(1) = 0$. Вектор Шепли $sh(N,\nu') = (\frac{20}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ также преувеличивает роль первого игрока. Игра (N,ν') квазисбалансирована, т.к. $C(N,\nu') \neq \oslash$. Согласно (2.1) и (2.2) $M_1^N(N,\nu') = 10$, $M_2^N(N,\nu') = M_3^N(N,\nu') = 0$, $m(N,\nu') = M^N(N,\nu')$. Из (2.8) получаем, что $\tau(N,\nu') = (x^c)'$. Из вложения

$\eta(N,\nu') \subseteq C(N,\nu')$ имеем $\eta(N,\nu') = (x^c)'$. При дележе $k(N,\nu') = (5,\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ первый игрок получает половину $\nu'(N)$, а другая половина эгалитарно распределяется среди остальных игроков. Нетрудно проверить, что $k(N,\nu')$ доминирует по Лоренцу $sh(N,\nu')$, $(x^c)'$, а следовательно $\eta(N,\nu')$ и $\tau(N,\nu')$.

Пример 3.2. Игру (N,ν) ([3], стр. 691), где

$$N = \{1,2,3\},\ \nu(i) = 0,\ i \in N,\ \nu(2,3) = 0,$$
$$\nu(1,2) = \nu(1,3) = \nu(N) = 1, \tag{3.3}$$

можно интерпретировать как игру "Перчатки" (или "Ботинки"), в которой первый игрок имеет левую перчатку (левый ботинок), а остальные игроки имеют по одной правой перчатке (правому ботинку). Рыночная цена комплекта - 1 д.е. $C(N,\nu) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N,\nu) = \tau(N,\nu) = (1,0,0)$, $sh(N,\nu) = (\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, $k(N,\nu) = (\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. Игра (3.3) является (0-1)-редуцированной формой игры (3.2), следовательно, эти игры стратегически эквивалентны и все предыдущие рассуждения справедливы также для (3.3).

Пример 3.3. ("Взвешенная мажоритарная игра"). Три акционера владеют 50, 30 и 20 акциями. Любое решение может быть утверждено акционерами, имеющими простое большинство акций. Эта взвешенная мажоритарная игра (51; 50, 30, 20) совпадает с игрой "Парламент" (три партии, число голосов: 50, 30, 20) и игрой (3.3).

Обобщением (3.3) является игра (N,b^1), где $n \geq 3$,

$$b^1(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } s = 1 \text{ или } 1 \notin S, \\ 1, & \text{в остальных спучаях.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Предположение 3.1. (N,b^1) *является игрой большого босса с игроком 1 в качестве босса и соответствует крайней точке многогранника* B_n^1.

Доказательство. (N,b^1) соответствует крайней точке гиперкуба $K = \{\nu \in R^d \mid 0 \leq \nu(S) \leq 1,\ \oslash \neq S \subseteq N\}$ и $B_n^1 \subset K$, поэтому достаточно доказать, что $b^1 \in B_n^1$. Условие (2.4) выполняется для b^1 по определению. Пусть $S_1 \subset S_2 \subset N$, $s_1 \geq 2$. Если $1 \in S_2$, то $b^1(S_2) = 1$

и $b^1(S_1) \in \{0,1\}$, следовательно справедливо (2.3). Если $1 \notin S_2$, то $1 \notin S_1$ и $b^1(S_1) = b^1(S_2) = 0$, т.е. условие (2.3) также выполняется. Подставляя b^1 в (2.5) и учитывая, что $b^1(N \setminus S) = b^1(N \setminus i) = 1$ для $i \in S$ и коалиций S, удовлетворяющих условиям $1 \notin S$, $2 \leq s < n$, получаем верное неравенство $s \geq 1$.

□

Предположение 3.2. *Для игры* (N, b^1) *справедливо:*

(a) $C(N,b^1) = D(N,b^1) = \Re_1^{(i)}(N,b^1) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N,b^1) = \tau(N,b^1) = (1,0,\ldots,0)$*;*

(b) $sh(N,b^1) = (\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n(n-1)}, \ldots, \frac{1}{n(n-1)}), k(N,b^1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n-1)}, \ldots, \frac{1}{2(n-1)})$*;*

(c) $k(N,b^1)$ *доминирует по Лоренцу* x^c, $sh(N,b^1)$, $\eta(N,b^1)$ *и* $\tau(N,b^1)$.

Доказательство. (a) $C(N,b^1) = \{x \in R^N \mid x(N) = \nu(N);\ 0 \leq x_i \leq M_i^N(N,b^1),\ i \in N \setminus \{1\}\}$ [7]. Следовательно $C(N,b^1) = \{x^c\}$, $x^c = \eta(N,b^1) = (1,0,\ldots,0)$. В игре (N,b^1) переговорное множество совпадает с C-ядром, N-ядро совпадает с τ-значением и центром C-ядра [7]. Кроме того, выполняется достаточное условие совпадения C-ядра и D-ядра.

(b) Так как $e_i(N,b^1) = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и $M_1^S(N,b^1) = 0$ для $S = \{1\}$, $M_1^S(N,b^1) = 1$ в остальных случаях, то векторы $sh(N,b^1)$ и $k(N,b^1)$ легко находятся из (2.6), (3.1)

(c) Доказываемое утверждение вытекает из неравенств $\frac{1}{2(n-1)} > \frac{1}{n(n-1)} > 0$ и предположения о количестве игроков ($n \geq 3$) в игре (N,b^1).

□

4. Коалиционное консенсус-значение

Пусть $C = \{C_1,\ldots,C_m\}$ – коалиционная структура (разбиение N), $S \subseteq C_p \in C$, $C_p^S = \{C_1,\ldots,C_{p-1},S,C_{p+1},\ldots,C_m\}$ – разбиение $N \setminus (C_p \setminus S)$, $M = \{l \mid C_l \in C\}$ – множество индексов компонент структуры C, $(\nu/C)(Q) = \nu(\bigcup\limits_{l\in Q} C_l)$ для всех $Q \subseteq M$, $(\nu/C_p^S)(Q) = \nu(S \cup \bigcup\limits_{l\in Q\setminus p} C_l)$ для $Q \ni p$ и $(\nu/C_p^S)(Q) = (\nu/C)(Q)$ для остальных $Q \subseteq M$. *Игра с коалиционной структурой* (N,ν,C) распадается на игру $(M,\nu/C)$ между коалициями $C_p, p \in M$, и редуцированные игры (C_p, ν_p^ψ) внутри коалиций. Предполагается, что в качестве концепции решения внешней игры выбрано $\psi \in \Phi(M, \nu/C)$, а во внутренних играх - $\varphi \in \Phi(C_p, \nu_p^\psi)$. Вес коалиции S в (C_p, ν_p^ψ) равен ее выигрышу во вспомогательной игре $(M, \nu/C_p^S)$, т.е. $\nu_p^\psi(S) = \psi_p(M, \nu/C_p^S)$. Партнеры S по структуре C в игре $(M, \nu/C_p^S)$ не участвуют. *Коалиционное значение* f ставит в соответствие каждой игре (N, ν, C) вектор $f(N, \nu, C) \in R^N$, т.е. $f_i(N, \nu, C) = \varphi_i(C_p, \nu_p^\psi)$, $i \in N$.

Коалиционным консенсус-значением ks назовем коалиционное значение, при вычислении которого в качестве функций φ и ψ используется консенсус значение, т.е.

$$ks_i(N, \nu, C) = k_i(C_p, \nu_p^k),\ i \in C_p \in C, \tag{4.1}$$

где

$$\nu_p^k(S) = k_p(M, \nu/C_p^S),\ S \subseteq C_p. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Нейтральный в (N, ν) игрок $i \in C_p \in C$ нейтрален в редуцированной игре (C_p, ν_p^k) тогда и только тогда, когда $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, где*

$$\Delta_p(M, \nu/C) = \nu(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $i \in C_p \cap Ne(N, \nu) \neq \oslash$. Нужно показать, что условие $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$ необходимо и достаточно для выполнения соотношений $\nu_p^k(i \cup S) - \nu_p^k(S) = \nu_p^k(i)$, $S \subseteq C_p \setminus i$. Из (4.2) и (3.1) имеем $\nu_p^k(S) = \frac{sh_p(M, \nu/C_p^S) + e_p(M, \nu/C_p^S)}{2}$. Используя (2.6), (2.7), (2.1) и учитывая нейтральность игрока i в (N, ν), получаем $\nu_p^k(i \cup S) - \nu_p^k(S) = \nu(i)$ для всех $S \subseteq C_p \setminus i$. Рассмотрим игру $(M, \nu/C_p^{\{i\}})$ между компонентами структуры $C_p^{\{i\}}$. Пусть $Q \subseteq M \setminus p$, тогда $(\nu/C_p^{\{i\}})(p \cup Q) - (\nu/C_p^{\{i\}})(Q) = \nu(i \cup \bigcup_{l \in Q} C_l) - \nu(\bigcup_{l \in Q} C_l) = \nu(i) = (\nu/C_p^{\{i\}})(p)$, т.е. одноэлементная коалиция $\{i\}$ есть нейтральный игрок в $(M, \nu/C_p^{\{i\}})$, консенсус-выигрыш которого определяется аксиомой 2.4: $k_p(M, \nu/C_p^{\{i\}}) = \nu_p^k(i) = \nu(i) + \frac{\nu(i \cup \bigcup_{l \in M \setminus p} C_l) - \nu(i) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l)}{2m} = \nu(i) + \frac{\nu(N \setminus C_p) - \sum_{l \in M \setminus p} \nu(C_l)}{2m} = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2m}$. Равенство $\nu_p^k(i) = \nu(i)$ и доказываемое утверждение, выполняются тогда и только тогда, когда $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$.

□

Сформулируем необходимые аксиомы для коалиционного значения f.

Аксиома 4.1. *(эффективность).* $\sum\limits_{i \in N} f_i(N, \nu, C) = \nu(N)$.

Аксиома 4.2. *(аддитивность).* $f(N, \nu + \omega, C) = f(N, \nu, C) + f(N, \omega, C)$.

Аксиома 4.3. *(внутренняя симметричность). Если игроки* $i, j \in C_p \in C$ *симметричны в* (N, ν), *то* $f_i(N, \nu, C) = f_j(N, \nu, C)$.

Аксиома 4.4. *(внешняя симметричность). Если игроки* $p, r \in M$ *симметричны в* $(M, \nu/C)$, *то* $\sum\limits_{i \in C_p} f_i(N, \nu, C) = \sum\limits_{i \in C_r} f_i(N, \nu, C)$.

Аксиома 4.5. *(модифицированное свойство нейтрального игрока). Пусть* $p \in M$, $i \in C_p \cap Ne(N, \nu) \neq \oslash$. *Если* $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$ *то* $f_i(N, \nu, C) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, *где* $\Delta_p(M, \nu/C)$ *определено (4.3). Если* $C_p \nsubseteq Ne(N, \nu)$ *и* $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, *то*

$$f_i(N, \nu, C) = \nu(i) + \frac{k_p(M, \nu/C) - \sum\limits_{j \in C_p} k_p(M, \nu/C_p^{\{j\}})}{2c_p}. \qquad (4.4)$$

Заметим, что, формулы для ν/C и $\nu/C_p^{\{j\}}$), а также (3.1), (2.6), (2.7) и (4.3) выражают приведенные в аксиоме 4.5 выигрыши нейтральных в (N, ν) игроков через функцию ν. По лемме 4.1 нейтральный в (N, ν) игрок $i \in C_p \in C$ может уже не быть нейтральным в редуцированной игре внутри коалиции C_p. Аксиома 4.5 определяет выигрыши тех игроков из $Ne(N, \nu)$, которые принадлежат коалициям C_p, удовлетворяющим некоторым условиям. Если C_p состоит только из нейтральных в (N, ν) игроков, то $i \in C_p$ получает $\nu(i)$ и "добавку" $\frac{\Delta_p(M, \nu/C)}{2c_p m}$, одинаковую для всех игроков из C_p. Если не все игроки из C_p нейтральны в (N, ν) и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, то $i \in C_p \cap Ne(N, \nu)$ получает $\nu(i)$ плюс $\frac{1}{2c_p}$-ю часть разности между консенсус-выигрышем $k_p(M, \nu/C)$ коалиции C_p в игре между компонентами структуры C и суммой консенсус-выигрышей $k_p(M, \nu/C_p^{\{j\}})$ игроков из C_p, которые они получают, играя самостоятельно против всех коалиций $C_l \in C$, $l \in M \setminus p$. И в этом случае "добавка" к $\nu(i)$ одинакова для всех $i \in C_p \cap Ne(N, \nu)$. Формула (4.4) аксиомы 4.5 получается из формулы выигрыша нейтрального игрока в аксиоме 2.4 заменой функции ν на ν_p^k . Нетрудно проверить, что при одновременном выполнении условий $C_p \subseteq Ne(N, \nu)$ и $\Delta_p(M, \nu/C) = 0$, обе формулы из аксиомы

4.5 принимают вид $f_i(N,\nu,C) = \nu(i)$, $i \in C_p$.

Лемма 4.2. *Коалиционное значение ks удовлетворяет аксиомам 4.1-4.5.*

Доказательство. Из определения ks, свойств консенсус-значения k и [3] следует, что ks удовлетворяет аксиомам 4.1-4.4. Рассмотрим последнюю аксиому. Пусть $i \in C_p \in C$ - нейтральный игрок в (N,ν).

1. Если $C_p \subseteq Ne(N,\nu)$, т.е. C_p состоит только из нейтральных в (N,ν) игроков, то $\nu(C_p) = \sum\limits_{j\in C_p} \nu(j)$ и $\nu(R\cup S) - \nu(R) = \nu(S)$, $S \subseteq C_p$, $R \subseteq N \setminus C_p$. Таким образом, любая коалиция $\oslash \neq S \subseteq C_p$ является нейтральным игроком во внешней игре между компонентами структуры C_p^S. При доказательстве леммы 4.1 было показано, что $\nu_p^k(i) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2m}$. Аналогично доказываются соотношения $\nu_p^k(S) = \nu(S) + \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2m}$, $\oslash \neq S \subseteq C_p$. Пусть $u, \omega \in G^{C_p}$ и $u(S) = \nu(S)$, $\omega(S) = \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2m}$. Тогда $\nu_p^k = u + \omega$. Все игроки в (C_p,ω) симметричны, поэтому $k_i(C_p,\omega) = \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2c_p m}$. В (C_p,u) все игроки нейтральны и по аксиоме 2.4: $k_i(C_p,u) = \nu(i) + \frac{\nu(C_p) - \sum_{j\in C_p}\nu(j)}{2c_p} = \nu(i)$. Из (4.1) и аксиомы 2.3 имеем $ks_i(N,\nu,C) = k_i(C_p,\nu_p^k) = \nu(i) + \frac{\Delta_p(M,\nu/C)}{2c_p m}$, т.е. ks удовлетворяет аксиоме 4.5.

2. Если $C_p \nsubseteq Ne(N,\nu)$ и $\Delta_p(M,\nu/C) = 0$, то игрок i нейтрален в (C_p,ν_p^k) и $\nu_p^k(i) = \nu(i)$. Из (4.1) и аксиомы 2.4 получаем $ks_i(N,\nu,C) = \nu_p^k(i) + \frac{\nu_p^k(C_p) - \sum_{j\in C_p}\nu_p^k(j)}{2c_p}$. Согласно (4.2): $\nu_p^k(C_p) = k_p(M,\nu/C)$, $\nu_p^k(j) = k_p(M,\nu/C_p^{\{j\}})$, $j \in C_p$. Следовательно для ks выполняется (4.4).

$\square$

При обоснования коалиционного консенсус-значения будем использовать *игру* (N,u_T) *единогласия коалиции* T, где $\oslash \neq T \subseteq N$, $u_T(S) = 1$ для $S \supseteq T$, $u_T(S) = 0$ в остальных случаях. Игроки из $Ne(N,u_T) = N \setminus T$ являются нулевыми в (N,u_T), т.к. для них $\nu(i) = 0$. Множество T состоит из вето-игроков. Каждая пара нулевых игроков (или пара вето-игроков) симметрична.

Теорема 4.1. *Коалиционное консенсус-значение ks является единственным значением для игр (N,ν,C), удовлетворяющим аксиомам 4.1-4.5.*

Доказательство. Пусть f - коалиционное значение, удовлетворяющее аксиомам 4.1 - 4.5. Система функций $\{u_T\}_{T\in 2^N\setminus\oslash}$ является базисом в G^N, поэтому, учитывая лемму 4.2 и аксиому 4.2, достаточно показать, что f однозначно определяется для игры $(N, \alpha u_T, C)$, где $\alpha \in R$, $\oslash \neq T \subseteq N$. Пусть $D = \{l \in M \mid C_l \cap T \neq \oslash\}$ - множество индексов компонент структуры C, содержащих по крайней мере одного игрока из T. Так как $(\alpha u_T/C)(Q) = (\alpha u_T)(\bigcup\limits_{l\in Q} C_l) = \alpha$ для $Q \supseteq D$ и $(\alpha u_T/C)(Q) = 0$ в остальных случаях, то игра $(M, \alpha u_T/C)$ между компонентами структуры C совпадает с $(M, \alpha u_D)$, где (M, u_D) - игра единогласия коалиции D. Каждой коалиции C_p, $p \notin D$, состоящей из нейтральных в $(N, \alpha u_T)$ игроков, соответствует нейтральный и одновременно нулевой игрок в $(M, \alpha u_D)$. Коалиции C_p, $p \in D$, соответствует вето-игрок в $(M, \alpha u_D)$. Из (3.1) получаем

$$k_p(M, \alpha u_T/C) = k_p(M, \alpha u_D) = \frac{e_p(M, \alpha u_D) + sh_p(M, \alpha u_D)}{2},\ p \in M. \tag{4.5}$$

Известно, что

$$sh_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, \\ \frac{\alpha}{d}, & p \in D. \end{cases}$$

Так как $e_p(M, \alpha u_D) = (\alpha u_D)(p) + \frac{(\alpha u_D)(M) - \sum\limits_{j\in M} (\alpha u_D)(j)}{m}$, $(\alpha u_D)(M) = \alpha$, $(\alpha u_D)(j) = \alpha$, если $j \in D$ и $d = 1$, $(\alpha u_D)(j) = 0$ в остальных случаях, то

$$e_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, d = 1, \\ \alpha, & p \in D, d = 1, \\ \frac{\alpha}{m}, & d \geq 2, \end{cases}$$

$$k_p(M, \alpha u_D) = \begin{cases} 0, & p \notin D, d = 1, \\ \alpha, & p \in D, d = 1, \\ \frac{\alpha}{2m}, & p \notin D, d \geq 2, \\ \frac{\alpha(m+d)}{2md}, & p \in D, d \geq 2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Игра $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ между $j \in C_p \in C$ и коалициями C_l, $l \in M\setminus p$, получается из $(M, \alpha u_T/C)$ удалением из компоненты C_p всех игроков кроме j. Если удаляются игроки, не принадлежащие T, то характеристическая функция не меняется, т.е. $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ совпадает с

$(M, \alpha u_T/C)$ и с $(M, \alpha u_D)$. Другими словами, $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ совпадает с $(M, \alpha u_D)$, если $p \notin D$ или j является единственным вето-игроком компоненты C_p. Если из C_p удаляется хотя бы один игрок, принадлежащий T, то игра $(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}})$ становится нулевой. Следовательно

$$k_p(M, \alpha u_T/C_p^{\{j\}}) = \begin{cases} k_p(M, \alpha u_D), & \text{если } p \notin D \text{ или } C_p \cap T = \{j\}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.7}$$

1. Пусть $p \notin D$. Тогда $C_p \subseteq Ne(N, \alpha u_T)$, т.к. компонента C_p не содержит вето-игроков, и $(\alpha u_T)(i) = 0$ для всех $i \in C_p$. По аксиоме 4.5: $f_i(N, \alpha u_T, C) = \frac{\Delta_p(M, \alpha u_T/C)}{2c_p m}$, $i \in C_p$, где $\Delta_p(M, \alpha u_T/C) = \alpha$, если $d \geq 2$, и $\Delta_p(M, \alpha u_T/C) = 0$, если $d = 1$. Таким образом, аксиома 4.5 однозначно определяет выигрыши всех игроков каждой коалиции C_p, $p \notin D$.

2. Пусть $p \in D$. Тогда $C_p \nsubseteq Ne(N, \alpha u_T)$. В данном случае $\Delta_p(M, \alpha u_T/C) = (\alpha u_T)(N \backslash C_p) - \sum\limits_{l \in M \backslash p} (\alpha u_T)(C_l) = 0$. Обозначив $\xi = \frac{\Delta_p(M, \alpha u_T/C)}{2m}$, имеем $\sum\limits_{p \notin D} \sum\limits_{i \in C_p} f_i(N, \alpha u_T, C) = (n-d)\xi$. Каждая пара игроков $r, l \in D$ симметрична в $(M, \alpha u_T/C)$ и $(\alpha u_T)(N) = \alpha$, следовательно по аксиомам 4.1, 4.4

$$\sum_{i \in C_p} f_i(N, \alpha u_T, C) = \frac{\alpha - (n-d)\xi}{d}, \ p \in D. \tag{4.8}$$

Аксиома 4.5 и формулы (4.4)-(4.7) однозначно определяют $f_i(N, \alpha u_T, C)$ для нейтральных игроков $i \in C_p \setminus T = C_p \cap Ne(N, \alpha u_T)$ коалиций C_p, $p \in D$. Используя эти значения, аксиому 4.3 и формулу (4.8), получаем единственные значения $f_i(N, \alpha u_T, C)$ для $i \in T$.

Таким образом, аксиомы 4.1, 4.3 - 4.5 однозначно определяют значения $f_i(N, \alpha u_T, C)$ для всех $i \in N$.

$\square$

Замечание 4.1. Для коалиционного консенсус-значения выполняется

$$\sum_{i \in C_p} ks_i(N, \nu, C) = ks_p(M, \nu/C, \{M\}) = k_p(M, \nu/C).$$

Левая часть этого соотношения называется свойством внешней игры, а правая - свойством согласованности. Оба свойства используются для аксиоматической характеристики коалиционных значений.

Замечание 4.2. Коалиционное консенсус-значение является одним из немногих коалиционных значений, не удовлетворяющих свойству нулевого игрока (игрок $i \in N$, для которого $M_i^S(N, \nu) = 0$, $S \subseteq N$, должен получить нулевой выигрыш). Однако в отличие, например, от двухэтапного Шепли-значения [4], выигрыш каждой коалиции $C_p \in C$ распределяется с учетом "внешних" возможностей игроков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aumann R.J., Maschler M. *The bargaining set for cooperative games* // Advances in Game Theory. Princeton University Press. Princeton. 1964. P. 443–447.

2. Gomez-Rua M., Vidal-Puga J. *The axiomatic approach to three values in games with coalition structure.* MPRA Paper 8904. 2008. P. 1–30.

3. Ju Y., Borm P., Ruys P. *The consensus value: a new solution concept for cooperative games* // Social Choice and Welfare. 2007. V. 28. N 4. P. 685–703.

4. Kamijo Y. *A Two-step Shapley value in a cooperative game with a coalition structure* // 21 COE-GLOPE Working Paper Series. 2007. V. 28. P. 1–9.

5. Owen G. *Values of games with a priori unions.* Essays in Mathematical Economics and Game Theory. Springer-Verlag, Berlin. 1977. P. 76–88.

6. Schmeidler D. *The nucleolus of a characteristic function game* // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. V. 17. P. 1163–1170.

7. Tijs S. *Big boss games, clan games and information market games* // Game Theory and Applications. Academic Press, San Diego. 1990. P. 410–412.

8. Waegenaere A. De, Suijs J, Tijs S. *Stable profit sharing in cooperative investment* // OR Spectrum. 2005. V. 27. N 1. P. 85–93.

9. Winter E. *A value for cooperative games with levels structure of cooperation* // International Journal of Game Theory. 1989. V. 18. N 2. P. 227–240.

A CONSENSUS VALUE FOR GAMES WITH COALITION STRUCTURE

Alexandra B. Zinchenko, Southern Federal University, Cand.Sc., dosent (zinch46@mail.ru).
George V. Mironenko, Southern Federal University, magistr (georim89@mail.ru).
Polina A. Provotorova, Southern Federal University, magistr (prov-pa@inbox.ru).

Abstract: The class of TU-games for which almost all solution concepts, except the consensus value, yield paradoxical results is selected. It is proved, that it is big boss games. Generalisation of consensus value for games with coalition structure is introduced.

Keywords: coalition structure, coalition value, consensus value, big boss game, axiomatization.