МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТОМ 2, ВЫПУСК 2, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ Том 2, выпуск 2

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 2

2010

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО
издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Учредители журнала: Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН,
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru url: http://mgta.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 2
Выпуск 2

Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 27.09.10.
Формат 70x108 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,1. Усл. печ. л. 11,7. Тираж 300 экз.
Изд. № 143. Заказ 901.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50

ISSN 2074-9872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

МТИ&П

ТОМ 2 ВЫПУСК 2

2010

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВАН В 2009 г., ВЫХОДИТ ЕЖЕКВАРТАЛЬНО

издается под руководством **Отделения Математических Наук РАН**

Журнал «МТИ&П» публикует статьи, касающиеся теоретико-игрового анализа и методов оптимального управления для решения прикладных задач в экономике, экологии, политике и менеджменте. Теоретико-игровой подход обладает обширным потенциалом в социальных, экономических и политических задачах. С другой стороны сама теория игр может быть обогащена исследованиями реальных проблем принятия решений.

Целью публикаций задач стратегического анализа является поддержка взаимосвязи между математической теорией и приложениями. Публикуемые статьи содержат строгий анализ современных проблем и перспективы новых исследований. Журнал «МТИ&П» принимает статьи, связанные с теоретико-игровым подходом из всех областей применения в экономике, менеджменте, экологии и политике.

Важной задачей журнала является поощрение междисциплинарных взаимосвязей (математические и экономические науки, математические и биологические науки, математические и политические науки) и взаимодействия исследователей в области теории игр. Журнал «МТИ&П» приветствует не только статьи по теории игр и приложениям, но и технические заметки, комментарии, примеры, численный анализ, моделирование и вычислительные алгоритмы.

Учредители журнала:
Учреждение Российской Академии Наук
Институт Прикладных Математических Исследований
Карельского Научного Центра РАН

Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Санкт-Петербургский Государственный Университет

Редакция журнала:

185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11. тел. (8142)781108.
e-mail: mgta@krc.karelia.ru
url: http://mgta.krc.karelia.ru

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 3–41

УДК 519.832.2
ББК 22.18

ТОВАРНОЕ РАЗНООБРАЗИЕ В ВЕРТИКАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОМ КАНАЛЕ ПРИ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Игорь А. Быкадоров*
Сергей Г. Коковин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
e-mail: bykad@math.nsc.ru, skokovin@math.nsc.ru

Евгений В. Желободько
Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
e-mail: ezhel@ieie.nsc.ru

В России торговые сети имеют заметную рыночную власть. Наша модель совмещает отрасль типа Диксита-Стиглица с монополистическим перепродавцом, чтобы выяснить: Всегда ли появление перепродавца ухудшает благосостояние, цены и разнообразие товаров? Какая структура рынка хуже: Нэшевская

* Это исследование было поддержано индивидуальным грантом R08-1071 от РПЭИ (Economics Education and Research Consortium, Inc. – EERC), финансируемым организациями Eurasia Foundation, US Agency for International Development, The World Bank Institution, The Global Development Network, и правительством Швеции.

или Штакельберговская? Каково должно быть общественное регулирование этой сферы?

Ключевые слова: монополистическая конкуренция, модель Диксита-Стиглица, ритейлер, равновесии Нэша, равновесие Штакельберга, общественное благосостояние, налогообложение по Пигу.

1. Введение

В начале XXI века Россия и другие развивающиеся рынки бывшего СССР демонстрируют бурный рост крупных торговых сетей в потребительском секторе. Вдохновленные Wal-Mart и другими успешными зарубежными гигантами, российские трейдеры, такие как "Ашан" и "Патэрсон" захватили большую долю рынка и получили значительную рыночную силу, как в Москве, так и в провинции. Это изменение рыночной организации, по мнению многих политиков, может привести к негативным последствиям для общественного благосостояния, товарного разнообразия и инфляции. Общественный интерес к этому вопросу привел к дебатам в Государственной Думе РФ и недавнему принятию закона против концентрации торговли в руках немногих фирм. Однако, теоретическое обоснование тех или иных мер в этой области отстает от практики, и мы ставим задачу пополнить арсенал идей и подходов.

Наше исследование сфокусировано на конструировании и анализе адекватной модели вертикального рыночного взаимодействия производитель-ритейлер-покупатель, подходящей для описания российского рынка продуктов питания, одежды и др. В отличие от традиционных моделей монополистического или олигополистического вертикального взаимодействия или франчайзинга (см., например, обзор в [21]), мы опираемся на более современное представление конкуренции в отрасли в духе модели Диксита–Стиглица (см. [8]), но дополненной вертикальными взаимодействиями. Такая постановка является сравнительно новой, одними из первых являются работы Чена [5] и Хамильтона и Ричардса [10]. Более подробное обсуждение этих работ приведено в разделе 2, как и мотивация в пользу нашего варианта модели ритейлинга.

Наша стилизованная модель рыночной конкуренции рассматривает рынок "диверсифицированного" товара, или отрасль типа Диксита-

Стиглица. Это означает товарную группу (например, “еда”или “одежда ”) с континуумом $[0, N]$ производителей, где каждый производит свою марку товара, а число конкурентов определяется свободным входом. Товары продаются репрезентативному потребителю через репрезентативного ритейлера, выступающего как монополист/монопсонист (по крайней мере в своем городе или районе). Каждый производитель имеет фиксированные и переменные издержки, и определяет цену своего товара. Аналогично, и ритейлер имеет фиксированные и переменные издержки обслуживания каждой марки и определяет торговую надбавку или маржу.

Предположение о рыночной власти ритейлеров (стилизованно представленных одним ритейлером) представляется более реалистичным, по крайней мере для развивающихся рынков, чем отсутствие этой власти. Действительно, в экономических периодических изданиях описано большое число примеров (см. [9], [1], [17] и [2]), где каждый из нескольких “больших” ритейлеров проявлял значительную переговорную силу, по сравнению с производителями и импортерами потребительских товаров (даже такая международная компания, как Coca-Cola, недостаточно сильна, чтобы безоговорочно навязывать свои условия российским ритейлерам).

Наиболее естественным “таймингом” (поведенческой гипотезой) рынка после концентрации ритейлинга представляется следующая ситуация:

- ритейлер выступает как лидер игры, он начинает с анонсирования своей политики торговых надбавок (при этом правильно предвидя последующий ответ производителя) и одновременно выбирает спектр разнообразия продуктов, приобретаемых у производителей (тем самым выбирая и количество фирм-производителей);

- затем производители назначают свои цены адекватно предвидя спрос;

- наконец, рынок (потребитель) определяет объем покупки каждого товара при уже заданных ценах, согласно “профилю” спроса, генерируемому функцией полезности репрезентативного потребителя.

Такая организация отрасли сравнивается в нашем исследовании с ситуацией, предшествующей концентрации рынка. Не-концентрированный рынок и моделируется или как лидерство производителей,[1] или как миопическое (близорукое, Нэшевское) поведение производителей и ритейлера, которые неспособны предвидеть развитие рынка и сознательно влиять на него.

Ставятся следующие вопросы:

- Всегда ли появление посредника-лидера приводит к снижению общественного благосостояния, по сравнению с обычной конкуренцией по Дикситу-Стиглицу без посредника, и, если да, то насколько?
- Какое поведение посредника хуже: близорукое (миопическое) или, наоборот, стратегическое?
- Какие рекомендации для общественного регулирования в этой сфере следует предложить (и следует ли)?

В данной работе рассмотрены случаи квазилинейной и квадратичной функций полезности, отвечающей линейному спросу с перекрестными эффектами, как в популярном с недавнего времени подходе Оттавиано, Табучи и Тисса [14] (к ритейлингу пока не применявшемся).

При формальном анализе модели оказалось, что при достаточно реалистичных предположениях концентрация рынка *повышает* общественное благосостояние, в противоположность расхожим представлениям. Более того, если государственное регулирование ритейлера-монопсониста осуществляется через налогообложение Пиговианского типа, то оказывается, что (с точки зрения общественного благосостояния) требуется *субсидировать* ритейлера, а не облагать его налогом. Содержательно, суть этого положительного эффекта от концентрации близка к известному для не-диверсифицированных товаров положительного эффекта от вертикальной интергграции монополизированной отрасли. Там объединение производителя и ритейлера устраняло так называемую “неэффективность двойной маржинализации”

[1] Такой тип взаимодействия близок в некотором смысле концепции “common agency”, рассматриваемой в теории контрактов (см., например, [4]).

(двух-этажную монополию которая хуже простой). Здесь рыночная власть ритейлера выполняет нечто подобное косвенным путем: в качестве лидера, присваивающего значительную часть пользы, он заботится обо всем рынке и снижает чистые потери свои и общества.

В разделе 2 приведен литературный обзор. В разделе 3 приведена формулировка модели и даны определения равновесий при различной организации отрасли. В разделе 4 находятся и сравниваются равновесия, получающиеся при разных типах конкуренции. Раздел 5 посвящен вопросам государственного регулирования ритейлинга.

2. Литературный обзор

Существует много работ, изучающих различные аспекты вертикального взаимодействия производителей и ритейлера (см. обзоры в книгах Пэрри [15] и Рэя [18]), в основном они изучают различные экономические последствия такого взаимодействия. Ранняя классическая работа Спенглера [20] изучает простейший случай игры Штакельберга между двумя монополистами, "лидер-ведомый", что приводит к "двойной наценке" ("double marginalization"). По существу, второй монополист добавляет свою собственную надбавку к монополистической цене первого монополиста, уменьшая тем самым общественное благосостояние (см. Тироль [21]). Многие последующие работы посвящены (естественным и реалистичным) ослаблениям предположений Спенглера об однородности товара, одном производителе и одном ритейлере. Основное отличие этих работ друг от друга состоит главным образом в разном способе представления взаимодействия олигополистов. Один класс моделей представляет взаимодействие в духе пространственных моделей по типу Хотеллинга (см. [11]). Другой класс моделей основывается на модели Диксита-Стиглица [8] с "репрезентативным потребителем". Среди пространственных моделей отправной точкой можно считать работу Салопа [19], в которой исследуется модель кругового города с одним производителем и несколькими ритейлерами, распределенными в этом городе для удовлетворения спроса непрерывно размещенного населения. Основным результатом является: при достаточно слабых предположениях все потребители обслуживаются и исчезает неэффективность, обнаруженная Спенглером. Поэтому не существует побудительных мотивов (с точки зрения общественного благосостояния) для интеграции между производителем и ритейлерами. Далее, Диксит [7] модифицировал эту модель, включив в рассмотрение производственную активность “ритейлеров”, которые используют также и другие производственные факторы. Теперь уже, с точки зрения общественного благосостояния, имеется причина для интеграции, поскольку она снижает неэффективно большое число ритейлеров-производителей и повышает общественное благосостояние (в дальнейшем эти идеи были развиты в работе Матьюсона и Винтера [13]).

Другой подход основан на идее репрезентативного потребителя в стиле Диксита-Стиглица. В частности, Пэрри и Гроф [16] используют функцию полезности с постоянной эластичностью замещения (CES-функцию), определенную на дискретном множестве разновидностей блага, каждая из которых производится единственным ритейлером. Основной результат состоит в следующем: такая конкуренция дает как искаженные (с точки зрения совершенной конкуренции) цены, так и искаженное число ритейлеров. Интересно отметить, что интеграция двух стадий производства ведет к ухудшению общественного благосостояния, поскольку снижение товарного разнообразия оказывается весомее снижения цен. Здесь, как и в Диксnúmовой модели кругового города, ритейлеры являются также производителями “на низком уровне”, “перерабатывая” товары, поскольку иначе покупка потребителем товаров у *всех* ритейлеров выглядела бы странной. Следующим шагом в этом направлении можно считать работу Чена [5], в которой рассматривается ситуация, когда производитель-монополист, производящий все многообразие продуктов, на первой стадии выбирает число наименований производимых продуктов (а значит и число ритейлеров, поскольку сохраняется взаимно-однозначное соответствие между разнообразием товаров и ритейлерами). После этого монополист осуществляет некоторую переговорную процедуру с каждым из ритейлеров. В результате количество дифференцированных продуктов оказывается меньше “социально оптимального”; кроме того, конкуренция среди ритейлеров снижает потребительскую цену и усиливает искажение в товарном разнообразии.

Наконец, Хамильтон и Ричардс [10] синтезируют модели типа Хотеллинга и типа Диксита-Стиглица, т.е. подходы пространственного рынка и дифференцированных товаров при моделировании олигополистической конкуренции среди многопродуктовых фирм — "супермаркетов", которые имеют дело с конкурирующими производителями. В модели рассматривается два вида товарных разнообразий. С одной стороны, осуществляется выбор среди потенциально большого числа пространственно-разделенных супермаркетов, и, кроме того, потребитель осуществляет свой выбор среди продуктов, представленных в выбранном им супермаркете. Оказалось, что в случае узкоспециализирующегося ритейлера возрастание продуктовой дифференциации со стороны производителей необязательно ведет к росту равновесной длины продуктовой линейки. Кроме того, при условии свободы входа для ритейлера, продуктовое разнообразие оказывается меньше общественно оптимального.

В отличии от вышеизложенных исследований, мы рассматриваем монополиста в качестве ритейлера; что касается производителей, то они организованы в отрасль по типу модели Диксита-Стиглица. Для "оправдания" такого необычного (по крайней мере, на первый взгляд) подхода, отметим, что такая или схожая ситуация является довольно типичной для сегодняшнего российского рынка. По крайней мере, имеется много свидетельств того, что современные супермаркеты и гипермаркеты имеют доминирующую рыночную власть (переговорную силу) в отношениях с многочисленными производителями.

Например, в [1] читаем: " ... у небольших поставщиков расходы на оплату одних только базовых услуг должны съедать большую часть прибыли... Многим поставщикам навязывают участие во внутренних промоакциях, вне зависимости от того, нужна им сейчас реклама или нет... Подавляющее большинство ритейлеров взимают не только плату за полки, но и так называемый ретробонус, он же процент с продаж... когда проводятся взаиморасчеты между поставщиками и розничными сетями, последние берут себе в среднем 5% ... Еще одна ловушка, подстерегающая поставщика, — обязательство обеспечить некий уровень продаж, ниже которого опускаться строго-настрого запрещено. Если товар по каким-то причинам не пойдет, разницу между планом и фактическими продажами придется покрывать из своего кармана... в результате общие выплаты ритейлерам составляют от 30 до 50% стоимости их продукции."

Аналогично, в [2] можно прочитать: “Ритейлеры требуют с поставщиков десятки тысяч долларов только за согласие торговать их товаром... Цена “входного билета” зависит от известности производителя и объема его рекламного бюджета, признаются поставщики. Например, для крупных компаний ритейлеры могут сделать скидку в расчете на то, что компания потратится на промоакции товара... Билет за вход — еще не все расходы поставщика, желающего попасть в сеть. Общие платежи ритейлерам могут составлять до 35% стоимости продукции...”[2]

Другая важная цитата может быть найдена, например, на сайте Федеральной Антимонопольной Службы [9]: “Трансформация розничной торговли в большие торговые сети (ритейлеры) позволила последним, несмотря на их кажущуюся малую долю на рынке, диктовать правила игры и определять условия входа в сеть для поставщиков и производителей.”

Такая рыночная сила ритейлеров в России неудивительна. Дефицит торгового оборудования искусственно усугубляется значительной коррупцией при выделении земли и, возможно, лицензировании магазинов.

Не следует думать, что такая ситуация уникальна только для России. Аналогичное происходит, например, в странах Восточной Европы, что показывает, например следующая цитата с сайта Антимонопольного Офиса Республики Словакия [17]: “Используя существующую структуру индивидуальных локальных рынков, высокие входные барьеры (значительные прямые и принудительные инвестиции, невозвратимые издержки, обусловленные требуемой рекламной и маркетинговой поддержкой при входе на рынок, административные входные барьеры, необходимые для входа на рынок затраты времени, и т.д.), насыщение важных индивидуальных рынков, а также отсутствие потенциальных конкурентов, если концентрация уже осуществлена, компания Tesco plc установила или усилила свое домини-

---

[2] В той же статье отмечается, что "... уплата бонусов за вход в торговые сети — международная практика ... Действительно, за границей такие сборы встречаются, но в меньших масштабах. Германии за размещение товара в магазине платят небольшие поставщики ... в магазинах Великобритании схема “деньги за размещение” вообще не принята ... Но ритейлер и поставщик могут совместно продвигать товар...”

рующее положение. Таким образом, компания Tesco plc. не испытывает существенной конкуренции и, используя свою экономическую силу, может действовать независимо по отношению к поставщикам, потребителям и конкурентам.” Словацкий случай также не является уникальным, см., например, случай Чили [12].

3. Модель

Рассматривается модель монополистической конкуренции, модифицированная введением двух-уровнего взаимодействия “производитель – ритейлер – потребитель”.

Приступим к описанию модели. Пусть в экономике присутствует совокупный репрезентативный потребитель, имеющий 1 единицу труда, предоставляемую на рынок неэластично, причем труд является единственным фактором производства. Кроме того, пусть в экономике присутствует два типа продуктов. Первое “благо” представляет собой некоторое разнообразие (например, молоко разных марок). Второе благо – это агрегированные прочие продукты (производящиеся в условиях совершенной конкуренции), так называемый numéraire. В общем виде квазилинейная функция полезности потребителя, заданный над потреблением двух благ, имеет вид

$$U(\mathbf{q}, N, A) = V(\mathbf{q}, N) + A.$$

Здесь N – это длина продуктовой линии, отражающая диапазон (интервал) разнообразия; $q(i) \geq 0$ – это “количество” или потребление i-го разнообразия, выбранного агентом (потребителем), $\mathbf{q} = (q(i))_{i \in [0,N]}$ – это бесконечно-мерный вектор или функция $q(\cdot) : [0, N] \to R$ заданная на всем **профиле** разнообразий; в дальнейшем все профили обозначаются жирным шрифтом. Переменная $A \geq 0$ – это потребление агрегированных прочих продуктов (numéraire). Отметим, что мы используем общую функцию V только чтобы сформулировать концепции равновесий, в дальнейшем будем изучать только ее специальный случай: квадратичную полезность (соответствующую линейному спросу), введенную в работе Оттавиано, Табучи и Тисс [14] и получившую популярность в многочисленных исследованиях (см. также [6]):

$$U = \alpha \int_0^N q(i)di - \frac{\beta - \gamma}{2} \int_0^N [q(i)]^2 \, di - \frac{\gamma}{2} \left[\int_0^N q(i)di \right]^2 + A.$$

Здесь α, β и γ – это некоторые положительные параметры. Предполагается, что $\beta > \gamma > 0$, это гарантирует квазивогнутость функции U.

Главная особенность этой конструкции из трех слагаемых состоит в том, что эта полезность порождает систему линейных спросов для каждой разновидности блага, а тем самым линейный спрос для всей дифференцированной отрасли, сохраняя простор для стратегического взаимодействия (так как $\gamma > 0$).

Запишем в общем виде задачу максимизации полезности репрезентативного потребителя. Пусть $\breve{p}(i)$ означает цену разнообразия i для потребителя (равную оптовой цене $p(i)$, если нет ритейлера), $w \equiv 1$ – это ставка заработной платы в экономике, P_A – это цена прочих продуктов (numéraire), также равная 1 в равновесии. В этих обозначениях потребитель решает следующую задачу:

$$U(q, N, A) = V\,(q, N) + A \to \max_{(q,A)}$$

$$\int_0^N \breve{p}(i) q(i) di + P_A A \le w + \int_0^N \pi_{\mathcal{M}}(i) di + \pi_{\mathcal{R}},$$

где $\pi_{\mathcal{M}}(i)$ есть прибыль i-го производителя, а $\pi_{\mathcal{R}}$ – это прибыль ритейлера.

Бюджетное ограничение этого агрегированного потребителя имеет естественную интерпретацию. Его правая часть является ВВП экономики, подсчитанным по доходам, а левая часть представляет его же ВВП, но подсчитанная по расходам. Будем предполагать, что доход достаточно велик, тем самым он не влияет на спрос в диверсифицированном секторе.[3]

Таким образом, для любого ценового профиля $\mathbf{p} : [0, N] \mapsto R_+$, профиль индивидуальной функции спроса $\mathbf{q}^*$ для всех разнообразий определяется следующим образом (каждый “профиль” является некоторой функцией, зависящей от разнообразий $i \in [0, N]$, причем эти профили обозначены жирными буквами $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, в отличие от опре-

[3]В противоположном случае, когда доход мал, возможно граничное решение: весь доход потребителя тратится на диверсифицированные продукты. Мы, следуя традиции, игнорируем этот случай, но предполагаем выполненными некоторые ограничения, гарантирующие отсутствие эффекта дохода.

деленных точек $\breve{p}(i), q(i)$ этих профилей):

$$\mathbf{q}^*(N, \mathbf{p}) = \arg\max_{\mathbf{q}} \left[V(\mathbf{q}, N) - \int_0^N \breve{p}(i) q(i) di \right]. \tag{3.1}$$

Из условий первого порядка мы можем найти обратную функцию спроса $p(i, q(i), N, \mathbf{p}_{-i})$ для каждой разновидности блага i. Эта функция p описывает, как цена i-ой разновидности зависит от количества покупаемого блага $q(i)$ и от экзогенных параметров: количества конкурентов (N) и ценового профиля $\mathbf{p}_{-i}$, содержащего все цены, за исключением i-ой.

3.1. Рынок без ритейлера

Рассмотрим базовую ситуацию, когда производители (число которых очень велико) продают свои товары *напрямую* потребителям.

Нормализуем зарплату к единице. Не уменьшая общности можно предполагать, что единица не-дифференцированного товара (numéraire) производится из единицы труда. В силу этой нормализации и условия равновесия на рынке товара numéraire, его цена в равновесии также окажется равной единице: $P_A = w = 1$.

Будем предполагать, что издержки выражены в единицах труда. Тогда издержки в стоимостном выражении с учетом нормализации примут вид

$$C(q) = (c + c_{\mathcal{M}})q + F + F_{\mathcal{M}},$$

где c – это количество единиц труда, требуемое для производства единицы дифференцированного продукта каждого вида; $c_{\mathcal{M}}$ – это количество единиц труда, требуемое для продажи единицы дифференцированного продукта каждого вида; F – это постоянные издержки, в единицах труда, необходимые каждому производителю для начала производства, а $F_{\mathcal{M}} > 0$ – это постоянные издержки, необходимые для начала продаж.[4]

Следуя традиции, мы предполагаем взаимно-однозначное соответствие: каждый продукт производится единственным производителем, и каждый производитель производит только один продукт.

---

[4]Здесь индекс $\mathcal{M}$ используется для Производителей, в то время как аналогичные торговые затраты для ритейлера будут обозначаться $c_{\mathcal{R}}, F_{\mathcal{R}}$; отметим также, что c, F без индекса относится к производству.

В силу сделанных предположений, задача максимизации прибыли для i-го производителя выглядит следующим образом:

$$\pi_{\mathcal{M}}(i) = p(i, q(i), N, \mathbf{p}_{-i})q(i) - C(q(i)) \ \rightarrow \ \max_{q(i)}, \tag{3.2}$$

где $p(i, q(i), N, \mathbf{p}_{-i})$ – это определенный выше обратный спрос на i–е разнообразие, т.е. желание потребителя платить за i–е разнообразие при прочих ценах, равных $\mathbf{p}_{-i}$.

Мы также предполагаем свободу входа на рынок дифференцированных продуктов, т.е. производители входят на рынок до тех пор, пока прибыли на рынке остаются положительными.

Функция благосостояния W в этой ситуации записывается следующим образом:

$$W = V(\mathbf{q}, N) - \int_0^N (c + c_{\mathcal{M}})q(i)di - \int_0^N (F + F_{\mathcal{M}})di.$$

3.2. Рынок с ритейлером

Рассмотрим теперь ситуацию, когда производители продают свою продукцию только через монополиста-посредника. Задача репрезентативного потребителя остается той же, но теперь конечная цена i-го продукта вычисляется как сумма $\breve{p}(i) = p_{\mathcal{R}}(i) + r(i)$ оптовой цены $p_{\mathcal{R}}(i)$ и *торговой надбавки* ритейлера $r(i)$, или *ценовой маржи* (мы будем использовать оба этих термина).

Функция издержек каждого производителя, в отличии от случая рынка без ритейлера, имеет следующий вид, не содержащий торговые издержки:

$$C(q) = cq + F.$$

Следовательно, задача i-го производителя имеет вид

$$\pi_{\mathcal{M}}(i) = p(i)q(i, \mathbf{p} + \mathbf{r}) - C(q(i, \mathbf{p} + \mathbf{r})) \ \rightarrow \ \max_{p(i)},$$

где $\mathbf{p}$ – это профиль оптовой цены, а $\mathbf{p} + \mathbf{r}$ – это розничные цены (т.е. цены ритейлера, цены для потребителей); таким образом, $\mathbf{r}$ – это профиль торговой надбавки. Как и ранее, свобода входа снижает прибыли до нуля.

Обратимся теперь к ритейлеру-монопсонисту. Его функция издержек аналогична функции издержек производителей:

$$C_{\mathcal{R}}(q) = \int_0^N p(i)q(i)di + \int_0^N c_{\mathcal{R}}q(i)di + \int_0^N F_{\mathcal{R}}di\ .$$

Здесь первый интеграл представляет собой затраты на покупку товаров у производителей, а второе и третье слагаемые представляют торговые издержки: $c_{\mathcal{R}}$ – это количество единиц труда, требуемое ритейлеру для продажи единицы дифференцированного продукта; $F_{\mathcal{R}}$ – это фиксированные издержки ритейлера (также измеренные в единицах труда), требуемые для начала продажи некоторого дифференцированного продукта.[5] Теперь задача максимизации прибыли ритейлера имеет вид:

$$\pi_{\mathcal{R}} = \int_0^N [r(i) - c_{\mathcal{R}}]q(i, \mathbf{p}+\mathbf{r})di - \int_0^N F_{\mathcal{R}}di \ \rightarrow\ \max_{\mathbf{r}},$$

где $r(i) = p_{\mathcal{R}}(i) - p(i)$ – это торговая надбавка на i-е торговое разнообразие.

Для ситуаций с ритейлером рассмотрим следующие три типа тайминга, или, что эквивалентно, три типа взаимодействия "лидер-ведомый" между производителями и ритейлером:

- Лидерство ритейлера, т.е. монополистическая конкуренция со стратегическим поведением ритейлера:[6]

---

[5]Это довольно правдоподобное предположение, поскольку каждый товар, независимо от объема продаж, требует упаковки и других единовременных затрат. Кроме того, с экономической точки зрения представляется оправданным предполагать, что издержки ритейлера по продаже ниже, чем издержки производителей по продаже: $c_{\mathcal{R}} \leq c_{\mathcal{M}}$ и $F_{\mathcal{R}} \leq F_{\mathcal{M}}$.

[6]Заметим, что помимо наличия ритейлера, другое отличие от стандартной монополистической конкуренции состоит в том, что равновесное число фирм *выбирается* ритейлером, а не условием свободы входа. Это предположение представляется правдоподобным, что подтверждается, например, словами [3] владельца одной из ритейлинговых сетей о политике выбора товарного разнообразия: "...для сухарной продукции ... у сети предусмотрено ограниченное число поставщиков, поскольку "увеличение количества брендов в подобных товарных группах не приводит к росту продаж в целом".

  - сначала ритейлер выбирает торговую надбавку и масштаб товарного разнообразия, правильно предвидя последующий ответ производителей;
  - затем каждый производитель выбирает, входить на рынок или нет, а также оптовую цену;

- Лидерство производителей, т.е. монополистическая конкуренция со стратегическим поведением производителей:[7]

  - сначала все производители одновременно выбирают, входить на рынок или нет, а также оптовые цены (количество фирм определяется условием свободы входа, т.е. "занулением" прибыли), правильно предвидя индивидуально скорректированную функцию торговой надбавки;
  - затем ритейлер выбирает торговую надбавку для каждого товара (каждого производителя);

- Равновесие по Нэшу, когда производители и ритейлер определяют $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ одновременно и миопически (близоруко).[8]

Опишем формально эти четыре концепции в (наиболее естественном) симметричном случае.

Определения. 1) *Симметричным NR-равновесием* называется такая тройка $(p^{NR}, q^{NR}, N^{NR}) \in R^3_+$, что соответствующий ценовой профиль $\mathbf{p} = p(i) \equiv p^{NR}$ дает решение задачи каждого производителя при внешних параметрах $N^{NR}, \mathbf{p}_{-i} \equiv p^{NR}$, при этом $q(i) \equiv q^{NR}$ является решением задачи потребителя при $N^{NR}, \mathbf{p} \equiv p^{NR}$, а N^{NR} удовлетворяет условию свободы входа.

2) *Симметричным равновесием по Нэшу* называется такая четверка $(p^{Nash}, r^{Nash}, q^{Nash}, N^{Nash}) \in R^4_+$, что соответствующий ценовой

---

[7] Хотя это и не столь реалистично, как в предыдущем случае, предположение о "мудрых" производителях может быть правдоподобной аппроксимацией реальности.

[8] Нэшевский вариант взаимодействия кажется менее реалистичным, чем два случая "с лидерством"– дальновидным поведением. Но взаимодействие по Нэшу может быть интересным как отправная точка для сравнения и оценивания доходов и потерь участников при стратегическом поведении.

профиль $\mathbf{p} = p(i) \equiv p^{Nash}$ дает решение задачи каждого производителя при внешних параметрах $N^{Nash}, \mathbf{p}_{-i} \equiv p^{Nash}$, торговая надбавка r^{Nash} максимизирует прибыль производителя при p^{Nash}, N^{Nash}, при этом $q(i) \equiv q^{Nash}$ является решением задачи потребителя при $N^{Nash}, \mathbf{p} \equiv p^{Nash}$ а N^{Nash} удовлетворяет условию свободы входа.

3) *Симметричным RL-равновесием* (равновесием при лидерстве ритейлера) называется такая четверка $(p^{RL}, r^{RL}, q^{RL}, N^{RL}) \in R^4_+$, что соответствующая ценовая функция $\rho(i, r, \mathbf{p}_{-i}, N^{RL})$ описывает оптимальный ответ каждого производителя на внешнюю торговую надбавку r и параметры $N^{RL}, \mathbf{p}_{-i} \equiv p^{RL}$, при этом торговая надбавка r^{RL} и число разнообразий N^{RL} максимизируют прибыль ритейлера с такой функцией ρ, $p^{RL} = \rho(i, r^{RL}, p^{RL}, N^{RL})$, а $q(i) \equiv q^{RL}$ является решением задачи потребителя при $N^{RL}, \mathbf{p} \equiv p^{RL}$.

4) *Симметричным ML-равновесием* (равновесием при лидерстве производителей) называется такая четверка $(p^{ML}, r^{ML}, q^{ML}, N^{ML}) \in R^4_+$, что соответствующая функция торговой надбавки $\mu(i, p(i), \mathbf{p}_{-i}, N^{ML})$ описывает оптимальный ответ ритейлера на i-ую цену $p(i)$ и параметры $N^{ML}, \mathbf{p}_{-i} \equiv p^{ML}$, при этом цена p^{ML} максимизирует прибыль производителей с такой функцией μ, $r^{ML} = \mu(i, p^{ML}, p^{ML}, N^{ML})$, причем $q(i) \equiv q^{ML}$ является решением задачи потребителя при $N^{ML}, \mathbf{p} \equiv p^{ML}$, а N^{ML} удовлетворяет условию свободы входа.

Для сравнения этих концепций равновесий, запишем следующую функцию общественного благосостояния, аналогичную предыдущей (см. случай рынка без ритейлера), но с модифицированными торговыми издержками:

$$W = V(\mathbf{q}, N) - \int_0^N (c + c_{\mathcal{R}}) q(i) di - \int_0^N (F + F_{\mathcal{R}}) di.$$

Симметричные решения q^{MaxW}, N^{MaxW}, максимизирующие эту функцию, называются *общественно-оптимальным количеством* и *общественно-оптимальным числом разновидностей.*

4. Анализ равновесий

Для введенной квадратичной функции полезности задача репрезентативного потребителя записывается следующим образом:[9]

$$\alpha \int_0^N q(i)di - \frac{\beta-\gamma}{2} \int_0^N [q(i)]^2\, di - \frac{\gamma}{2} \left[\int_0^N q(i)di \right]^2 + A \to \max_{\mathbf{q}\geq 0}$$

$$\int_0^N p_{\mathcal{R}}(i) q(i) di + A \leq L + \int_0^N \pi_{\mathcal{M}}(i) di + \pi_{\mathcal{R}}\ .$$

Из условий первого порядка легко получить обратную функцию спроса

$$p(i) + r(i) = \alpha - (\beta-\gamma) q(i) - \gamma \int_0^N q(j)dj\ , \quad i \in [0, N], \qquad (4.1)$$

а также прямую функцию спроса на каждую разновидность блага $i \in [0, N]$:

$$q(i) = a - (b + gN)[p(i) + r(i)] + gP, \qquad (4.2)$$

где коэффициенты a, b, c определяются как

$$a = \frac{\alpha}{\beta + (N-1)\gamma}\ , \quad b = \frac{1}{\beta + (N-1)\gamma}\ , \quad g = \frac{\gamma}{(\beta-\gamma)[\beta + (N-1)\gamma]},$$

а P – это индекс цен

$$P = \int_0^N [p(j) + r(j)]dj,$$

который выражает *агрегированное* ценовое поведение всех фирм и на который отдельная фирма i влияет ничтожно мало. В симметричном равновесии $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ оба вышеприведенных интеграла упрощаются следующим образом:

$$\int_0^N q(j)dj = N\bar{q}, \ \ P = N(\bar{p} + \bar{r}).$$

---

[9] Напоминаем, что мы рассматриваем только ситуацию, когда доход достаточно большой.

Используя полученную систему выражений спроса, мы вычислим и сравним следующие четыре определенных выше вида равновесий:

– равновесие на рынке без ритейлера (no-retailer: NR);

– равновесие по Нэшу ($Nash$);

– стратегическое поведение ритейлера-лидера (RL);

– стратегическое потребление производителей-лидеров (ML).

Кроме того, для рынка с ритейлером мы можем вычислить

– общественно-оптимальное количество и общественно-оптимальное разнообразие ($MaxW$).

Все эти равновесия можно найти в явном виде. Решение для $MaxW$ находится непосредственно из условия первого порядка. Метод вычисления равновесий NR и $Nash$ также довольно обычен: система условий первого порядка для каждого участника дополняется условием свободы входа. В результате решение этой системы мы находим равновесие. Для нахождения равновесия ML, сначала необходимо вычислить функцию торговой надбавки $r_i(p(i), P, N)$, являющуюся откликом ритейлера на цену $p(i)$ (здесь P, N предполагаются данными); затем находим цены производителей, максимизирующие их прибыли при данной функции торговой надбавки; наконец, добавляя условие свободы входа, находим равновесие в ситуации ML.

Более сложным является вычисление равновесия RL. Здесь, при данном спросе $q(i, r(i), N, P)$, оптимальная ценовая политика является решением следующей задачи:

$$\pi_{\mathcal{R}} = \int_0^N [r(i) - c_{\mathcal{R}}]q(i, \mathbf{p}^*(\mathbf{r},N) + \mathbf{r})di - \int_0^N F_{\mathcal{R}} di \ \rightarrow \ \max_{\mathbf{r},N},$$

$$\pi_{\mathcal{M}}(p^*(i, r(i), N, P), r(i),N) \geq 0 \ .$$

Если (что вполне оправданно) рассматривать только симметричные равновесные переменные $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ (черта сверху обозначает симметризацию, в частности, $\bar{p}^*(\bar{r},N) = p^*(i, \bar{r}, N, N\bar{p}) \ \forall i$), то эта задача ритейлера упрощается следующим образом:[10]

$$\pi_{\mathcal{R}} = N[\bar{r} - c_{\mathcal{R}}]\bar{q}(\bar{p}^*(\bar{r},N)+\bar{r}) - NF_{\mathcal{R}} \ \rightarrow \ \max_{\bar{r},N},$$

$$\pi_{\mathcal{M}}(\bar{p}^*(\bar{r},N),\bar{r}, N) \geq 0 \ .$$

---

[10]Решая задачу в общем виде, мы установили, что возникают только симметричные решения.

Строго говоря, здесь мы отступаем от модели монополистической конкуренции, поскольку теперь N необязательно определяется условием свободы входа.

Более точно, оказалось, что возможно два типа решений, или режимов, которые мы называем *искусственно ограниченный рынок* и *неограниченный рынок*. Первый случай означает, что условие неотрицательности прибыли оказывается неактивным (не выходящим на равенство), т.е. безусловная оптимизация функции $\pi_{\mathcal{R}}$ приводит к положительной прибыли производителей $\pi_{\mathcal{M}} > 0$. В этом случае ритейлер игнорирует условие "свободы входа", заменяя его своим собственным ограничением на вход (поэтому при вычислениях мы также игнорируем свободу входа). Во втором случае ритейлер сначала использует условие "свободы входа" для вычисления $N(\bar{r})$ как функции от $\bar{r}$, затем максимизирует свою прибыль относительно $\bar{r}$. Оказывается, что *искусственно ограниченное* решение имеет место в том и только в том случае, когда некоторая критическая константа превышает единицу:

$$\mathcal{F} = \frac{F_{\mathcal{R}}}{2F} \geq 1.$$

Таким образом, мы можем сформулировать следующее.

Утверждение 1. *Ритейлеру выгодно искусственно ограничивать вход, если его фиксированные издержки по крайней мере в два раза превышают фиксированные издержки каждого производителя.*

Эта константа $\mathcal{F}$, обозначающая *отношение* фиксированных затрат ритейлера и производителей, играет в дальнейшем важную роль.

Для того, чтобы в сжатом виде сформулировать характеризацию всех наших решений, введем следующие вспомогательные обозначения (экономическая интерпретация некоторых из них будет приведена в специальном параграфе):

$$\beta_{-\gamma} = \beta - \gamma,\ q_{NE} = \sqrt{\frac{F}{\beta_{-\gamma}}},\ \mathcal{F} = \frac{F_{\mathcal{R}}}{2F},\ \tilde{D} = \sqrt{\beta_{-\gamma}} \cdot \frac{\alpha - c - c_{\mathcal{R}}}{\sqrt{F}} = \frac{\alpha - c - c_{\mathcal{R}}}{q_{NE}}.$$

Используя эти обозначения и опуская промежуточные вычисления, приведем в следующей таблице формулы, выражающие равновесия через экзогенные параметры. Типы конкуренции (концепции равновесий) показаны в строках, равновесные значения переменных приведены в столбцах, в отдельном столбце приведены оптимальные значения функции благосостояния W, а случай NR характеризуется в Приложении.[11]

	объем q	цена p	надбавка r	разнообразие N
Nash (NE)	q_{NE}	$c+q_{NE}\cdot\beta_{-\gamma}$	$c_{\mathcal{R}} + q_{NE}\dfrac{\tilde{D}-\beta_{-\gamma}}{2}$	$\dfrac{1}{2\gamma}\cdot\left(\tilde{D}-3\beta_{-\gamma}\right)$
ML	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot q_{NE}$	$c+q_{NE}\cdot\sqrt{2}\cdot\beta_{-\gamma}$	$c_{\mathcal{R}} + q_{NE}\dfrac{\tilde{D}-\beta_{-\gamma}\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\tilde{D}-2\sqrt{2}\beta_{-\gamma}}{\sqrt{2}\gamma}$
RL, $\mathcal{F}>1$	$q_{NE}\cdot\sqrt{\mathcal{F}}$	$c + q_{NE}\cdot\beta_{-\gamma}\sqrt{\mathcal{F}}$	$c_{\mathcal{R}}+q_{NE}\dfrac{\tilde{D}}{2}$	$\dfrac{\dfrac{\tilde{D}}{\sqrt{\mathcal{F}}}-4\beta_{-\gamma}}{2\gamma}$
RL, $\mathcal{F}\leq 1$	q_{NE}	$c+q_{NE}\cdot\beta_{-\gamma}$	$c_{\mathcal{R}} + q_{NE}\cdot\left(\frac{\tilde{D}}{2}+\beta_{-\gamma}\mathcal{F}-\beta_{-\gamma}\right)$	$\dfrac{\tilde{D}-2\beta_{-\gamma}\mathcal{F}-2\beta_{-\gamma}}{2\gamma}$
$MaxW$	$q_{NE}\sqrt{2+4\mathcal{F}}$	–	–	$\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\tilde{D}}{\sqrt{2(1+2\mathcal{F})}}-\beta_{-\gamma}\right]$

	благосостояние W
NE	$\left(\tilde{D}-3\beta_{-\gamma}\right)\left[\dfrac{3}{4}\cdot(\tilde{D}/\beta_{-\gamma}-1)-2\mathcal{F}\right]\cdot\frac{F}{2\cdot\gamma}$
ML	$\left(\tilde{D}-2\sqrt{2}\beta_{-\gamma}\right)\cdot\left[\dfrac{3}{4}\cdot(\tilde{D}/\beta_{-\gamma}-\sqrt{2})-2\sqrt{2}\cdot\mathcal{F}\right]\cdot\frac{F}{2\cdot\gamma}$
$RL, \mathcal{F}\geq 1$	$\left(\tilde{D}-4\sqrt{\mathcal{F}}\beta_{-\gamma}\right)\cdot\left[\dfrac{3}{4}\cdot\left(\tilde{D}/\beta_{-\gamma}-2\sqrt{\mathcal{F}}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}}\right]\cdot\frac{F}{2\cdot\gamma}$
$RL, \mathcal{F}\leq 1$	$\left(\tilde{D}-2\mathcal{F}\beta_{-\gamma}-2\beta_{-\gamma}\right)\cdot\left[\dfrac{3}{4}\cdot\left(\tilde{D}/\beta_{-\gamma}-2\mathcal{F}\right)-1\right]\cdot\frac{F}{2\cdot\gamma}$
$MaxW$	$\left[\tilde{D}-\sqrt{2(1+2\mathcal{F})}\beta_{-\gamma}\right]^2\cdot\frac{F}{2\cdot\gamma\beta_{-\gamma}}$

Совокупный объем потребления $Q=qN$ также может быть легко найден из приведенных выражений для q, N.

Прежде чем сравнить полученные равновесия, обсудим интерпретацию введенных параметров.

---

[11] Конечно, ситуации $\mathcal{F}\geq 1, \mathcal{F}\leq 1$ совпадают при $\mathcal{F}=1$.

4.1. Экономический смысл параметров $\mathcal{F}$, q_{NE} и $\tilde{D}$

Здесь мы обсудим интерпретацию параметров рынка оказавшихся важными в наших выводах, начав с константы

$$\mathcal{F} = \frac{F_{\mathcal{R}}}{2F} \ ,$$

имеющей смысл "превышения ритейлинговых фиксированных затрат над производственными затратами". Если бы мы могли "калибровать" этот параметр: больше он или меньше единицы в реальности, то предсказания нашей модели стали бы определеннее. К сожалению, это непросто, но мы приведем наводящие рассуждения к такой калибровке.

Обе используемые в модели величины $F_{\mathcal{R}}, F$ издержек относятся ко всему продаваемому объему каждой разновидности товара. Поэтому каждую из них можно попробовать оценить как долю фиксированных затрат в цене отдельно взятой разновидности товара. Согласно имеющимся у нас (весьма схематичным) данным о розничных ценах на пищевые продукты в России, торговая надбавка ритейлера обычно равна от 20% до 40%, в среднем примерно 25% от конечной цены. Поэтому, если предположить схожую прибыльность (сходные 15-20%, благодаря свободе перетока капитала) и в производстве и ритейленге, то общая доля полных затрат $\tilde{c}$ производства в цене товара будет примерно в четыре раза выше доли $\tilde{c}_R$ полных затрат ритейлера: $\tilde{c} \approx 4\tilde{c}_R$. И те, и другие затраты могут быть разделены на фиксированную часть, т.е. $F/q(i)$, и переменные издержки, так что $\tilde{c} = c + F/q(i)$, $\tilde{c}_R = c_R + F_R/q(i)$. Может ли F_R быть больше чем F при $\tilde{c}/\tilde{c}_R \approx 4$?

На первый взгляд, для калибровки этих величин и в процессе производства и в ритейлинге нужно оценить фиксированные затраты через капитальные затраты (например, аренду помещений, которая в ритейлинге может превышать 50% затрат), и переменные издержки. Однако в долгосрочной перспективе капитал становится переменной величиной. Поэтому "фиксированными издержками", более-менее независящими от объемов производства, становятся главным образом реклама и интеллектуальный капитал компании, включающий затраты на главных специалистов, "аккумулирующих" знания. Эти издержки могут составлять менее 10% от общих издержек и их трудно выяснить через доступную статистику об издержках фирм. Неясно, является ли в ритейлинге эта доля затрат меньше или больше производственных. В нем “фиксированные издержки” на каждую разновидность товара мало зависимые от объема ритейлинга, складываются из затрат на разработку эксклюзивной упаковки для этой разновидности, затрат на переговоры с производителями, на заказ товара и на рекламную деятельность в магазине. В результате, продажа большего товарного разнообразия более “затратна”, при том же стоимостном объеме продаж. Для оценки таких величин потребовались бы специализированные опросы фирм и магазинов или эконометрические исследования реакций издержек на толчки спроса.

Развивая такую идею калибровки, заметим, что наша модель “фиксированные плюс линейные издержки” $F + cq$ является лишь *линеаризацией* некоторых реальных нелинейных функций издержек $C(q)$ и $C_R(q)$ поставщиков и ритейлеров. Соответственно, для хорошей аппроксимации реакций рынка мы не нуждаемся в получении информации от производителя о его постоянном капитале и рекламных затратах (реальных фиксированных издержках). Вместо этого нам нужна информация о его объеме производства $\bar{q}$, суммарных издержках и о предельных издержках (насколько увеличатся затраты от увеличения производства на 5-10%). Это дало бы точку $(\bar{q}, C(\bar{q}))$ линейной аппроксимации функции издержек и ее производной $C^{'}(\bar{q}) = c$. Тогда наш параметр “фиксированных издержек” F может быть вычислен как $F = C(\bar{q}) - \bar{q}C^{'}(\bar{q})$. Аналогично и для ритейлера.

Подводя итог обсуждению калибровки F, отметим: мы не в состоянии калибровать ее даже приблизительно, поэтому ниже анализируются все значения параметра $\mathcal{F}$, существенные для характера поведения в отрасли.

Переходя к обсуждению параметра $\tilde{D}$, рассмотрим параметр, $q_{NE} = \sqrt{F/\beta_{-\gamma}}$, который является объемом отдельного разнообразия в равновесии Нэша (некоторой отправной точки для других равновесий). Очевидно, что величина q_{NE} зависит только от производственных фиксированных издержек и склонности потребителя к товарному разнообразию, и не зависит от параметров ритейлинга. Чем выше фиксированные издержки, тем большее рыночное пространство (объем спроса) получает каждый производитель в равновесии, число же их уменьшается. Напротив, чем сильнее склонность к разнообразию $\beta_{-\gamma}$, тем меньше доля каждого производителя на рынке, что также представляется логичным, параметр хорошо интерпретируется (равновесия типа ML и RL ведут себя аналогично).

Собственно, эта величина q_{NE} введена для того, выразить смысл важного для равновесных исходов параметра

$$\tilde{D} = \sqrt{\beta_{-\gamma}} \frac{\alpha - c - c_{\mathcal{R}}}{\sqrt{F}} = \frac{\alpha - c - c_{\mathcal{R}}}{q_{NE}} \ .$$

В числителе стоит “интервал допустимых цен” в отрасли, т.е. “chocking price” α (верхняя границу готовности потребителя платить) минус предельные издержки на производство и ритейлинг $c + c_{\mathcal{R}}$. Если эта величина равна нулю, то отрасль не может существовать. Чем больше эта величина, тем больше максимально-возможное благосостояние, которое может быть разделено между игроками в игре и “чистыми потерями”.

Кроме того, можно также дать интерпретацию параметра $\tilde{D}$ в терминах уже полученного социально-эффективного объема $q^{MaxW} = q_{NE}\sqrt{2 + 4\mathcal{F}}$ и *минимально возможного объема* q^{Min}, который гарантирует неотрицательность прибылей ритейлера и каждого производителя. Величина q^{Min} находится из условия неотрицательности прибыли $(\alpha - c - c_{\mathcal{R}})q^{Min} - (F + F_{\mathcal{R}}) \geq 0$.

Итак, имеем

$$\tilde{D} = \beta_{-\gamma}\sqrt{\mathcal{F} + \frac{1}{2}} \cdot \frac{q^{MaxW}}{q^{Min}} \ .$$

Отсюда видно, что потенциал отрасли генерировать прибыль оказывает положительное влияние на $\tilde{D}$ (и поэтому, согласно приведенным результатам, на количество разновидностей N), но вместо ценового выражения $\alpha - c - c_{\mathcal{R}}$ этого потенциала здесь имеется количественное выражение $\dfrac{q^{MaxW}}{q^{Min}}$.

4.2. Влияние рыночной концентрации на благосостояние, объемы, цены и разнообразие

Теперь мы готовы сравнить результаты, полученные в результате вычисления различных типов равновесий. В этом разделе нас будет главным образом интересовать влияние на благосостояние “монополизации” рынка большими торговым сетями. В нашей модели это рассматривается как ситуация RL возникающая после концентрации рынка.

Но с чем ее сравнивать, какая модель (или концепция равновесия) лучше описывает ситуацию в России перед тем, как произошла концентрация в начале XXI века: NR, $Nash$ (NE) или ML? Конечно, ритейлеры существовали до возникновения торговых сетей, и каждый из них имел определенную степень *локальной* рыночной силы, например, в каком-нибудь городском районе. Поэтому, для наших рассмотрений и сравнений, мы отвергаем NR модель, которая предполагает совершенную конкуренцию ритейлеров. Для того чтобы выбрать между $Nash$ и ML моделями, мы пытаемся понять, имеют ли производители некоторую рыночную власть в переговорах с каждым ритейлером, или они миопически (близоруко) реагируют на появившуюся на рынке торговую надбавку r? Первая гипотеза представляется наиболее правдоподобной и является основной для нас. Тем не менее, мы рассматриваем также и вторую постановку. Отметим, что она не дает ничего принципиально нового, приводя к аналогичным выводам.

Основной трудностью при интерпретации этих сравнений является отождествление *единственного* ритейлера в обоих моделях ($Nash$ или ML) с *многими* ритейлерами в реальности. Если предположить, что локально рыночная сила остается примерно такой же после концентрации отрасли ритейлинга, то главное изменение должно быть в издержках. Возможно, в России торговые издержки не изменялись слишком сильно именно в силу концентрации собственности как таковой (оставим в стороне другие причины). Конечно, торговые сети экономили кое-что на единой бухгалтерской отчетности, единых специалистах по маркетингу и, особенно, едином снабжении. Мы предпочитаем игнорировать это изменение и предполагать, что функция торговых издержек $F_R + cq_R$ остается неизменной во время концентрации. Тому есть две причины. Во-первых, мы хотим аналитически отделить эффект рыночной концентрации от экономии, обусловленная ростом масштабов ритейлинга (положительного эффекта масштаба). Во-вторых, поскольку нами будет показано, что концентрация оказывает положительный эффект на благосостояние, то это наше заключение может только *усилиться*, если мы введем также в рассмотрение положительные эффекты масштаба.

4.2.1 Эффекты перехода от ML к RL

В дополнение к сделанным предположениям, мы также должны добавить к характеризации равновесий неравенства $N^{ML} \geq 0, N^{RL} \geq 0$, получив следующие условия на комбинации параметров $\mathcal{F}$ и $\tilde{D}/\beta_{-\gamma}$, гарантирующие непустоту рынка:

$$\begin{array}{rl} \tilde{D}/\beta_{-\gamma} \geq 4 \cdot \sqrt{\mathcal{F}}, & \text{если } \mathcal{F} \geq 1, \\ \tilde{D}/\beta_{-\gamma} \geq \max\{2 \cdot \sqrt{2},\ 2 \cdot (\mathcal{F}+1)\}, & \text{если } \mathcal{F} < 1. \end{array} \tag{4.3}$$

Теперь, при этих ограничениях, мы можем сформулировать главные результаты о рыночной концентрации, если ее моделировать как переход от режима ML к режиму RL.

Благосостояние. После несложных преобразований, получаем следующее

Утверждение 2. *Рыночная концентрация дает положительный эффект с точки зрения суммарного благосостояния общества, как в случае равновесий с ограничением входа, так и в противоположном случае.*[12]

Прокомментируем этот результат. На первый взгляд, рост благосостояния кажется контр-интуитивным. Обычно ожидаются социальные потери от рыночной концентрации. Именно такие “анти-трастовые” причины стоят за недавним (ноябрь 2009 года) внесением в Государственную Думу РФ нового закона, ограничивающего деятельность торговых сетей. Почему же может произойти рост благосостояния, а не ожидаемое падение?

Для ответа на этот вопрос мы сначала приведем общие причины, а затем изучим изменение объемов производства и числа разновидностей блага в результате концентрации. Вообще говоря, в теории отраслевых рынков известен результат, что двухуровневая монополия порождает бóльшую величину чистых потерь благосостояния,

[12]Равенство $W^{ML} = W^{RL}$ достигается только при весьма специфическом соотношении параметров: $\frac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} = 2\sqrt{2} \quad \mathcal{F} = \sqrt{2} - 1$.

чем простая монополия. Поэтому, когда двухуровневая монополия оказывается вертикально интегрированной через концентрацию собственности, это может быть выгодно обществу. В нашем случае нечто похожее происходит при горизонтальной концентрации, только изменения в количестве разновидностей усложняют картину. Действительно, когда лидер-производитель монополистически оптимизирует свою цену с учетом оптимального ответа ритейлера, то эта ситуация похожа на случай двухуровневой монополии. Наоборот, когда монопсонистический (и также монополистичекий) ритейлер получает существенную рыночную силу над производителями, это в каком-то смысле близко к вертикальной концентрации, поскольку передает принятие решения в *одни* руки. С этой общей точки зрения, рост благосостояния не является слишком удивительным. Мы, в сущности, распространили подобные идеи на малоисследованные отношения торговых посредников и производителей в отрасли с диверсифицированным товаром.

Теперь посмотрим на рыночную концентрацию более специфически: соответствует ли рост в объеме потребления, в числе разновидностей, или в прибылях[13] интересам общества?

Объемы, цены и товарное разнообразие. Путем несложных вычислений, найдем соотношения на параметры, которые могли бы объяснить рост благосостояния, а именно, проверить следующие неравенства:

$q^{ML} <_? q^{RL}$ (рост в потреблении каждой разновидности товара),

$Q^{ML} <_? Q^{RL}$ (рост в общем объеме потребления),

$p^{ML} + r^{ML} >_? p^{RL} + r^{RL}$ (снижение в розничных ценах),

$N^{ML} <_? N^{RL}$ (рост в разнообразии).

Используя опять условие непустоты рынка (4.3), получаем:

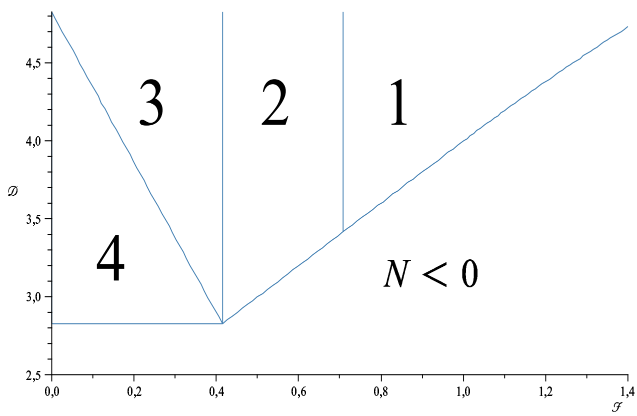
Утверждение 3. *При переходе от режима ML к режиму RL, цены,объемы и разнообразия изменяются следующим образом:*

[13]Напомним, что наш репрезентативный потребитель является собственником всех фирм.

Области параметров	Объемы	Розничные цены	Разнообразие
1. *Большой* $\mathcal{F} > \frac{\sqrt{2}}{2}$	$q^{ML} < q^{RL} < q^{MaxW}$ $Q^{RL} < Q^{ML} < Q^{MaxW}$	$p^{ML} + r^{ML} < p^{RL} + r^{RL}$	$N^{ML} > N^{RL}$
2. *Средний* $\sqrt{2} - 1 < \mathcal{F} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	$q^{ML} < q^{RL} < q^{MaxW}$ $Q^{RL} < Q^{ML} < Q^{MaxW}$	$p^{ML} + r^{ML} \geq p^{RL} + r^{RL}$	$N^{ML} > N^{RL}$
3. *Малый* $1 - \frac{\tilde{D}/\beta_{-\gamma}}{2+2\sqrt{2}} < \mathcal{F} \leq \sqrt{2} - 1$	$q^{ML} < q^{RL} < q^{MaxW}$ $Q^{ML} < Q^{RL} < Q^{MaxW}$	$p^{ML} + r^{ML} \geq p^{RL} + r^{RL}$	$N^{ML} > N^{RL}$
4. *Очень малый* $\mathcal{F} \leq \min\{\sqrt{2} - 1,\ 1 - \frac{\tilde{D}/\beta_{-\gamma}}{2+2\sqrt{2}}\}$	$q^{ML} < q^{RL} < q^{MaxW}$ $Q^{ML} < Q^{RL} < Q^{MaxW}$	$p^{ML} + r^{ML} \geq p^{RL} + r^{RL}$	$N^{ML} \leq N^{RL}$

Заметим, что первая область параметров содержит как ограниченные ($1 < \mathcal{F}$), так и неограниченные рынки.

Приведенный ниже рисунок иллюстрирует эти четыре случая влияния рыночной концентрации на цены, объемы и разнообразие.[14]



[14]На рисунках мы используем обозначение $D = \tilde{D}/\beta_{-\gamma}$.

Обсудим эти результаты.

Как общественное благосостояние откликается на изменения в объемах, ценах и числе разновидностей блага? Вообще говоря, имеется три переменные, привлекательные для потребителя: общий объем Q, разнообразие N и общая прибыль производителей и ритейлера. Для нашей квазилинейной постановки будем рассуждать в терминах обычной диаграммы Маршалла. После симметризации каждого равновесия, максимально возможный прирост полезности может быть описан упрощенной обратной функцией спроса:

$$\alpha - \left(\gamma + \frac{\beta - \gamma}{N}\right) Q.$$

Отметим, что “chocking price” α (“цена удушения” рынка) остается той же, но рост разнообразия N может растянуть треугольник спроса вправо, правый угол соответствует предельному значению γ/α. В этом плане, возрастание N приводит к росту общей доли благосостояния, распределяемой между потребителем, чистыми потерями благосостояния и прибылями, которые в конечном счете также принадлежат потребителю. С другой стороны, возрастание N дает рост средних издержек $\bar{c} = c + c_R + (F + F_R)N$. Геометрически, это сдвигает вверх линию издержек и тем самым снижает общую долю благосостояния. Социально оптимальное разнообразие N^{MaxW} определяется как результат баланса этих двух сил. Наоборот, любое рыночное равновесие дает искажение в двух отношениях: (1) неоптимальное разнообразие N и (2) монополистическое снижение общего объема, что приводит к треугольнику чистых потерь благосостояния.

Попробуем применить эти рассуждения. Первое, из таблицы видно, что во всех равновесиях общий потребляемый объем строго меньше, чем социально оптимальный, поэтому социальные потери *всегда* присутствуют, и обнаруженное положительное влияние на благосостояние может пониматься как минимизация этих потерь. Также всегда присутствует снижение числа разновидностей, что может приводить к росту благосостояния в случае перепроизводства разнообразии.

Кроме того, *как правило*, при концентрации рынка изменения в ценах и общем объеме имеют противоположную направленность. Только случай $\sqrt{2} - 1 < \mathcal{F} \leq 1/\sqrt{2}$ представляется неестественным:

объем растет при росте цены, подобно эффекту Гиффена; возможно, этот эффект может быть объяснен через равновесное количество производителей, которое убывает.

Далее, индивидуальные объемы *всегда* возрастают при концентрации рынка, что подтверждает справедливость наших рассуждений о влиянии концентрации на каждое отдельно взятое разнообразие: стратегическое поведение производителей, близкое к “двусторонней” монополии, приводит к более низкому общему объему, чем стратегическое поведение ритейлера.

Более сложным является поведение других равновесных значений, включая совокупный объем производства. При малых $\mathcal{F}$ (отношение фиксированных затрат ритейлера к удвоенным фиксированным затратам каждого производителя) общий объем Q растет, подобно индивидуальным объемам, приводя тем самым к расту благосостояния W. Но совсем другая картина возникает при больших и средних $\mathcal{F}$: в этой ситуации как общий объем Q, так и разнообразие N убывают при концентрации рынка, особенно когда ритейлер начинает ограничивать вход производителей на рынок. Таким образом, в этом случае прирост благосостояния может происходить либо вследствие снижения слишком большого начального разнообразия N^{ML} (избыточного количества производителей), либо вследствие роста прибылей, поступающей в конечном счете потребителю. При концентрации рынка розничные цены $(p+r)$ растут при больших $\mathcal{F}$, но убывают при средних или малых $\mathcal{F}$; однако они оказывают только косвенное воздействие на полезность, через трансформацию потребительского излишка в прибыли.

Что касается товарного разнообразия, или числа производителей, оно снижается при большом и среднем $\mathcal{F}$. Чрезмерное разнообразие может быть вредным, поскольку требует слишком большого числа производителей и чрезмерных фиксированных затрат. В частности, при ML взаимодействии товарное разнообразие может быть чрезмерным, поэтому его снижение при концентрации рынка может привести к положительным количественным эффектам при малом $\mathcal{F}$. В случае же очень большого $\mathcal{F}$ такое снижение достигается политикой ограничения входа производителей на рынок и, следовательно, может быть еще сильнее.

Таким образом, изменения равновесных значений объясняют некоторые механизмы прироста благосостояния при концентрации рынка.

4.2.2 Эффекты перехода Nash-взаимодействия к RL-взаимодействию

Для полноты обсуждения, рассмотрим теперь $Nash \to RL$ версию моделирования процесса концентрации рынка. Возникающие при этом эффектом будут отличаться от обнаруженных в $ML \to RL$ версии.

Необходимость учета ограничений $N^{Nash} \geq 0, N^{RL} \geq 0$ дает нам условия на параметры $\mathcal{F}$ и $\tilde{D}$, гарантирующие непустоту рынка:

$$\begin{aligned} \tilde{D}/\beta_{-\gamma} &\geq 4 \cdot \sqrt{\mathcal{F}}, && \text{если } \mathcal{F} \geq 1, \\ \tilde{D}/\beta_{-\gamma} &\geq \max\{3,\ 2 \cdot (\mathcal{F}+1)\}, && \text{если } \mathcal{F} < 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

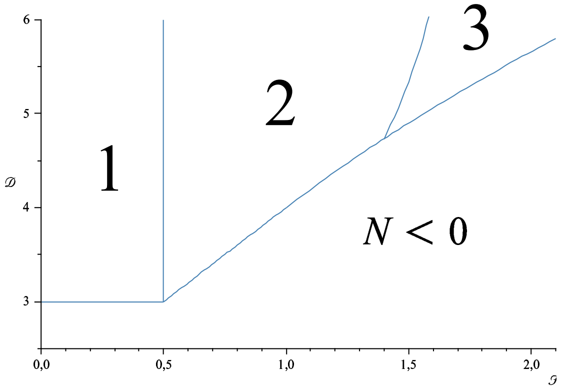
При этих ограничениях мы можем сформулировать главный результат о концентрации, моделируемой как переход от режима $Nash$ к режиму RL.

Благосостояние. Аналогично, относительно благосостояния, учитывая условие непустоты рынка (4.4), справедливо следующее:

Утверждение 4. *При переходу от режима $Nash$ к режиму RL, изменение благосостояния зависит от параметров следующим образом:*

Области параметров	*Благосостояние* W
1. *Малый* $\mathcal{F} < \dfrac{1}{2}$	$W^{Nash} < W^{RL}$
2. *Средний* $\left(\dfrac{9 \cdot \sqrt{\mathcal{F}}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{F}} - 3 - 2 \cdot \mathcal{F}}\right) \cdot \tilde{D}/\beta_{-\gamma} > \frac{7}{4}$, $\mathcal{F} > \frac{1}{2}$	$W^{Nash} > W^{RL}$
3. *Большой* $\left(\dfrac{9 \cdot \sqrt{\mathcal{F}}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{F}} - 3 - 2 \cdot \mathcal{F}}\right) \cdot \tilde{D}/\beta_{-\gamma} < \frac{7}{4}$	$W^{Nash} < W^{RL}$

На следующем рисунке проиллюстрированы эти три случая влияния концентрации рынка на благосостояние.



Отметим, что благосостояние возрастает при переходе от режима от режима $Nash$ к режиму RL только при больших или малых отношениях фиксированных затрат $\mathcal{F}$, однако убывает при средних отношениях.

Объемы, цены и товарное разнообразие. Наша цель здесь – выяснить, когда выполняются ли (или не выполняются) следующие представляющие определенный интерес неравенства:

$q^{Nash} <_? q^{RL}$ (рост потребления каждого товарного разнообразия),

$Q^{Nash} <_? Q^{RL}$ (рост общего объема потребления),

$p^{Nash} + r^{Nash} <_? p^{RL} + r^{RL}$ (рост розничной цены),

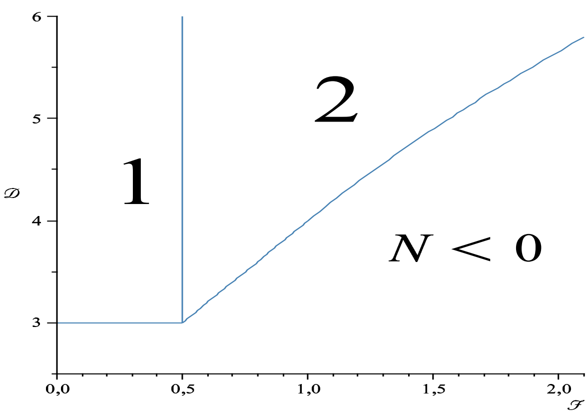
$N^{Nash} <_? N^{RL}$ (рост товарного разнообразия).

Опять проведем алгебраические преобразования, использующие полученные ранее формулы для равновесий, а также условие непустоты рынка (4.4). Имеет место:

Утверждение 5. *При переходе от $Nash$-взаимодействия к RL-взаимодействию цены, объемы и товарное разнообразие изменяются, в зависимости от комбинаций параметров, следующим образом:*

Области параметров	Объемы	Розничные цены	Разнообразие
1. *Малый* $\mathcal{F} \leq \frac{1}{2}$	$q^{Nash} = q^{RL} < q^{MaxW}$ $Q^{Nash} < Q^{RL} < Q^{MaxW}$	$p^{Nash} + r^{Nash} > p^{RL} + r^{RL}$	$N^{Nash} < N^{RL}$
2. *Большой* $\mathcal{F} > \frac{1}{2}$	$q^{Nash} < q^{RL} < q^{MaxW}$ $Q^{RL} < Q^{Nash} < Q^{MaxW}$	$p^{Nash} + r^{Nash} < p^{RL} + r^{RL}$	$N^{Nash} > N^{RL}$

Следующий рисунок иллюстрирует эти два случая влияния концентрации рынка на благосостояние.



Итак, результаты этого параграфа показывают, что:

- при переходе от различных предыдущих организаций отрасли (ML или $Nash$) к рыночной концентрации (RL) равновесные значения объемов, цен и разнообразий изменяются разнонаправленно, в зависимости от функций спроса и технологий;
- прирост благосостояния при концентрации рынка происходит почти всегда.

Таким образом, несмотря на заметное общественное недовольство переговорной силой ритейлера (упомянутой во Введении), эта сила, в сочетании с лидерством ритейлера во взаимоотношениях с производителями, может оказаться социально желательной. В этом случае экономистам не следовало бы приветствовать действия правительства против ритейлинговых сетей и тому подобную практику, недавно принятую Государственной Думой РФ. Следующий параграф добавляет аргументов в том же направлении.

5. Государственное регулирование: взимать с ритейлера налог или субсидировать его?

Предположим, что государство стимулирует рынок в духе Пигу. Ритейлер платит налог τ за каждую единицу проданного товара. Тогда прибыль ритейлера имеет вид:

$$\int_0^N [r(i) - (c_{\mathcal{R}} + \tau)]q(i)di - \int_0^N F_{\mathcal{R}} di.$$

Собранные налоги перераспределяются среди производителей в виде подушевых трансфертов. В случае отрицательного τ это означает Пиговианское субсидирование. Баланс доходов и расходов влечет выполнение соотношения

$$N\overline{F} = \tau \int_0^N q(i)di.$$

Функция общественного благосостояния $W^{RL}(\bar{q}(\tau), N(\tau))$ имеет тот же вид что и ранее, только теперь равновесные переменные $\bar{q}(\tau), N(\tau)$ являются функциями от налога τ. Они, как и благосостояние, могут быть найдены из предыдущих формул. Зная эти равновесные выражения, государство может максимизировать функцию благосостояния относительно τ и определить тем самым налоговую политику, максимизирующую общественное благосостояние. Здесь мы не решаем эту задачу (хотя это и возможно), вместо этого мы определяем только знак τ: следует ли государству *начинать* облагать налогом (пусть и малым налогом!) ритейлера, или, наоборот, следует субсидировать ритейлера? Иными словами, вопрос состоит в следующем: когда государству выгодно облагать налогом ритейлера ($\tau > 0$), а когда выгодно субсидировать его ($\tau < 0$)?

Утверждение 6. *При стратегическом поведении ритейлера, государству целесообразно субсидировать его, т.е.* $\tau^* < 0$.

Доказательство. Очевидно, в равновесии имеем

$$\overline{F}(i) = \overline{F} = \tau \cdot q.$$

Следовательно, для вычисления равновесных значений q, p, r, N и W, достаточно лишь заменить в таблицах из параграфа 4.1 F и $c_{\mathcal{R}}$ на $\overline{\overline{F}}$ и $\overline{\overline{c}}_{\mathcal{R}}$, где

$$\overline{\overline{F}} = F - \overline{F}, \quad \overline{\overline{c}}_{\mathcal{R}} = c_{\mathcal{R}} + \tau.$$

Сначала рассмотрим случай $RL,\ \mathcal{F} \geq 1$. Формулы для товарного разнообразия N и благосостояния W следующие:

	Товарное разнообразие N
$RL, \mathcal{F} \geq 1$	$\dfrac{\beta_{-\gamma}}{2 \cdot \gamma \cdot \sqrt{\mathcal{F}}} \cdot \left(\dfrac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} - \dfrac{\tau}{f} - 4 \cdot \sqrt{\mathcal{F}} \right)$

	Благосостояние W
$RL, \mathcal{F} \geq 1$	$W = \left(\dfrac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} - \dfrac{\tau}{f} - 4 \cdot \sqrt{\mathcal{F}} \right) \cdot \left(3 \cdot \dfrac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} + \dfrac{\tau}{f} - 6 \cdot \sqrt{\mathcal{F}} - \dfrac{4}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right) \cdot \dfrac{F \cdot \beta_{-\gamma}}{8 \cdot \gamma}$

Ясно что функция общественного благосостояния $W(\tau)$ является вогнутой. Поэтому достаточно показать, что

$$\frac{\partial W(0)}{\partial \tau} < 0.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial W(0)}{\partial \tau} < 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\mathcal{F}} \cdot \beta_{-\gamma}} > 1 + \frac{2}{\mathcal{F}} \ .$$

Но последнее неравенство всегда выполнено, поскольку, в силу условия непустоты рынка при $\tau = 0$, имеем:

$$\frac{\tilde{D}}{\sqrt{\mathcal{F}} \cdot \beta_{-\gamma}} \geq 4.$$

Рассмотрим теперь случай $RL,\ \mathcal{F} < 1$. Формулы для разнообразия N и благосостояния W следующие:

	Товарное разнообразие N
$RL, \mathcal{F} < 1$	$\dfrac{\beta_{-\gamma}}{2 \cdot \gamma \cdot S} \cdot \left(\dfrac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} - \dfrac{2 \cdot \mathcal{F} + 1}{S} - S \right)$

	Благосостояние W
$RL, \mathcal{F} < 1$	$\left(\dfrac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} - \dfrac{2 \cdot \mathcal{F} + 1}{S} - S \right) \cdot \left(3 \cdot \left(\dfrac{\tilde{D}}{\beta_{-\gamma}} - \dfrac{2 \cdot \mathcal{F} + 1}{S} - S \right) + 2 \cdot S \right) \cdot \dfrac{F \cdot \beta_{-\gamma}}{8 \cdot \gamma}$

Здесь

$$S = -\frac{\tau}{2 \cdot f} + \sqrt{\left(\frac{\tau}{2 \cdot f} \right)^2 + 1}$$

является выражением, зависящим от τ.

Рассмотрим опять благосостояние W как функцию от τ.

Важно отметить, что выражение S является ***строго убывающим*** относительно τ. Следовательно, S дает достаточно информации о поведении благосостояния W. Более того, значительно более удобно исследовать функцию W в терминах S, поскольку в этой ситуации мы имеем дело с полиномами.

Анализ таблиц дает следующее. Функция W является унимодальной (т.е. "однопиковой", имеет единственный максимум) относительно τ, если только τ таково, что число производителей неотрицательно.

Таким образом, опять достаточно показать, что

$$\frac{\partial W(0)}{\partial \tau} < 0.$$

Имеем

$$\frac{\partial W(0)}{\partial \tau} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\mathcal{F}} \cdot \beta_{-\gamma}} > 2 \cdot (\mathcal{F} + 1) - \frac{\mathcal{F}}{1 + 6 \cdot \mathcal{F}}\ .$$

Но последнее неравенство имеет место, поскольку, в силу условия непустоты рынка для $\tau = 0$, имеем

$$\frac{\tilde{D}}{\sqrt{\mathcal{F}} \cdot \beta_{-\gamma}} \geq 2 \cdot (\mathcal{F} + 1).$$

Утверждение 6 доказано. □

Доказанный факт кажется неестественным с точки зрения "антитрастовой логики": государство должно субсидировать монополиста/монопсониста. Однако такие эффекты сравнительно типичны в литературе по теории организации рыночных структур, причем их обоснования достаточно просты. Мы лишь показали здесь, что в нашей более сложной ситуации, с товарным разнообразием, сохраняется тот же эффект.

6. Заключение

Мы моделируем влияние на благосостояние и маркетинг рыночной концентрации после появления больших торговых сетей в России и других странах СНГ. Изучена модель, в которой в монополистически-конкурентной отрасли осуществляется производство и продажа товарного разнообразия через монопольного, монопсонического ритейлера. Появление такого ритейлера с двусторонней рыночной силой сравнивается с исходной ситуацией, когда производители продавали произведенные товары многим ритейлерам, которые в свою очередь обладали локальной рыночной силой по продаже продукции (имели власть над потребителями), но не по ее покупке (не имели власти над производителями).

Оказалось, что концентрация рынка приводит к росту общественного благосостояния. Этот эффект, неожиданный для неэкономистов, на самом деле не является слишком удивительным, поскольку напоминает переход от двусторонней монополии к простой монополии. Однако в нашей, менее изученной, рыночной структуре (дифференцированные товары) рост благосостояния может проходить не только через рост общего объема потребления, но в некоторых случаях через рост общей прибыли и, в особенности, через снижение избыточного товарного разнообразия. Показано, что ритейлер бывает заинтересован в снижении товарного разнообразия, что само по себе далеко не всегда является вредным.

В случае государственного регулирования деятельности ритейлера-монопсониста через налогообложение по Пиговианскому типу оказалось выгоднее субсидирование, а не налогообложение. Это также напоминает похожие эффекты, известные для простой монополии/монопсонии.

Возможным развитием проведенных исследований может быть получение аналогичных результатов для других функций полезности. Кроме того, представляет интерес изучение вопроса, приводит ли современная практика взимания ритейлером платы за вход с производителей к росту благосостояния, или его уменьшению.

Актуальность вопроса показывает недавно принятый Государственной Думой закон "О торговле," ограничивающий концентрацию рынка и взимание платы за вход с производителей. Наше исследование ставит под сомнение обоснование таких мер общественным благосостоянием.

Благодарности

Выражаем благодарность экспертам EERC, особенно проф. Ричарду Эриксону и д-ру Расселу Питтману, за внимание к этому исследованию и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитина Е. *Арифметика сборов по внутренним прайс-листам "на вход" в магазины крупнейших столичных ритейлеров - "Ашана", "Патэрсона", "Седьмого континента" и др.* SmartMoney, 07.08.2006.

2. Сагдиев Р., Пинтусов П., Миляев П. и Корюкин К. *Вход в магазин – платный. Такие правила действуют почти для всех товаров* // "Ведомости", 27.04.2006.

3. Соколов С. *"Сибирский берег" больше не жалуется на "Холидей Классик"* // Коммерсант, 16.06.2006.

4. Bernheim B.D., Whinston M.D. *Common agency* // Econometrica. 1986. V. 54. P. 923–942.

5. Chen Z. *Monopoly and Production Diversity: The role of retailer Countervailing Power* // Discussion Paper of Carleton University. November 8, 2004.

6. Combes P.P., Mayer T., Thisse J.-F. *Economic Geography. The Integration of Regions and Nations.* Princeton University Press, 2008.

7. Dixit A.K. *Vertical integration in a monopolistically competitive industry* // International Journal of Industrial Organization. 1983. V. 1. P. 63–78.

8. Dixit A.K., Stiglitz J.E. *Monopolistic competition and optimum product diversity* // American Economic Review. 1977. V. 67. P. 297–308.

9. *FAS Russia's activities on developing competition in retail (October 2007).* Site of the Federal Antimonopoly Service of Russian Federation (is available in http://www.fas.gov.ru/english/decisions/15841.shtml)

10. Hamilton S.F., Richards T.J. *Comparative Statics for Supermarket Oligopoly with Applications to Sales Taxes and Slotting Allowances.* May 31 2007, 22 p. Selected Paper prepared for presentation at the American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Portland, OR, July 29 - August 1, 2007.

11. Hotelling H. *Stability in competition* // The Economic Journal. 1929. V. 37. P. 41–57.

12. Lira L., Ugarte M. and Vergara R. *Prices and Market Structure: An Empirical Analysis of the Supermarket Industry in Chile.* Pontificia Universidad Catolica de Chile. Discussion Paper, No. 346, Noviembre 2008, 29 p.

13. Mathewson G.F., Winter R.A. *Vertical integration by contractual restraints in spatial markets* // Journal of Business. 1983. V. 56. P. 497–517.

14. Ottaviano G.I.P., Tabuchi T. and Thisse J.-F. *Agglomeration and trade revised* // International Economic Review. 2002. V. 43. P. 409–436.

15. Perry M.K. *Vertical integration.* In: Handbook of Industrial Organization, Chapter 4 // Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, Amsterdam et al., 1989.

16. Perry M.K. Groff R.H. *Resale price maintenance and forward integration into a monopolistically competitive industry* // Quarterly Journal of Economics. 1985. V. 100. P. 1293–1311.

17. *Prohibition of the concentration between the undertakings Tesco and Carrefour.* Site of the Antimonopoly Office of Slovak Republic. (is available in http://www.antimon.gov.sk/451/2607/ prohibition-of-the-concentration-between-the-undertakings-tesco-and-carrefour.axd)

18. Rey P. *The Economics of Vertical Restraints.* In: Handbook of Industrial Organization. 2003. V. III. Mark Armstrong and Rob Porter (eds.) (preprint version).

19. Salop S. *Monopolistic competition with outside goods* // Bell Journal of Economics. 1979. V. 10. P. 141–156.

20. Spengler J.J. *Vertical integration and antitrust policy* // Journal of Political Economy. 1950. V. 53. P. 347–352.

21. Tirole J. *The Theory of Industrial Organization.* 4th Edition, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

Приложение: равновесие в случае рынка без ритейлера

Случай NR описывается с помощью следующих вспомогательных обозначений:

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{NR}} &= \sqrt{\frac{F+F_{\mathcal{M}}}{\beta_{-\gamma}}}\ , \quad f_{\mathcal{M}} = \sqrt{(F+F_{\mathcal{M}})\cdot(\beta_{-\gamma})}\ , \\ D_{\mathcal{M}} &= \frac{\alpha-c-c_{\mathcal{M}}}{\sqrt{(F+F_{\mathcal{M}})\cdot(\beta_{-\gamma})}}\ , \ H_{\mathcal{M}} = \frac{(F+F_{\mathcal{M}})\cdot(\beta_{-\gamma})}{2\cdot\gamma}\ . \end{aligned}$$

Для случая NR формулы для равновесий выглядят следующим образом:

	объем q	цена p	надбавка r	разнообразие N
NR	$q_{\mathcal{NR}}$	$c + c_{\mathcal{M}} + f_{\mathcal{M}}$	–	$(D_{\mathcal{M}} - 2)\,\frac{\beta-\gamma}{\gamma}$

	благосостояние W
NR	$(D_{\mathcal{M}}^2 - 3 \cdot D_{\mathcal{M}} + 2) \cdot H_{\mathcal{M}}$

PRODUCT DIVERSITY IN A VERTICAL DISTRIBUTION CHANNEL UNDER MONOPOLISTIC COMPETITION

Igor A. Bykadorov, Sobolev Institute of Mathematics Siberian Branch of RAS, Cand.Sc., dosent (bykad@math.nsc.ru).
Evgenyi V. Zhelobodko, Novosibirsk State University (ezhel@ieie.nsc.ru).
Sergey G. Kokovin, Sobolev Institute of Mathematics Siberian Branch of RAS, Cand.Sc., dosent (skokovin@math.nsc.ru).

Abstract: In Russia the chain-stores gained a considerable market power. In the paper we combine a Dixit-Stiglitz industry with a monopolistic retailer. The questions addressed are: Does the retailer always deteriorate welfare, prices and variety of goods? Which market structure is worse: Nash or Stackelberg behavior? What should be the public policy in this area?

Keywords: monopolistic competition, Dixit-Stiglitz model, retailer, Nash equilibrium, Stackelberg equilibrium, social welfare, Pigouvian taxation.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 42-65

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ МНОГИХ ЛИЦ

Николай А. Зенкевич*
Андрей В. Зятчин*
Высшая школа менеджмента СПбГУ
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 1-3
e-mail: zenkevich@gsom.pu.ru, zyatchin@gsom.pu.ru

В статье предложена техника нахождения ситуации сильного равновесия в дифференциальной игре с помощью специальной скаляризации векторного критерия. Сформулированы достаточные условия существования сильного равновесия. Приведен пример несимметричной игры двух лиц, в котором ситуация сильного равновесия найдена в явном виде.

Ключевые слова: дифференциальная игра, равновесие по Нэшу, сильное равновесие.

1. Введение

В настоящее время известно несколько концепций сильного равновесия [3, 7, 9]. При этом в каждом случае под сильным равновесием понимается ситуация, в определенном смысле устойчивая относительно коалиционных отклонений игроков. Этот принцип оптимальности исследован в широких классах игр в нормальной и развернутой

---

* Работа выполнена по тематическому плану фундаментальных научно-исследовательских работ ВШМ СПбГУ (проект № 16.0.116.2009) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00301-а)

формах (см. например [3, 4, 9]). Основным недостатком концепции сильного равновесия является то, что оно существует достаточно редко.

При исследовании дифференциальных игр часто используется принцип оптимальности Беллмана [1, 2, 5, 6, 9]. В этом случае задача определения оптимального значения интегрального функционала сводится к решению экстремального уравнения в частных производных. С помощью такой техники в ряде случаев удается найти равновесие по Нэшу и парето-оптимальное решение [2, 10]. При этом в исследуемой модели необходимо дополнительно учитывать условия существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику игры, гладкость функции Беллмана, а также функций мгновенного и терминального выигрышей игроков.

В данной работе предлагается следующая техника нахождения сильного равновесия в дифференциальной игре. Для каждой коалиции с помощью специальной свертки осуществляется переход к экстремальной задаче со скалярным критерием, зависящим от набора параметров. Формулируются достаточные условия существования сильного равновесия в дифференциальной игре в виде условий на параметры свертки. Использование теоремы продемонстрировано на примере линейно-квадратичной несимметричной игры двух лиц. Для этой игры сильное равновесие удалось построить в явном виде на основе решения уравнения в частных производных первого порядка специального вида.

2. Определение сильного равновесия

Определим дифференциальную игру $\Gamma(x_0, T-t_0)$ из начального состояния x_0 и конечной продолжительности $T-t_0$. Здесь $t_0 \geq 0$, $T \geq t_0$ — моменты начала и окончания игры соответственно [2, 5, 8]. Множество игроков в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ обозначим через $N = \{1, \ldots, i, \ldots n\}$.

Предположим, что динамика изменения состояния игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$ имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right], \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R$, x_0 — известное начальное состояние игры, $u_i(t)$ — управление игрока $i \in N$ в момент времени t. Здесь $u_i(t) \in U_i \subset R$, $\prod\limits_{i \in N} U_i =$

$U_N \subset R^n$. Предположим, что функция $f\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right]$ — непрерывно дифференцируемая на $[t_0, T] \times R \times U_N$.

Для каждого игрока $i \in N$ рассмотрим интегральный функционал с терминальным выигрышем вида:

$$J_i(x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots u_n(\cdot)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} g_i\left[t, x(t), u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t)\right] dt + q_i\left[x(T)\right],$$

где $u_i(\cdot)$ представляет собой непрерывную функцию $u_i(t)$, $t \in [t_0, T]$. Будем предполагать, что функции $g_i\left[t, x(t), u_1(t), \ldots u_n(t)\right]$ и $q_i\left[x(T)\right]$ являются дифференцируемыми в области определения. Предполагается, что игрок $i \in N$ стремится максимизировать значение функционала $J_i(x_0, u_1(\cdot), \ldots, u_i(\cdot), \ldots u_n(\cdot))$ по $u_i(\cdot)$.

Пусть $S \subseteq N$ — произвольная коалиция в игре $\Gamma(x_0)$. Обозначим через $u_S(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i \in S}$ стратегию коалиции S. Стратегию дополнительной коалиции $N \backslash S$ будем обозначать через $u_{N \backslash S}(\cdot)$ или $u_{-S}(\cdot)$.

Определение 2.1. *Ситуация* $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ *называется сильным равновесием в широком смысле в игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$, *если* $\forall M \subseteq N$, $\forall u_M(\cdot)$ *не выполнено:*

$\forall i \in M$

$$J_i(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_i\left[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_i\left[x^{[M]}(T)\right] \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{T} g_i\left[t, x^*(t), u_M^*(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_i\left[x^*(T)\right] = J_i(x_0, u_M^*(t), u_{-M}^*(t))$$

и $\exists i_0 \in M$, *такой что:*

$$J_{i_0}(x_0, u_M(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_{i_0}\left[x^{[M]}(T)\right] >$$

$$> \int\limits_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t, x^*(t), u_M^*(t), u_{-M}^*(t)\right] dt + q_{i_0}\left[x^*(T)\right] = J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)),$$

где

$$\dot{x}^{[M]}(t) = f\left[t, x^{[M]}(t), u_M(t), u^*_{-M}(t)\right], \quad x^{[M]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*(t), u^*_1(t), \ldots, u^*_n(t)\right], \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Множество всех ситуаций сильного равновесия в смысле определения 2.1 в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будем обозначать $SME\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right)$.

Рассмотрим векторы

$$\lambda^{[n,i]} = \left(\lambda^{[n,i]}_1, \ldots, \lambda^{[n,i]}_i, \ldots, \lambda^{[n,i]}_n\right) \in E^n,$$

где $\lambda^{[n,i]}_j = 0$ при $j \neq i$ и $\lambda^{[n,i]}_i = 1$.

Лемма 2.1. *Для того чтобы ситуация*

$$u^*_N(\cdot) = (u^*_1(\cdot), u^*_2(\cdot), \ldots, u^*_n(\cdot)) \in SME\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right),$$

т.е. была сильным равновесием в смысле определения 2.1 достаточно, чтобы для любой коалиций $S \subseteq N$ существовал такой номер $i^S_0 \in S$, что для любой стратегии $u_S(\cdot) \neq u^*_S(\cdot)$ этой коалиции выполнялось неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^S_0]}_i J_i(x_0, u^*_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)) > \sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^S_0]}_i J_i(x_0, u_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)). \qquad (2.2)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. условия леммы выполнены, но ситуация $u^*_N(\cdot) = (u^*_1(\cdot), u^*_2(\cdot), \ldots, u^*_n(\cdot))$ не является сильным равновесием в смысле $SME\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right)$. Тогда существует коалиция M и стратегия $u_M(\cdot)$, для которых выполнено:

$$\begin{cases} J_i(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) \geq J_i(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)), \quad \forall i \in M; \\ \exists i_0 \in M : \quad J_{i_0}(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) > J_{i_0}(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)). \end{cases} \qquad (2.3)$$

Согласно условиям леммы, неравенство (2.2) выполнено для любой коалиции, в том числе и для коалиции M. Следовательно, существует такой номер $i^M_0 \in M$, для которого справедливо неравенство для $\forall u_M(\cdot) \neq u^*_M(\cdot)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^M_0]}_i J_i(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) > \sum_{i=1}^{n} \lambda^{[n,i^M_0]}_i J_i(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)). \quad (2.4)$$

По определению вектора $\lambda^{[n,i_0^M]}$ из неравенства (2.4) следует:

$$J_{i_0^M}(x_0, u^*_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)) > J_{i_0^M}(x_0, u_M(\cdot), u^*_{-M}(\cdot)). \tag{2.5}$$

Поскольку $i_0^M \in M$, то неравенства (2.3) и (2.5) несовместны. Следовательно, предположение неверно, что доказывает утверждение леммы. $\square$

Замечание 2.1. Число игроков n — конечное. Поэтому существование номера i_0^S из теоремы 2.1 можно установить простым перебором векторов $\lambda^{[n,i]}$, $i = 1, 2, \dots n$ для каждой коалиции $S \subseteq N$. При этом строгое неравенство будет иметь место, если удастся показать, что набор стратегий $u^*_N(\cdot) = (u^*_1(\cdot), u^*_2(\cdot), \dots, u^*_n(\cdot))$ является единственным, доставляющим максимум функционалу $J_{i_0^S}(x_0, u^*_N(\cdot))$, $i_0^S \in S$.

Введем следующие обозначения:

$$g_S\left[t, x(t), u_N(t)\right] = \sum_{i\in S} g_i\left[t, x(t), u_N(t)\right],$$

$$q_S\left[x(t)\right] = \sum_{i\in S} q_i\left[x(t)\right].$$

Используя концепцию решения, предложенную Л.А. Петросяном [9], сформулируем другое определение сильного равновесия для дифференциальной игры.

Определение 2.2. *Ситуацию $u^*_N(\cdot) = (u^*_1(\cdot), u^*_2(\cdot), \dots, u^*_n(\cdot))$ будем называть сильным равновесием в узком смысле в дифференциальной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$, если следующие неравенства выполнены для всех коалиций $S \subseteq N$ и стратегий $u_S(\cdot)$:*

$$J_S(x_0, u^*_N(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^*(t), u^*_1(t), \dots, u^*_i(t), \dots, u^*_n(t)\right] dt + q_S\left[x^*(T)\right] \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^{[S]}(t), u^*_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u^*_n(t)\right] dt + q_S\left[x^{[S]}(T)\right] =$$

$$= J_S(x_0, u_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)),$$

где $S = \{i\}$, $i \in N$;

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^*(t), u_1^*(t), \ldots, u_i^*(t), \ldots, u_j^*(t), \ldots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^*(T)\right] \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^{[S]}(t), u_1^*(t), \ldots, u_i(t), \ldots, u_j(t), \ldots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^{[S]}(T)\right] =$$

$$= J_S(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)),$$

где $S = \{i, j\}$, $i \neq j$, $i, j \in N$;

$$\ldots$$

$$J_S(x_0, u_N^*(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_n^*(t)\right] dt + q_S\left[x^*(T)\right] \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{T} g_S\left[t, x^{[S]}(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\right] dt + q_S\left[x^{[S]}(T)\right] =$$

$$= J_S\left[x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)\right],$$

где $S = N$,

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}^*(t)\right], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*(t), u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\right], \quad x^*(t_0) = x_0.$$

Далее для неравенств из определения 2.2 будем использовать более короткую запись:

$$J_S\left[x_0, u^*(\cdot)\right] \geq J_S\left[x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)\right],$$

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}^*(t)\right], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*(t), u^*(t)\right], \quad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\forall\, S \subset N, \quad S \neq \emptyset, \quad \forall u_S(\cdot).$$

Множество всех ситуаций сильного равновесия в смысле определения 2.2 в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ будем обозначать $SPE\left(\Gamma(x_0, T - t_0)\right)$.

Лемма 2.2.

$$SPE\left(\Gamma(x_0, T-t_0)\right) \subset SME\left(\Gamma(x_0, T-t_0)\right).$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ является сильным равновесием в смысле определения 2.2, но эта ситуация не является сильным равновесием в смысле определения 2.1. Тогда существует коалиция $M \subseteq N$ и такая стратегия $u_M^{**}(\cdot)$ коалиции M, для которых выполняется:

$$\begin{cases} J_i(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) \geq J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)), \quad \forall i \in M; \\ \exists i_0 \in M: \quad J_{i_0}(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) > J_{i_0}(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)). \end{cases}$$

Рассмотрим сумму выигрышей игроков коалиции M:

$$\sum_{i \in M} J_i(x_0, u_M^*(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)) < \sum_{i \in M} J_i(x_0, u_M^{**}(\cdot), u_{-M}^*(\cdot)).$$

Поэтому ситуация $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ не является сильным равновесием в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ в смысле определения 2.2. Противоречие и доказывает справедливость утверждения леммы. □

Докажем следующую теорему, используя технику динамического программирования.

Теорема 2.1. *Если в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, существует номер $i_0^S \in S$ и непрерывно-дифференцируемое на $[0, T] \times R$ решение системы экстремальных дифференциальных уравнений в частных производных*

$$\begin{gathered} V_t^{[S]}(t,x) + \max_{u_S} \Big\{ f\left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i\left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \Big\} = \\ = V_t^{[S]}(t,x) + f\left[t, x, \phi_S^*(t,x), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n, i_0^S]} g_i\left[t, x, \phi_S^*(t,x), \phi_{-S}^*(t,x)\right] = 0, \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} q_i \left[x^{[S]}(T)\right],$$

где для всех $S \subseteq N$ максимум в левой части (2.6) достигается на единственном наборе

$$\phi_S^*(t,x) = \{\phi_i^*(t,x) \in U_i,\ i \in S\},$$

$$\phi_N^*(t,x) = (\phi_S^*(t,x), \phi_{-S}^*(t,x)),$$

где $\phi_i^*(t,x) \in U_i,\ i \in N$ — непрерывные на $[t_0, T] \times R$ функции, тогда набор $\{u_i^*(t) = \phi_i^*(t,x) \in U_i,\ i \in N,\ t \in [t_0, T]\}$ является сильным равновесием в игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Доказательство. а) Предположим, что условия теоремы 2.1 выполнены для максимальной коалиции N. Тогда существует номер $i_0^N \in N$ и единственный вектор $\phi_N^*(t,x)$ такие, что:

$$\phi_N^*(t,x) = \arg\max_{u_N} \left\{ f\left[t, x, u_N(t)\right] V_x^{[N]}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} g_i\left[t, x, u_N(t)\right] \right\}.$$

Предположим, что коалиция N выбрала отличную от $\phi_N^*(t,x)$ произвольную стратегию $u_N(\cdot) \in U_N$, реализующую траекторию $x(t)$. Поскольку вектор $\phi_N^*(t,x)$ — единственный, имеет место строгое неравенство:

$$V_t^{[N]}(t,x) + f\left[t, x, u_N(t)\right] V_x^{[N]}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} g_i\left[t, x, u_N(t)\right] < 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u_N(t)\right], \quad x(t_0) = x_0.$$

При этом:

$$V_t^{[N]}(t,x) + f\left[t, x, \phi_N^*(t,x)\right] V_x^{[N]}(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} g_i\left[t, x, \phi_N^*(t,x)\right] = 0$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*, \phi_N^*(t, x^*)\right], \quad x^*(t_0) = x_0 \quad (2.8)$$

Рассмотрим интегралы выражений (2.7)-(2.8):

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,u_N(t)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x(T))-V^{[N]}(t_0,x(t_0))<0$$

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,\phi_N^*(t,x)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x^*(T))-V^{[N]}(t_0,x^*(t_0))=0,$$

следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,\phi_N^*(t,x)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x^*(T))-V^{[N]}(t_0,x^*(t_0))>$$

$$>\int\limits_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}g_i\left[t,x,u_N(t)\right]\right)dt+V^{[N]}(T,x(T))-V^{[N]}(t_0,x(t_0)).$$

Поскольку

$$V^{[N]}(T,x^*(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}q_i\left[x^*(T)\right],$$

$$V^{[N]}(T,x(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}q_i\left[x(T)\right],$$

$$V^{[N]}(t_0,x(t_0))=V^{[N]}(t_0,x^*(t_0))=V^{[N]}(t_0,x_0),$$

имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{[n,i_0^N]}\left\{\int\limits_{t_0}^{T}g_i\left[t,x,\phi_N^*(t,x)\right]dt+q_i\left[x^*(T)\right]\right\}\right)>$$

$$>\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^{[n,i_0^N]}\left\{\int\limits_{t_0}^{T}g_i\left[t,x,u_N(t)\right]dt+q_i\left[x(T)\right]\right\}\right).$$

Окончательно получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}J_i\left[x_0,u^*(\cdot)\right]>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^N]}J_i\left[x_0,u_N(\cdot)\right] \tag{2.9}$$

б) Предположим, что условия теоремы 2.1 выполнены для произвольной коалиции $S \subset N$, $S \neq N$. Тогда существует номер $i_0^S \in S$ и единственный вектор $\phi_S^*(t,x)$ такие, что:

$$\phi_S^*(t,x) = \arg\max_{u_S} \Big\{ f\left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i\left[t, x, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \Big\},$$

где вид функций, входящих в стратегию $\phi_{-S}^*(t,x)$, установлен в п. а).

Предположим, что коалиция S выбрала отличную от $\phi_S^*(t,x)$ произвольную стратегию $u_S(\cdot) \in U_S$, реализующую траекторию $x^{[S]}(t)$:

$$\dot{x}^{[S]}(t) = f\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right], \quad x^{[S]}(t_0) = x_0.$$

Поскольку вектор $\phi_S^*(t,x)$ — единственный, то имеет место строгое неравенство:

$$V_t^{[S]}(t, x^{[S]}) + f\left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t, x^{[S]}) + \tag{2.10}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i\left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] < 0$$

При этом:

$$V_t^{[S]}(t, x^*) + f\left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] V_x^{[S]}(t, x^*) + \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i\left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] = 0,$$

$$\dot{x}^*(t) = f\left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right], \quad x^*(t_0) = x_0$$

Рассмотрим интегралы выражений (2.10)-(2.11):

$$\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i\left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \right) dt +$$

$$+ V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) - V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)) < 0,$$

$$\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i\left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] \right) dt +$$

$$+V^{[S]}(T, x^*(T)) - V^{[S]}(t_0, x^*(t_0)) = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] \right) dt +$$

$$+V^{[S]}(T, x^*(T)) - V^{[S]}(t_0, x^*(t_0)) >$$

$$> \int\limits_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i \left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] \right) dt +$$

$$+V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) - V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)).$$

Поскольку

$$V^{[S]}(T, x^*(T)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} q_i \left[x^*(T)\right],$$

$$V^{[S]}(T, x^{[S]}(T)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} q_i \left[x^{[S]}(T)\right],$$

$$V^{[S]}(t_0, x^{[S]}(t_0)) = V^{[S]}(t_0, x^*(t_0)) = V^{[S]}(t_0, x_0),$$

имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^{[n,i_0^S]} \left\{ \int\limits_{t_0}^{T} g_i \left[t, x^*, \phi_N^*(t,x)\right] dt + q_i \left[x^*(T)\right] \right\} \right) >$$

$$> \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^{[n,i_0^S]} \left\{ \int\limits_{t_0}^{T} g_i \left[t, x^{[S]}, u_S(t), \phi_{-S}^*(t,x)\right] dt + q_i \left[x^{[S]}(T)\right] \right\} \right).$$

Окончательно получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_i \left[x_0, u^*(\cdot)\right] > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_i \left[x_0, u_S(\cdot), \phi_{-S}^*(t,x)\right]. \qquad (2.12)$$

Из неравенств (2.9) и (2.12) следует, что для любой коалиций $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, существует номер $i_0^S \in S$ такой, что для любой стратегии $u_S(\cdot) \neq u_S^*(\cdot)$ коалиции S выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_i(x_0, u_S^*(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_i(x_0, u_S(\cdot), u_{-S}^*(\cdot)).$$

Следовательно, по лемме 2.1 ситуация $u_N^*(\cdot)$ является сильным равновесием из $SPE\,(\Gamma(x_0, T-t_0))$. $\square$

3. Пример

Проиллюстрируем применение теоремы на примере, предварительно исследовав свойства уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\eta_1\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^2+\eta_2\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}x+ae^{bt}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}+r(t)=0 \quad (3.1)$$

$$V(T,x)=\eta_3 x,$$

где a, b, η_1, η_2, η_3 — заданные параметры, $b\neq\eta_2$, $r(t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[t_0, T]$.

Лемма 3.1. *Уравнение (3.1) имеет на отрезке $[t_0, T]$ единственное решение $V(t,x)$, причем $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ не зависит от a, b, η_1, $r(t)$ и имеет вид:*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=\eta_3 e^{\eta_2(T-t)}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}=p, \qquad \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}=q. \tag{3.2}$$

Запишем уравнение (3.1) с учетом (3.2) в виде:

$$p+\eta_1 q^2+\eta_2 xq+ae^{bt}q+r(t)=F(t,x,p,q)=0, \tag{3.3}$$

где

$$F_p^2+F_q^2=1+(2\eta_1 q+\eta_2 x+ae^{bt})^2\neq 0.$$

Зададим граничное условие $V(T,x)=\eta_3 x$ в параметрическом виде:

$$t_0(\tau)=T, \quad x_0(\tau)=\tau, \quad V_0(\tau)=\eta_3\tau, \quad p_0(\tau), \quad q_0(\tau). \tag{3.4}$$

В результате определена задача Коши (3.3)-(3.4), где $p_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$ связаны условиями:

$$\begin{cases} F[t_0(\tau), x_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)]=0, \\ \frac{dV_0}{d\tau}=p_0\frac{dt_0}{d\tau}+q_0\frac{dx_0}{d\tau}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Из (3.5) имеем:

$$\begin{cases} p_0(\tau) + \eta_1 q_0^2(\tau) + \eta_2 \tau q_0(\tau) + ae^{bT} q_0(\tau) + r(T) = 0, \\ \eta_3 = q_0(\tau), \end{cases}$$

следовательно, $q_0(\tau) = \eta_3$, $p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau$.

Задача с граничными условиями (3.3)-(3.5) имеет единственное решение, если из данных граничных условий следует:

$$F_p \frac{dx}{d\tau} - F_q \frac{dt}{d\tau} \neq 0. \tag{3.6}$$

Проверим выполнение условий (3.6):

$$1 - \left(2\eta_1 q_0 + \eta_2\tau + ae^{bT}\right) \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Условие (3.6) выполнено, следовательно, задача (3.3)-(3.5) имеет единственное решение.

Рассмотрим теперь систему характеристических уравнений:

$$\frac{dt}{dt} = F_p = 1,$$

$$\frac{dx}{dt} = F_q = 2\eta_1 q + \eta_2 x + ae^{bt} \tag{3.7}$$

$$\frac{dV}{dt} = pF_p + qF_q = p + 2\eta_1 q^2 + \eta_2 qx + ae^{bt}q \tag{3.8}$$

$$\frac{dp}{dt} = -(pF_V + F_t) = -abe^{bt}q - r'(t) \tag{3.9}$$

$$\frac{dq}{dt} = -(qF_V + F_x) = -\eta_2 q$$

с условиями:

$$t_0(\tau) = T, \quad x_0(\tau) = \tau, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau,$$

$$p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau, \quad q_0(\tau) = \eta_3.$$

Тогда,

$$q = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \eta_2 x + 2\eta_1\eta_3 e^{\eta_2(T-t)} + ae^{bt}, \quad x_0(\tau) = \tau,$$

которое имеет единственное решение:

$$x = e^{-\eta_2(T-t)}\tau + \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2}\left(e^{-\eta_2(T-t)} - e^{\eta_2(T-t)}\right) + \frac{a}{b-\eta_2}\left(e^{bt} - e^{bT}e^{-\eta_2(T-t)}\right). \tag{3.11}$$

Подставив (3.10) в (3.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = -abe^{bt}\eta_3 e^{\eta_2(T-t)} - r'(t) = -r'(t) - ab\eta_3 e^{bt}e^{\eta_2(T-t)},$$

$$p_0(\tau) = -ae^{bT}\eta_3 - r(T) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau,$$

которое имеет единственное решение:

$$p = -r(t) - \frac{a\eta_3}{b-\eta_2}\left(be^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - \eta_2 e^{bT}\right) - \eta_1\eta_3^2 - \eta_2\eta_3\tau. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.10), (3.11), (3.12) в (3.8) и приведя подобные члены, имеем следующее уравнение:

$$\frac{dV}{dt} = -r(t) + \eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-t)}, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau.$$

Откуда,

$$dV = \left(\eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-t)} - r(t)\right)dt, \quad V_0(\tau) = \eta_3\tau,$$

$$V = \eta_3\tau + \int\limits_T^t \left(\eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-\xi)} - r(\xi)\right)d\xi.$$

Поскольку $t \in [t_0, T]$, имеем:

$$V = \eta_3\tau - \int\limits_t^T \left(\eta_1\eta_3^2 e^{2\eta_2(T-\xi)} - r(\xi)\right)d\xi,$$

$$V = \eta_3\tau - \left(-\frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}e^{2\eta_2(T-\xi)}\Bigg|_t^T\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi,$$

$$V = \eta_3\tau - \frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}\left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi. \tag{3.13}$$

Рассмотрим систему, составленную из уравнений (3.11) и (3.13):

$$\begin{cases} x = e^{-\eta_2(T-t)}\tau + \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2}\left(e^{-\eta_2(T-t)} - e^{\eta_2(T-t)}\right) + \frac{a}{b-\eta_2}\left(e^{bt} - e^{bT}e^{-\eta_2(T-t)}\right), \\ V = \eta_3\tau - \frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}\left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi. \end{cases}$$

Исключим из системы параметр τ. Для этого выразим τ из первого уравнения:

$$\tau = e^{\eta_2(T-t)}x - \frac{\eta_1\eta_3}{\eta_2}\left(1 - e^{2\eta_2(T-t)}\right) - \frac{a}{b-\eta_2}\left(e^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - e^{bT}\right).$$

Полученное выражение подставим во второе уравнение системы, получим

$$V = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}x + \frac{\eta_1\eta_3^2}{2\eta_2}\left(e^{2\eta_2(T-t)} - 1\right) - \tag{3.14}$$

$$-\frac{a\eta_3}{b-\eta_2}\left(e^{bt}e^{\eta_2(T-t)} - e^{bT}\right) + \int\limits_t^T r(\xi)d\xi.$$

Подстановкой (3.14) в (3.1) непосредственно проверяем, что (3.1) превращается в тождество.

Из (3.14) следует, что

$$V_x = \eta_3 e^{\eta_2(T-t)}.$$

□

Пример 3.1. Рассмотрим игру $\Gamma(x_0, T - t_0)$, где $N = \{1, 2\}$, $n = 2$, динамика (3.1) имеет вид:

$$\dot{x}(t) = ax + b_1u_1 + b_2u_2, \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.15}$$

Пусть целью игрока 1 является максимизация функционала:

$$J_{\{1\}}\left[x_0, u_1, u_2\right] = \int\limits_{t_0}^T \left[-u_1^2 - u_2^2 + u_1x + u_2x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t)\right]dt + x(T), \tag{3.16}$$

а целью игрока 2 — максимизация функционала:

$$J_{\{2\}}\left[x_0, u_1, u_2\right] = \int\limits_{t_0}^T \left[-2u_1^2 - u_2^2 + 2u_1x + u_2x - \frac{3}{4}x^2 + r^{[2]}(t)\right]dt + x(T), \tag{3.17}$$

где $r^{[1]}(t)$, $r^{[2]}(t)$ — непрерывные функции.

Покажем, что в игре (3.16)-(3.17) существует сильное равновесие в смысле определения 2.1. Согласно теореме 2.1, для этого достаточно для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, найти номер $i_0^S \in S$ и непрерывно-дифференцируемую функцию $V^{[S]}(t,x)$ такие, чтобы максимальное значение левой части уравнения (2.6) достигалось на единственном наборе $\phi_N^*(t,x)$.

Рассмотрим коалицию $S = \{1,2\} = N$ и вектор

$$\lambda^{[n,i_0^N]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}, \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right).$$

Уравнение (2.6) принимает вид:

$$V_t^{[N]}(t,x) + \max_{u_1 u_2} \Big\{ (ax + b_1 u_1 + b_2 u_2) V_x^{[N]}(t,x) +$$
$$+ \lambda_1^{[n,i_0^N]} \left(-u_1^2 - u_2^2 + u_1 x + u_2 x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t) \right) +$$
$$+ \lambda_2^{[n,i_0^N]} \left(-2u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 x + u_2 x - \frac{3}{4}x^2 + r^{[2]}(t) \right) \Big\} = 0,$$
$$V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^N]} x^{[N]}(T),$$

или

$$V_t^{[N]}(t,x) + \max_{u_1 u_2} \Big\{ (ax + b_1 u_1 + b_2 u_2) V_x^{[N]}(t,x) -$$
$$- \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) u_1^2 - \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) u_2^2 +$$
$$+ \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x u_1 + \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x u_2 - \tag{3.18}$$
$$- \left(\frac{x^2}{2} \lambda_1^{[n,i_0^N]} + \frac{3x^2}{4} \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) + \left(r^{[1]}(t) \lambda_1^{[n,i_0^N]} + r^{[2]}(t) \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) \Big\} = 0,$$
$$V^{[N]}(T, x^{[N]}(T)) = \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x^{[N]}(T).$$

Определим максимум функции в фигурных скобках. Значения управлений, на которых достигается максимум в левой части уравнения (3.18), получаем из условий первого порядка:

$$b_1 V_x^{[N]}(t,x) - 2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) \phi_1^*(t,x) + \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]} \right) x = 0,$$

$$b_2 V_x^{[N]}(t,x) - 2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\phi_2^*(t,x) + \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)x = 0.$$

Откуда,

$$\begin{array}{l} \phi_1^*(t,x) = \frac{b_1}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \\ \phi_2^*(t,x) = \frac{b_2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2} \end{array}. \tag{3.19}$$

Условия второго порядка зависят только от параметров свертки:

$$-2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) < 0$$

и

$$\left|\begin{array}{cc} -2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) & 0 \\ 0 & -2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) \end{array}\right| = \tag{3.20}$$

$$= 4\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right) > 0.$$

Следовательно, при выполнении условий (3.20), набор функций (3.19) будет единственным, на котором достигается максимум левой части уравнения (3.18).

Подставляя (3.19) в (3.18), имеем:

$$V_t^{[N]}(t,x) + \left\{ax + \frac{b_1 x}{2} + \frac{b_2 x}{2}\right\} V_x^{[N]}(t,x) +$$

$$+ \left\{\frac{b_1^2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} + \frac{b_2^2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}\right\} \left(V_x^{[N]}(t,x)\right)^2 -$$

$$- \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\frac{b_1}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2}\right)^2 -$$

$$- \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\frac{b_2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\frac{b_1}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} V_x^{[N]}(t,x) + \frac{x}{2}\right) x +$$

$$+\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\left(\frac{b_2}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}V_x^{[N]}(t,x)+\frac{x}{2}\right)x-$$
$$-\left(\frac{x^2}{2}\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\frac{3x^2}{4}\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)+ \qquad (3.21)$$
$$+\left(r^{[1]}(t)\lambda_1^{[n,i_0^N]}+r^{[2]}(t)\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\Big\}=0,$$
$$V^{[N]}(T,x^{[N]}(T))=\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)x^{[N]}(T).$$

Раскрывая скобки в (3.21) и упрощая, имеем:

$$V_t^{[N]}(t,x)+\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}xV_x^{[N]}(t,x)+$$
$$+\left\{\frac{b_1^2}{4\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{4\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}\right\}\left(V_x^{[N]}(t,x)\right)^2+ \qquad (3.22)$$
$$+\left(r^{[1]}(t)\lambda_1^{[n,i_0^N]}+r^{[2]}(t)\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)\Big\}=0,$$
$$V^{[N]}(T,x^{[N]}(T))=\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)x^{[N]}(T).$$

По лемме 3.1 уравнение (3.22) имеет единственное решение, причем

$$V_x^{[N]}(t,x)=\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}. \qquad (3.23)$$

С учетом (3.23) из (3.19) следует, что

$$\begin{aligned}\phi_1^*(t,x)&=\frac{b_1\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}\\ \phi_2^*(t,x)&=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}\end{aligned}. \qquad (3.24)$$

При этом динамика (3.15) принимает вид:

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+\left\{\frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{2}\right\}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$
$$(3.25)$$
$$x(t_0)=x_0.$$

Рассмотрим коалицию $S = \{1\}$ и вектор

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}\right),$$

при условии, что игрок 2 выбрал стратегию $\phi_2^*(t,x)$. Уравнение (2.6) принимает вид:

$$\begin{gathered}
V_t^{[S]}(t,x) + \max_{u_1}\left\{\left[ax + b_1u_1 + \frac{b_2^2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{b_2x}{2}\right]V_x^{[S]}(t,x)+\right.\\
+\lambda_1^{[n,i_0^S]}\left(-u_1^2 - \left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{x}{2}\right)^2 + \right. \qquad (3.26)\\
\left.+u_1x + \left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{x}{2}\right)x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t)\right) +\\
+\lambda_2^{[n,i_0^S]}\left(-2u_1^2 - \left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{x}{2}\right)^2 + \right.\\
\left.\left.+2u_1x + \left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{x}{2}\right)x - \frac{3}{4}x^2 + r^{[2]}(t)\right)\right\} = 0\\
V^{[S]}(T,x(T)) = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]} + \lambda_2^{[n,i_0^S]}\right)x(T).
\end{gathered}$$

Из определения вектора $\lambda^{[n,i_0^S]}$ следует, что $\lambda_2^{[n,i_0^S]} = 0$. Поэтому уравнение (3.26) принимает вид:

$$\begin{gathered}
V_t^{[S]}(t,x) + \max_{u_1}\left\{\left[ax + b_1u_1 + \frac{b_2^2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{b_2x}{2}\right]V_x^{[S]}(t,x) +\right.\\
+\lambda_1^{[n,i_0^S]}\left(-u_1^2 - \left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{x}{2}\right)^2 + \right. \qquad (3.27)\\
\left.\left.+\ u_1x + \left(\frac{b_2}{2}e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \frac{x}{2}\right)x - \frac{x^2}{2} + r^{[1]}(t)\right)\right\} = 0\\
V^{[S]}(T,x(T)) = \lambda_1^{[n,i_0^S]}x(T)
\end{gathered}$$

Условие первого порядка для функции в фигурных скобках принимает вид:

$$b_1V_x^{[S]}(t,x) - 2\lambda_1^{[n,i_0^S]}\phi_1^{**}(t,x) + \lambda_1^{[n,i_0^S]}x = 0.$$

Откуда,

$$\phi_1^{**}(t,x) = \frac{b_1}{2\lambda_1^{[n,i_0^S]}} V_x^{[S]}(t,x) + \frac{x}{2}. \tag{3.28}$$

Условие второго порядка зависит только от параметров свертки:

$$-2\lambda_1^{[n,i_0^S]} < 0, \tag{3.29}$$

поэтому при выполнении условия (3.29) стратегия (3.28) будет единственной, на которой достигается максимум левой части уравнения (3.27).

Подставив (3.28) в (3.27) и упростив, получим:

$$V_t^{[S]}(t,x) + \frac{b_1^2}{4\lambda_1^{[n,i_0^S]}} \left(V_x^{[S]}(t,x)\right)^2 + \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x V_x^{[S]}(t,x) +$$

$$+\frac{b_2^2}{2} e^{\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} V_x^{[S]}(t,x) - \tag{3.30}$$

$$-\frac{\lambda_1^{[n,i_0^S]} b_2^2}{2} e^{2\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)(T-t)} + \lambda_1^{[n,i_0^S]} r^{[1]}(t) = 0,$$

$$V^{[S]}(T, x(T)) = \lambda_1^{[n,i_0^S]} x(T).$$

По лемме 3.1 уравнение (3.30) имеет единственное решение, причем

$$V_x^{[S]}(t,x) = \lambda_1^{[n,i_0^S]} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}. \tag{3.31}$$

С учетом (3.31) из (3.28) следует:

$$\phi_1^{**}(t,x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}. \tag{3.32}$$

При этом динамика (3.15) принимает следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}\right) e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}, \tag{3.33}$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Рассмотрим коалицию $S = \{2\}$ и вектор

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}\right),$$

при условии, что игрок 1 выбрал стратегию $\phi_1^*(t,x)$. Повторяя рассуждения, проведенные при рассмотрении случая $S=\{1\}$, имеем:

$$\phi_2^{**}(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}. \tag{3.34}$$

При этом динамика (3.15) принимает вид:

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+ \tag{3.35}$$

$$+\left\{\frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{2}\right\}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0.$$

В результате получаем:

Для $S=N$, согласно (3.24), (3.25):

$$\phi_1^*(t,x)=\frac{b_1\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2},$$

$$\phi_2^*(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+\left\{\frac{b_1^2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}+2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}+\frac{b_2^2}{2}\right\}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0.$$

Для $S=\{1\}$, согласно (3.32), (3.33):

$$\phi_1^{**}(t,x)=\frac{b_1}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2}$$

$$\dot{x}(t)=\left(a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)x+\left(\frac{b_1^2}{2}+\frac{b_2^2}{2}\right)e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0)=x_0.$$

Для $S=\{2\}$, согласно (3.34), (3.35):

$$\phi_2^{**}(t,x)=\frac{b_2}{2}e^{\left\{a+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}+\frac{x}{2},$$

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left\{ \frac{b_1^2 \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + \lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)}{2\left(\lambda_1^{[n,i_0^N]} + 2\lambda_2^{[n,i_0^N]}\right)} + \frac{b_2^2}{2} \right\} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)},$$

$$x(t_0) = x_0.$$

В игре возможны три коалиции ($n = 2$). Поэтому возможны $2^3 = 8$ векторов $\lambda^{[n,i_0^N]}$. Перебирая все варианты, находим следующий ответ.

Для $S = N$ значение $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $\lambda^{[n,i_0^{\{1,2\}}]} = (1,0)$, для $S = \{1\}$ значение $i_0^{\{1\}} = 1$, $\lambda^{[n,i_0^{\{1\}}]} = (1,0)$, для $S = \{2\}$ значение $i_0^{\{2\}} = 2$, $\lambda^{[n,i_0^{\{2\}}]} = (0,1)$. Тогда:

а) для всех экстремальных уравнений выполняются условия второго порядка,

б)

$$\phi_1^*(t,x) = \phi_1^{**}(t,x) = \frac{b_1}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

$$\phi_2^*(t,x) = \phi_2^{**}(t,x) = \frac{b_2}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2},$$

в) выполняются условия существования и единственности уравнений (3.25), (3.33), (3.35). При этом указанные уравнения принимают одинаковый вид:

$$\dot{x}(t) = \left(a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right) x + \left(\frac{b_1^2}{2} + \frac{b_2^2}{2}\right) e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)}, \qquad (3.36)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Следовательно, для каждой коалиции $S \subseteq N$ нашлись такие номера игроков $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $i_0^{\{1\}} = 1$, $i_0^{\{2\}} = 2$, что максимальное значение левой части уравнений (3.18), (3.27), а также экстремального уравнения, составленного для случая $S = \{2\}$, достигается на единственном наборе непрерывных функций:

$$\phi_N^*(t,x) = (\phi_1^*(t,x), \phi_2^*(t,x)) =$$

$$= \left(\frac{b_1}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}, \frac{b_2}{2} e^{\left\{a + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right\}(T-t)} + \frac{x}{2}\right).$$

Тогда по теореме 2.1 набор $\phi_N^*(t,x) \in SME$ в игре (3.15)-(3.17), что и требовалось найти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.* М.: Советское радио, 1980.

2. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. *Динамические игры и их приложения в менеджменте.* Санкт-Петербург: Высшая школа менеджмента, 2009.

3. Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* / Пер. с франц. О.Р. Меньшиковой, И.С. Меньшикова. Москва: Мир, 1985.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр.* М.: Высш. шк., Книжный дом "Университет" , 1998.

5. Флеминг У., Ришел Р. *Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.* / пер. с англ. М. Г. Бутрим, П. К. Катышева; под ред. А. Н. Ширяева. М.: Мир, 1978.

6. Чистяков С. В. *О построении сильно динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр* // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 1992. Сер.1: Математика, механика, астрономия. Вып. 1. С. 57–69.

7. Aumann R.J. *Acceptable Points in General Cooperative n - Person Games.* // Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study 40, ed. by A.W. Tucker, Princeton NJ: Princeton University Press, 1959, p. 287-324.

8. Isaacs R. *Differential games.* New York, London, Sydney: John Wiley and sons Inc, 1965.

9. Petrosyan L.A., Grauer L.V. *Strong Nash Equilibrium in Multistage Games*// International Game Theory Review. 2002. V. 4. № 3. P. 255–264.

10. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Cooperative stochastic differential games.* New York: Springer Verlag, 2006.

STRONG EQUILIBRIUM CONSTRUCTION IN A NONCOOPERATIVE DIFFERENTIAL GAME

Nikolay A. Zenkevich, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, Cand. Sc., assoc. prof. (zenkevich@gsom.pu.ru).
Andrey V. Zyatchin, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, assistant (zyatchin@gsom.pu.ru).

Abstract: A strong equilibrium technique is proposed. It is based on a special scalarization of multicreteria problem. Sufficient conditions for strong equilibrium to exist are proved. The result is illustrated on asymmetric differential game with two players, where strong equilibrium is found in explicit form.

Keywords: differential game, Nash equilibrium, strong equilibrium.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 66–78

УДК 519.832.2
ББК 22.18

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСОВ

Владимир В. Мазалов*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул.Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Юлия С. Токарева**
Забайкальский государственный
гуманитарно-педагогический университет
им. Н.Г. Чернышевского
672007, Чита, ул.Бабушкина, 129
e-mail: jtokareva2@mail.ru

Рассматривается бескоалиционная игра n лиц с ненулевой суммой, связанная с проведением конкурсов. Игроки представляют на конкурс проекты, которые характеризуются набором параметров. Арбитр или арбитражный комитет выбирает один из проектов, используя некоторую стохастическую процедуру с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. При этом победитель конкурса получает выигрыш, зависящий от параметров проекта. В работе представлена теоретико-игровая модель данной задачи и найдено равновесие в двух и трехмерных моделях.

---

*Работа поддержана грантами РФФИ (проект 10-01-00089-а), АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" и ОМН РАН.

** Поддержано АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"

Ключевые слова: теоретико-игровая модель конкурса, игра n лиц, диаграмма Вороного, арбитражная процедура, равновесие по Нэшу.

1. Введение

Рассматривается бескоалиционная игра n лиц с ненулевой суммой, связанная с проведением конкурсов. Игрок $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ представляет на конкурс проект, который характеризуется набором параметров $x^i = (x_1^i, \ldots, x_m^i)$. Например, проект может включать описание его стоимости, времени выполнения, числа работников и т.д. Арбитр или арбитражный комитет рассматривает поступившие предложения, выбирает один из проектов, используя стохастическую процедуру с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. При этом победитель конкурса k получает выигрыш $h_k(x^k)$, зависящий от параметров его проекта. В работе для выбора проекта используется многомерная арбитражная процедура, которая выбирает ближайший к решению арбитра проект.

Этот подход широко применяется в одномерных игровых задачах двух лиц с нулевой суммой, которые интерпретируются как решение спора о зарплате между работником и работодателем. В работах [1, 4-7] получены равновесия в таких играх с участием одного арбитра, и в работах [2, 8] с участием арбитражного комитета.

В данной работе представлена многомерная теоретико-игровая модель n лиц с ненулевой суммой, в которой предложения игроков представляют собой набор параметров. Для ряда двухмерных и трехмерных задач найдены оптимальные решения и проведено их сравнение с решениями известных одномерных моделей.

2. Теоретико-игровая модель проведения конкурса

Рассмотрим следующую бескоалиционную игру n лиц с ненулевой суммой. Игроки $\{1, 2, \ldots, n\}$ представляют на конкурс проекты, которые характеризуются векторами $\{x^1, \ldots, x^n\}$ из некоторого допустимого множества S в пространстве R^m. Арбитр рассматривает поступившие предложения и выбирает один из проектов, используя следующую стохастическую процедуру. В пространстве R^m моделируется случайный вектор a с некоторым распределением вероятностей $\mu(x_1, \ldots, x_m)$, которое известно участникам конкурса. Будем называть вектор a решением арбитра. Победителем становится проект

x^k, который ближе всего находится к точке a. Победитель конкурса игрок k получает выигрыш $h_k(x^k)$, зависящий от параметров проекта. Можно также думать о векторе a, как о наборе решений экспертов, где каждая компонента представляет собой решение отдельного эксперта. При этом, эксперты могут быть независимыми, или принимать коррелированные решения.

Заметим, что решение арбитра является случайным. Для представленного набора проектов $\{x^1, \ldots, x^n\}$ множество $S \subset R^m$ разобьется на n подмножеств $S_1, \ldots, S_n$, таких что если $a \in S_k$, то решением арбитра будет выбор проекта с номером k (см. рис. 1). Данное разбиение называется диаграммой Вороного. Его можно построить, используя процедуру Форчуна [3].

Таким образом, выигрыш игрока k в данной игре можно определить как среднее значение его выигрыша при попадании решения арбитра в множество S_k, т.е.

$$H_k(x^1, \ldots, x^n) = \int_{S_k} h_k(x^k)\mu(dx_1, \ldots, dx_n) = h_k(x_k)\mu(S_k), k = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Ищется равновесие по Нэшу в данной игре, т.е. такой профиль $x^* = (x^1, \ldots, x^n)$, для которого

$$H_k(x^*||y^k) \le H_k(x^*), \quad \forall y^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

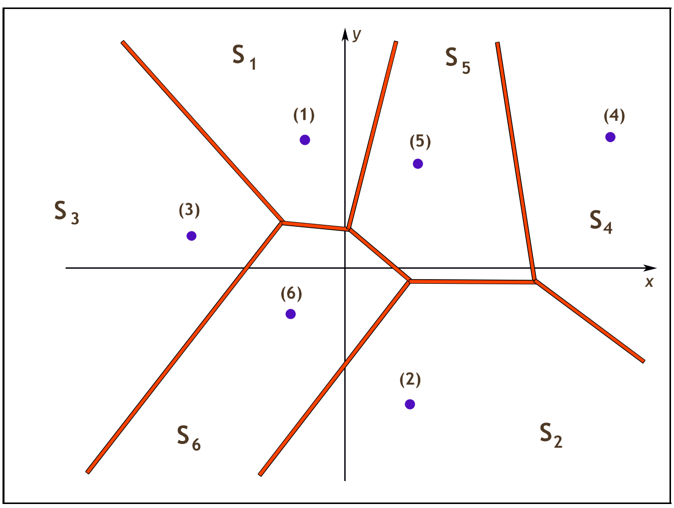


Рисунок 1. Диаграмма Вороного на множестве проектов

Для упрощения выкладок остановимся на двухмерном случае, когда проект представлен двумя параметрами. Предположим, что игроки представили на конкурс свои проекты $x^i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, а два независимых арбитра оценивают их. Пусть решение арбитров моделируется случайным вектором на плоскости с плотностью распределения $f(x, y) = g(x)g(y)$.

Рассмотрим для определенности игрока 1. Множество S_1, соответствующее принятию его проекта представляет собой многоугольник со сторонами $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$, где l_j это отрезок прямой линии, проходящий перпендикулярно отрезку $[x^1, x^j]$ через его середину (см. рис. 1).

Нетрудно найти, что уравнение границы l_j имеет вид:

$$x(x_1 - x_j) + y(y_1 - y_j) = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_j^2 - y_j^2}{2}, \tag{2.2}$$

или

$$y = l_j(x) = -\frac{x_1 - x_j}{y_1 - y_j}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_j^2 - y_j^2}{2(y_1 - y_j)}.$$

Пусть $x_{i_j}, j = 1, \dots, k$ абсциссы вершин многоугольника S_1. Для удобства перенумеруем их таким образом, чтобы

$$x_{i_0} \le x_{i_1} \le x_{i_2} \le \dots \le x_{i_k} \le x_{i_{k+1}},$$

где $x_{i_0} = -\infty, x_{i_{k+1}} = \infty$.

Для всех внутренних точек $(x, y) \in S_1$ выполняется условие, что $l_{i_j}(x)$ имеет тот же знак, что и $l_{i_j}(x_1)$, или $l_{i_j}(x)l_{i_j}(x_1) > 0, j = 1, \dots, k$.

Тогда меру $\mu(S_1)$ можно представить как

$$\mu(S_1) = \sum_{j=0}^{k+1} \int\limits_{x_{i_j}}^{x_{i_{j+1}}} g(x)dx \int\limits_{l_{i_j}(x)l_{i_j}(x_1)>0, j=1,\dots,k} g(y)dy.$$

Аналогичное представление можно получить для любой области $S_i, i = 1, \dots, n$.

3. Двухмерная модель двух лиц с нормальным распределением

Рассмотрим, например, модель конкурса для двух лиц с нулевой суммой, в которой проекты представлены двумя параметрами.

Например, можно представить спор о разделе имущества, которое состоит из движимого x и недвижимого имущества y. Игрок I хочет максимизировать сумму $x+y$, а второй – минимизировать. Предположим, что для определения победителя в споре арбитр использует процедуру с нормальным распределением $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\{-(x^2+y^2)/2\}$.

Игроки вносят свои предложения (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Плоскость решений арбитра разобьется на два множества S_1 и S_2, которые разбиваются прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. рис. 2). Уравнение такой прямой

$$y = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x + \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(y_1 - y_2)}.$$

Таким образом, выигрыш игрока I в данной игре имеет вид:

$$H(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_1 + y_1)\mu(S_1) = \tag{3.1}$$

$$= (x_1 + y_1)\int_R\int_R f(x,y) I\{-\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}x + \frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)}{2(y_1 - y_2)} \geq 0\}dxdy,$$

где $I\{A\}$ – индикатор множества A.

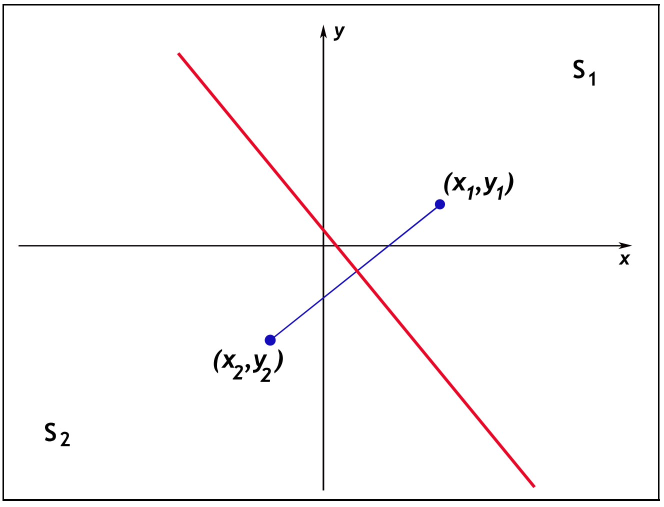


Рисунок 2. Конкурс двух проектов на плоскости

Пользуясь симметрией задачи, можно предположить, что оптимальные стратегии будут предписывать одинаковые значения параметров. Пусть $x^2 = y^2 = -a$. Тогда из (3.1)

$$H(x_1, y_1) = (x_1 + y_1)\int_R\int_R f(x,y) I\{-\frac{x_1 + a}{y_1 + a}x + \frac{(x_1^2 + y_1^2 - 2a^2)}{2(y_1 + a)} \geq 0\}dxdy.$$

Наилучший ответ первого игрока найдем из условия

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial H}{\partial y_1} = 0.$$

Находим

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \mu(S_1) + (x_1 + y_1)\frac{\partial \mu(S_1)}{\partial x_1} = \tag{3.2}$$

$$\mu(S_1) + (x_1 + y_1) \int_R \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_1}{y_1 + a} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + (-\frac{x_1 + a}{y_1 + a}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - 2a^2}{2(y_1 + a)})^2)\} dx.$$

Приравняем (3.2) нулю и потребуем, чтобы решение уравнения достигалось в точке $x^1 = y^1 = a$. Это приводит к нахождению оптимального значения параметра a. Заметим, что при этом из симметрии следует, что $\mu(S_1) = 1/2$. Тогда

$$\frac{1}{2} - 2a \int_R \frac{1}{2\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + x^2)\} \frac{-x + a}{2a} dx = 0,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x + a)\frac{1}{2\pi} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2},$$

и наконец получаем оптимальное значение a

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Нетрудно проверить, что выполняются достаточные условия достижения максимума функции $H(x, y)$ в точке (a, a).

Таким образом, оптимальные стратегии игроков в данной игре это предложения $(-\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$ и $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ соответственно. Отметим отличие от оптимального решения для одномерной арбитражной процедуры [2], где равновесие имеет вид $(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$.

4. Эффект корреляции на оптимальное решение

Выше мы рассмотрели модель конкурса, где проекты оцениваются по двум критериям, и решения арбитра моделировались независимыми нормальными случайными величинами. Рассмотрим эту же задачу в предположении, что решения арбитра являются зависимыми. Это соответствует случаю, когда по каждому из критериев приглашается отдельный эксперт, и при этом решения экспертов являются коррелированными.

Предположим, что для определения победителя используется процедура с нормальным распределением $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}$ $(x^2+y^2-2rxy)\}$, здесь $r : r \le 1$ – коэффициент корреляции.

Также, как в предыдущей модели, воспользуемся симметрией. Предположим, что второй игрок использует стратегию $(-a,-a)$ и будем искать наилучший ответ первого игрока в виде $(x_1 = y_1 = a)$. Дифференцируя функцию выигрыша (3.1) с новым распределением, и подставляя значения $x_1 = y_1 = a$ приходим к условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x+a) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2}{1-r}} dx = \frac{1}{2},$$

откуда

$$a = \sqrt{\pi(1+r)}.$$

Мы видим, что зависимость между решениями арбитра позволяет увеличивать оптимальные значения предложений игроков.

5. Модель конкурса для трех лиц с ненулевой суммой

Рассмотрим теперь конкурс проектов трех лиц, в котором игрок I заинтересован максимизировать сумму $x+y$, игрок II заинтересован напротив минимизировать x, а игрок III минимизировать y. Пусть арбитр представлен нормальным распределением на плоскости $f(x,y) = g(x)g(y)$, где $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$.

Воспользуемся опять симметрией задачи. Оптимальные стратегии должны иметь вид

для игрока I: (c,c),

для игрока II: $(-a,0)$,

для игрока III : $(0,-a)$.

Чтобы найти значения параметров a и c, поступим следующим образом. Предположим, что игроки II и III представили на конкурс проекты соответственно $(-a, 0)$ и $(0, -a)$. Пусть игрок I, представил на конкурс проект (x_1, y_1), где $x_1, y_1 \geq 0$. Тогда плоскость проектов разобьется на три множества (см. рис. 3), разделяемые прямыми $y = x$ и

$$l_2 : y = -\frac{x_1 + a}{y_1} x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2y_1}$$

и

$$l_3 : y = -\frac{x_1}{y_1 + a} x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2(y_1 + a)}.$$

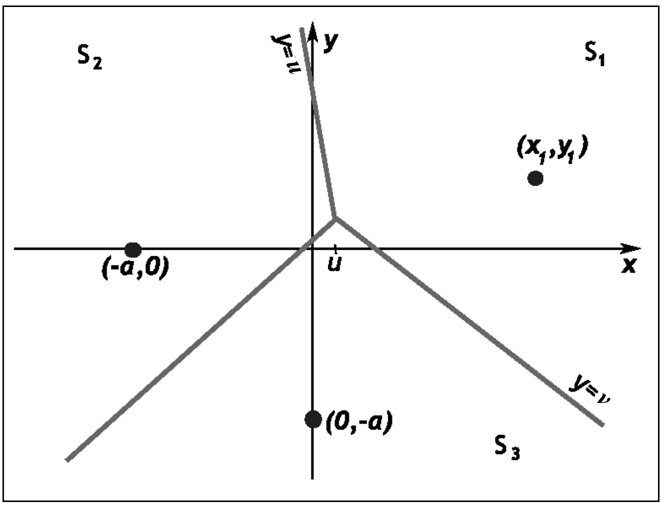


Рисунок 3. Конкурс трех проектов на плоскости

Все три прямые пересекаются в одной точке $x = y = x_0$, где

$$x_0 = \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2(x_1 + y_1 + a)}.$$

Нас в первую очередь интересует область S_1 с границами l_2 и l_3. Запишем выигрыш первого игрока

$$H_1(x_1, y_1) = (x_1 + y_1)[\int_{-\infty}^{x_0} g(x)dx \int_u^{\infty} g(y)dy + \int_{x_0}^{\infty} g(x)dx \int_v^{\infty} g(y)dy], \tag{5.1}$$

где

$$u = -\frac{x_1 + a}{y_1}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2y_1},$$

$$v = -\frac{x_1}{y_1 + a}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - a^2}{2(y_1 + a)}.$$

Упрощая (5.1), приходим к выражению

$$H_1(x_1, y_1) = (x_1 + y_1)\left[1 - \int_{-\infty}^{x_0} g(x)G(u)dx - \int_{x_0}^{\infty} g(x)G(v)dx\right], \quad (5.2)$$

где $G(x)$ – функция нормального распределения. Максимум функции (5.2) достигается при $x_1 = y_1 = c$ и является функцией от a.

Теперь зафиксируем стратегию первого игрока (c, c), $c > 0$ и предположим, что игрок III выбрал стратегию $(0, -b)$. Пусть игрок II выбрал стратегию $(-a, 0)$ и будем искать его наилучший ответ на стратегии игроков I и III. Плоскость проектов разобьется на три области (см. рис. 4). Нас интересуют границы области S_2:

$$l_1 : y = -\frac{c + a}{c}x + \frac{2c^2 - a^2}{2c}$$

и

$$l_3 : y = \frac{a}{b}x - \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

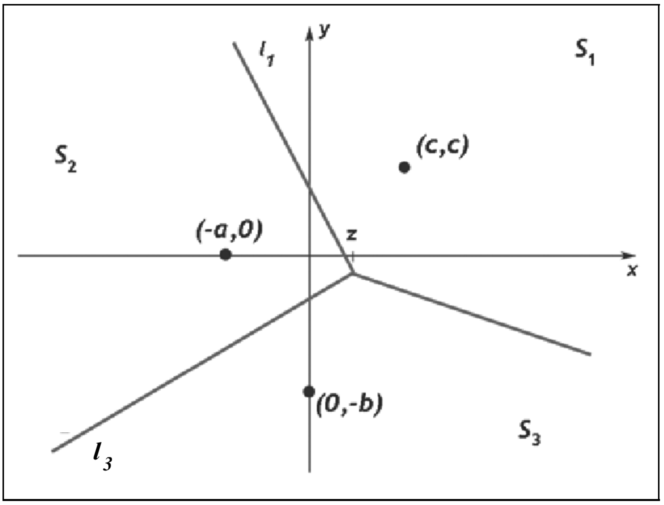


Рисунок 4. Конкурс трех проектов на плоскости

Точка пересечения областей имеет абсциссу

$$z = \left(\frac{2c^2 - a^2}{2c} - \frac{a^2 - b^2}{2b}\right) \frac{1}{a/b + 1 + a/c}.$$

Тогда выигрыш игрока II равен

$$H_2(a) = a \left[\int_{-\infty}^{z} g(x)dx \int_{v_1}^{v_2} g(y)dy\right] =$$

$$= a[\int_{-\infty}^{z} \left(G(v_2) - G(v_1)\right) f(x)dx, \tag{5.3}$$

где

$$v_1 = \frac{a}{b}x - \frac{b^2 - a^2}{2b},$$

$$v_2 = -\frac{c+a}{c}x + \frac{2c^2 - a^2}{2c}.$$

Из соображений симметрии минимум выражения (5.3) должен достигаться при $a = b$. Из этих двух задач оптимизации можно найти оптимальные значения параметров a и c. Численное моделирование приводит к следующему набору приближенных значений для оптимальных параметров

$$a = b \approx 1.7148, \quad c \approx 1.3736.$$

При этом, выигрыши игроков в равновесии

$$H_1 \approx 0.920, \quad H_2 = H_3 \approx 0.570,$$

и вероятности попадания в соответствующие области равны

$$\mu(S_1) \approx 0.335, \quad \mu(S_2) = \mu(S_3) \approx 0.332.$$

6. Проведение конкурса с участием арбитражного комитета

Предположим теперь, что решение о принятии проекта принимает не один арбитр, а несколько. При этом, каждый арбитр руководствуется тем же самым распределением вероятностей. Рассмотрим арбитражный комитет, состоящий из $2m - 1$ членов. Чтобы проект был принят, необходимо чтобы за него проголосовали больше половины членов арбитражного комитета. Тогда выигрыш игрока i определяется следующим образом

$$H_i(x^i) = h_i(x^i)\left\{C_{2m-1}^{m}\mu_i^{m}\,(1-\mu_i)^{m-1} + C_{2m-1}^{m+1}\mu_i^{m+1}\,(1-\mu_i)^{m-2} + \ldots + \mu_i^{2m-1}\right\}$$

где $\mu_i = \mu(S_i), i = 1, \ldots, n$.

Например, если число членов арбитражного комитета равно трем, то выигрыш игрока i определяется следующим образом:

$$H_i = h_i(x^i)\left(3\mu_i^2(1-\mu_i) + \mu_i^3\right) = h_i(x^i)\left(3\mu_i^2 - 2\mu_i^3\right), i = 1, \ldots, n.$$

Равновесие в данном случае находится таким же образом как и в случае одного арбитра. Рассмотрим, например, модель конкурса с двумя участниками, рассмотренную в разделе 3. Функция выигрыша примет вид:

$$H(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_1 + y_1)\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k}\mu^{m+k}\overline{\mu}^{m-1-k},$$

где $\mu = \mu(S_1), \overline{\mu} = 1 - \mu$. Предполагая, что второй игрок использует стратегию $x_2 = y_2 = -a$, найдем наилучший ответ первого игрока. Для этого вычислим

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k}\mu^{m+k}\overline{\mu}^{m-1-k} + \tag{6.1}$$

$$+(x_1 + y_1)\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k}\mu^{m+k-1}\overline{\mu}^{m-2-k}((m+k)\mu - (m-1-k)\overline{\mu})\,\frac{\partial\mu(S_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Из симметрии задачи следует, что в равновесии $\mu = \mu(S_1) = 1/2$ и $x_1 = y_1 = a$. Подставив в (6.1), получим

$$\frac{1}{2} + 2a\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{m+k}(2k+1)\frac{\partial\mu(S_1)}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{1}{2} + mC_{2m-1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}\int_R \frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + x^2)\}(x-a)dx = 0,$$

откуда находим оптимальное значение a

$$a = \frac{2^{2m-2}}{mC_{2m-1}^{m}}\sqrt{\pi}.$$

При больших m согласно локальной предельной теореме

$$mC_{2m-1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = (2m-1)C_{2m-2}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} \approx 2\sqrt{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда при $m \to \infty$

$$a \approx \frac{\pi}{2\sqrt{m}} \to 0.$$

Видим, что увеличение членов арбитражного комитета приводит к уменьшению разброса оптимальных значений предложений игроков.

7. Заключение

В работе предложена новая теоретико-игровая модель проведения конкурсов с использованием арбитражных процедур. Эта схема легко может быть реализована в компьютерной среде.

Для решения какой-то практической задачи (например строительство дома) объявляется конкурс. В начале конкурса создается конкурсная комиссия. Эксперты (арбитры) оценивают данную задачу по каждому из параметров. Формируется распределение вероятностей, соответствующее мнению экспертов.

После этого игроки вносят свои предложения на конкурс. Комиссия сразу же может отбросить проекты, значения которых доминируются другими проектами. После этого наступает фаза выбора победителя. Решения арбитра или нескольких арбитров моделируются случайными величинами в пространстве проектов. Ближайший к решению арбитра проект объявляется победителем. В случае арбитражного комитета проводится голосование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Менчер А.Э., Токарева Ю.С. *О равновесии в модели переговоров с арбитром* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009, N 5. С. 77-83.

2. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения.* Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, Лань, 2009. 446 с.

3. De Berg M., Van Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O. *Computational Geometry.* Springer, 2000.

4. Farber H. *An analysis of final-offer arbitration* // Journal of conflict resolution. 1980. № 24. P. 683–705.

5. Gibbons R. *A Primer in Game Theory*, Prentice Hall. 1992.

6. Kilgour M. *Game-theoretic properties of final-offer arbitration* // Group Decision and Negot. 1994. N 3. P. 285–301.

7. Mazalov V., Mentcher A. and Tokareva J. *On a discrete arbitration procedure* // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2006. Vol. 63(3). P. 325–330.

8. Mazalov V., Tokareva J. *Bargaining model on the plane* // Algorithmic and computational theory in algebra and languages. 2008. P. 42–49.

GAME-THEORETIC MODELS OF TENDER'S DESIGN

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., prof. (vmazalov@krc.karelia.ru).
Julia S. Tokareva, Zabaikalsky State Humanitarian Pedagogical University named after N.Tchernishevsky, Cand.Sc. (jtokareva2@mail.ru).

Abstract: We consider n-person non-zero sum game related with the design of tender. Players present some projects which are characterized by some vector of parameters. Arbitrator or some juri chooses one of the projects using a stochastic procedure with some distribution function. The winner receives a payoff which depends on the parameters of the project. The game-theoretic model of the tender is presented and the equilibrium in two and three-dimensional models is derived

Keywords: game-theoretic tender's model, n-person game, Voronoi diagram, arbitration procedure, Nash equilibrium.

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 79-98

УДК 519.612:632.4
ББК 22.18

МОДЕЛЬ ЭНДОГЕННОГО ФОРМИРОВАНИЯ КОАЛИЦИЙ С ДВУМЯ ТИПАМИ ИГРОКОВ

Денис С. Степанов
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Московский Государственный Университет
119991, Москва, Ленинские горы, 2-й уч. корпус
e-mail: dn.step@gmail.com

Рассматривается модель формирования коалиций игроками, характеризуемыми значением некоторого параметра (географическое положение, идеальная точка). Новизна постановки заключается в предположении о *неоднотипности* игроков: к основному множеству добавляется небольшая доля игроков с функцией выигрыша, отличной от функции выигрыша игроков основного типа. Рассмотрены различные концепции коалиционной устойчивости и получены соответствующие необходимые и достаточные условия. Проанализировано соотношение данных условий для игр с одним и двумя типами игроков.

Ключевые слова: коалиционная устойчивость, равновесие Нэша, слабое коалиционное равновесие (СКР).

1. Введение

Одно из современных направлений в теории игр связано с исследованием моделей эндогенного формирования коалиций в больших неоднородных популяциях игроков. В такой игре игроки похожи в смысле вида функции выигрыша и множества стратегий, но различаются по некоторому параметру $x \in X$ (*идеальная точка*), при этом все множество игроков описывается распределением по указанному параметру. Стратегия игрока — выбор некоторой коалиции, стратегия коалиции представляет собой точку из X и определяется по заданному правилу в зависимости от состава коалиции. Размер коалиции пропорционален доле игроков, вошедших в нее. Игроки однородны по функции выигрыша, которая зависит от двух параметров: возрастает по размеру коалиции и убывает по расстоянию между идеальной точкой x и стратегией коалиции.

Подобные модели используются в политологии и экономической географии при изучении вопросов устойчивости разбиения населения по странам [1, 2], а также по юрисдикциям (муниципалитетам или регионам) внутри страны [3, 4]. Они находят также применение при анализе устойчивых разбиений избирателей по политическим партиям [5, 6], социальных сетей (в интернет-сообществах) и коалиций вообще [7, 8]. В указанных исследованиях авторы рассматривают вопросы существования и коалиционной устойчивости равновесий Нэша и изучают их свойства.

Однако, в данной области актуальной и практически неисследованной проблемой является учет в моделях неоднородности игроков не только по значению параметра, но и по характеру зависимости выигрыша от аргументов, то есть, другими словами, во всех упомянутых исследованиях предполагается, что игроки однотипны с точки зрения вида функции выигрыша. В реальной жизни можно наблюдать множество примеров, подтверждающих, что выигрыши агентов с одинаковой идеальной точкой в целом могут сильно отличаться или меняться с течением времени (вследствие каких-либо событий).

В настоящей работе рассматриваются структуры, являющиеся равновесными в модели с однотипными игроками, и исследуются их свойства в игре с двумя типами игроков, отличающихся характером зависимости выигрыша от аргументов. Для таких структур были найдены необходимые и достаточные условия *локальной устойчивости* (то есть устойчивости к образованию новых коалиций путем раскола или объединения существующих) и исследована их связь с аналогами для случая однотипной группы игроков. Также найден критерий существования *слабого коалиционного равновесия* (то есть равновесия, в котором не выгодно образование вообще любых новых коалиций — например, из частей нескольких существующих коалиций).

2. Модель

Сначала приведем, следуя [8], формальное описание игры в случае, когда игроки относятся к одному типу. Пусть множество идеальных точек можно представить как отрезок $[0,1] = X$, а игроки равномерно распределены по идеальным точкам на данном отрезке. Есть достаточно большой набор меток M: «Коалиция 1», «Коалиция 2»,…(например, в случае формирования политических партий это «социалисты», «демократы», «либералы» и т.д.). Пусть $M = \{1, 2 \ldots, \bar{M}\}$. Каждый из игроков, выбирая соответствующую метку, становится членом коалиции или же не вступает ни в одну из коалиций (метка «0»). Стратегия (политика) коалиции определяется как медиана распределения членов коалиции по идеальным точкам (самое распространенное в литературе правило). Размер коалиции пропорционален доле игроков, выбравших соответствующую метку.

В общем случае коалицией i является множество игроков, выбравших метку i. В дальнейшем ограничимся анализом ситуаций, в которых каждая коалиция $i \in M$ характеризуется интегрируемой функцией $\delta_i(x), x \in X$, описывающей плотность распределения по идеальным точкам игроков, выбравших метку i. В этом случае размер r_i коалиции $i \in M$ формально определяется как $r_i = \int_0^1 \delta_i(x)dx$.

Ситуация игры $\mathcal{D}$ определяется как множество коалиций ненулевого размера $I \subset M$ и набор $(\delta_i(x), i \in I)$ интегрируемых функций, показывающих долю игроков с идеальной точкой x, выбравших коалицию $i \in I$: $\mathcal{D} = \left\{\delta_i(x) \geq 0 : \sum\limits_{i \in I} \delta_i(x) \leq 1, x \in [0,1], i \in I\right\}$. Пусть $\delta_0(x) = 1 - \sum\limits_{i \in I} \delta_i(x)$ — доля игроков, не вступивших в коалиции. Стратегия P_i коалиции задается условием $\int_0^{P_i} \delta_i(x)dx = \int_{P_i}^1 \delta_i(x)dx$. Выигрыш игрока с идеальной точкой x, вошедшего в коалицию $i \in I$, определяется как

$$U(x, i, \mathcal{D}) = R\left(r_i\left(\mathcal{D}\right)\right) - L\left(\left|P_i\left(\mathcal{D}\right) - x\right|\right), \qquad (2.1)$$

где $R(\cdot), L(\cdot)$ — некоторые положительные монотонно возрастающие функции, причем $L''(\cdot) \geq 0, R''(\cdot) \leq 0$. Выигрыш игрока в случае отказа от вступления в коалиции равен 0. Обозначим данную игру как $\mathcal{G}_1$.

Заметим, что выигрыш игрока в коалиции нулевого размера заведомо неположителен, поэтому будем предполагать, что доля игроков, выбравших такие коалиции, равна нулю.

В данной модели ситуация игры $\mathcal{D} = (\delta_i(x), i \in I)$ является *равновесием Нэша (РН)*, если для любого $x \in X$ и $i \in \bar{I}$ из того, что $\delta_i(x) > 0$ следует $i \in \operatorname*{Argmax}_{j \in \bar{I}} U(x, j, \mathcal{D})$, где $\bar{I} = I \cup 0$. То есть в РН каждый игрок выбирает коалицию, максимизирующую его выигрыш. Заметим, что *атомарная структура* (ни один из игроков не вступил в коалицию) — всегда РН.

Ниже исследуются *регулярные РН (РРН)*, то есть равновесия, в которых нет коалиций с одинаковой стратегией. Понятие *РРН* введено в [8], поскольку нерегулярные равновесия заведомо неустойчивы к объединению коалиций.

Рассмотрим следующую модификацию игры $\mathcal{G}_1$ — игру $\mathcal{G}_2$. К исходному множеству игроков (*типа 1* или *старого*, *основного* типа) добавляется некоторое количество игроков (*типа 2* или *нового* типа) с иной функцией выигрыша таким образом, что доля игроков нового типа в общем множестве игроков равна $\lambda > 0$. При этом рассматривается два варианта относительного распределения игроков разных типов:

D1 Игроки обоих типов равномерно распределены на всем отрезке $[0, 1]$.

D2 Игроки типа 2 равномерно распределены по идеальным точкам только на некотором сегменте $S \subset [0, 1]$ длины λ, а игроки типа 1 — на дополнении этого сегмента.

Пусть функция $J_t(x) \geq 0$ показывает долю игроков типа $t \in \{1, 2\}$ среди игроков с идеальной точкой $x \in [0, 1]$. Тогда $J_1(x) + J_2(x) = 1$ и в случае D1 функция $J_2(x) \equiv \lambda$, а в случае D2 — выражается как:

$$J_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in S; \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus S. \end{cases}$$

В игре $\mathcal{G}_2$ ситуация игры $\mathcal{D}$ определяется как множество коалиций ненулевого размера $I \subset M$ и набор интегрируемых функций $\delta_i^t(x)$, показывающих долю игроков типа $t \in \{1,2\}$ с идеальной точкой x, выбравших коалицию $i \in I$:

$$\mathcal{D}(I)=\left\{\delta_i^t(x) \geq 0 : \sum_{i\in I}\left((1-\lambda)\delta_i^1(x)+\lambda\delta_i^2(x)\right) \leq 1, x\in[0,1], i\in I, t=1,2\right\} \tag{2.2}$$

Таким образом, в игре $\mathcal{G}_2$ каждая коалиция $i \in I$ задается парой функций (δ_i^1, δ_i^2). Пусть $\delta_i(x) = (1-\lambda)\delta_i^1(x) + \lambda\delta_i^2(x)$ для $i \in I$ и $\delta_0(x) = 1 - \sum\limits_{i\in I}\delta_i(x)$. Размер r_i и стратегия P_i коалиции $i \in I$ определяется так же, как в игре $\mathcal{G}_1$. Выигрыш игрока в игре $\mathcal{G}_2$ определяется аналогично формуле (2.1), но каждому типу $t \in \{1,2\}$ соответствуют свои функции $R_t(\cdot)$ и $L_t(\cdot)$:

$$U_t(x,i,\mathcal{D}) = R_t\left(r_i\left(\mathcal{D}\right)\right) - L_t\left(\left|P_i\left(\mathcal{D}\right) - x\right|\right). \tag{2.3}$$

Причем $L_t(\cdot), R_t(\cdot) \geq 0, L_t'(\cdot), R_t'(\cdot) \geq 0, L_t''(\cdot) \geq 0$ и $R_t''(\cdot) \leq 0$. В дальнейшем для обозначения выигрыша игрока x типа $t \in (1,2)$ в коалиции i размера r_i со стратегией P_i будем использовать запись $U_t(x, r_i, P_i)$.

В игре $\mathcal{G}_2$ равновесие Нэша — такая ситуация игры $\mathcal{D} = (\delta_i^t(x), i \in I,\ t = 1,2)$ в которой, для любого типа $t \in \{1,2\}, x \in X$ и $i \in \bar{I}$ из того, что $\delta_i^t(x) > 0$ следует $i \in \operatorname*{Argmax}_{j\in\bar{I}} U_t(x,j,\mathcal{D})$, где $\bar{I} = I \cup 0$. Понятие регулярного РН вводится аналогично игре $\mathcal{G}_1$.

Поиск равновесных структур в данной теоретико-игровой модели, исходя из определения, предполагает решение сложных экстремальных задач на функциональном пространстве: необходимо найти множество $\bar{I} \subset M \bigcup\{0\}$ и такой набор интегрируемых функций $\bar{\mathcal{D}}\left(\bar{I}\right) = \left\{\delta_i^t(x), i \in \bar{I}, t = 1,2\right\}$, удовлетворяющий условию (2.2), что для любого $x \in [0,1]$ из того, что $\delta_i(x) > 0$, следует, что $i \in \operatorname*{Argmax}_{j\in\bar{I}} U(x, r_j, P_j)$, где r_j и P_j в свою очередь зависят от $\bar{\mathcal{D}}$. Применение стандартных оптимизационных методов для решения данной задачи не приводит к содержательным результатам. В настоящей работе развивается подход, предложенный в работе [8], для описания равновесных коалиционных структур и их коалиционной устойчивости в игре $\mathcal{G}_1$.

3. Равновесие Нэша

Напомним, что в игре $\mathcal{G}_1$ под коалицией $i \in I$ мы понимаем соответствующую функцию плотности δ_i. Носитель $\operatorname{supp}\delta_i$ функции δ_i задает множество S_i идеальных точек игроков, выбравших коалицию i. В общем случае $\delta_i(x)$ для данного $x \in [0,1]$ может принимать любое значение из отрезка $[0,1]$ и, следовательно, по множеству S_i нельзя однозначно восстановить исходную коалицию. Но в равновесии Нэша $\delta_i(x) = 1$ при $x \in \operatorname{int} S_i$ и множество S_i однозначным образом (с точностью до множества игроков, расположенных на его границе, мера которого равна нулю) соответствует множеству игроков, выбравших коалицию $i \in I$. Поэтому при поиске равновесий под коалицией $i \in I$ будем понимать более простой объект — множество S_i.

Можно показать, что в игре $\mathcal{G}_1$ в регулярном равновесии отрезок [0,1] разбивается на непересекающиеся интервалы идеальных точек игроков, выбравших одну коалицию (или не вступивших ни в одну из коалиций). Более того в работе [8] показано, что существует всего три типа равновесных разбиений игроков на коалиции (см. теорему 3.1).

Рассмотрим уравнение $R_t(r) - L_t(r/2) = 0$ для некоторого $t \in \{1,2\}$. Отметим, что если данное уравнение имеет положительное решение, то в указанных предположениях оно единственно. Обозначим данное решение через r^*. Рассмотрим некоторое натуральное число m. Для игры $\mathcal{G}_1$ с игроками типа $t \in \{1,2\}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. ([8], стр.1522) *В игре $\mathcal{G}_1$ существуют следующие три типа РРН.*
a) Разбиение отрезка $[0,1]$ на m коалиций одинакового размера $r = 1/m$ является РРН тогда и только тогда, когда $r \le r^*$. В частности, если $r^* \ge 1$ или $R_t(r) > L(r/2)$ для любого $r > 0$, то такая структура является РРН для любого m; если $L_t'(0) > 2R_t'(0)$, то единственное РРН — атомарная структура.
b) Если $r^* \in (0,1)$, то для любого $u \in \left(0, \max\limits_r \left(R_t(r) - L_t\left(r/2\right)\right)\right)$ существуют два решения $r_1(u), r_2(u) \in (0,1)$ уравнения $u = R_t(r) - L_t\left(r/2\right)$, и если существуют натуральные числа m_1, m_2 такие, что $m_1 r_1(u) + m_2 r_2(u) = 1$, то разбиение отрезка $[0,1]$ на m_1 коалиций размера $r_1(u)$ и m_2 коалиций размера $r_2(u)$ является РРН (коалиции

могут располагаться в любом порядке).
c) Для любого $m < 1/r^*$ любое разбиение отрезка $[0,1]$ на m коалиций размера r^* и $l \leq m+1$ интервалов игроков, воздержавшихся от вступления в коалиции, является РРН.

Не существует других РРН кроме указанных.

Рассмотрим типы равновесий, описанные в пунктах b) и c) утверждения. Каждый из данных типов равновесий оказывается неустойчивым в некотором смысле. Коалиционная структура, соответствующая равновесию типа b) в игре $\mathcal{G}_1$, в ситуации общего положения не будет равновесной в игре $\mathcal{G}_2$, поскольку из того, что $R_t(r_1) - L_t(r_1/2) = R_t(r_2) - L_t(r_2/2)$ для $t = 1$, вообще говоря, не следует выполнение данного равенства для $t = 2$. А равновесие типа c) неустойчиво к образованию новых коалиций (из игроков, выбравших стратегию «0»). Таким образом, при исследовании эффектов, возникающих в равновесиях, при переходе от игры $\mathcal{G}_1$ к игре $\mathcal{G}_2$ будем рассматривать только структуры, описанные в пункте a) утверждения. Обозначим подобную структуру через K_m, а через r — размер коалиции в $K_m : r = 1/m$. Данная структура является равновесной тогда и только тогда, когда выигрыш игрока, находящегося на границе коалиции, неотрицателен:

$$R_t(r) - L_t(r/2) \geq 0. \tag{3.1}$$

В отличие от игры $\mathcal{G}_1$ в игре $\mathcal{G}_2$ коалиции $i \in I$ соответствует пара функций плотности (δ_i^1, δ_i^2). Аналогичным образом носитель функции $\mathrm{supp}\delta_i^t$ задает множество S_i^t идеальных точек игроков типа $t \in \{1,2\}$, выбравших коалицию i, и в равновесии множество S_i^t однозначным образом (с точностью до множества игроков, расположенных на его границе, нулевой меры) соответствует множеству игроков типа $t \in \{1,2\}$, выбравших коалицию $i \in I$. В этом случае под коалицией $i \in I$ будем понимать пару множеств (S_i^1, S_i^2). Это оказывается целесообразно и при исследовании коалиционной устойчивости равновесий, поскольку если $S_i^t = S_j^t, t = 1,2$, и выгодно образование коалиции $i : \delta_i^t(x) \leq 1, x \in S_i^t, t = 1,2$, то выгодно образование коалиции $j : \delta_j^t(x) = 1, x \in S_j^t, t = 1,2$.

Для коалиции $i \in I$ такой, что каждое из множеств $S_i^t, t = 1,2$, представляет собой отрезок, *границей коалиции* i будем называть множество крайних точек соответствующих интервалов. В этом случае *соседними* для коалиции i будут коалиции, пересечение границ которых с границей коалиции i не пусто.

4. Локальная устойчивость

Равновесие Нэша устойчиво в том смысле, что отклонение одного игрока от состояния равновесия не приводит к увеличению его выигрыша. В то же время хорошо известны примеры, когда одновременное отклонение нескольких игроков от равновесия приводит к увеличению выигрыша всех этих игроков. В связи с этим в литературе рассматриваются различные понятия коалиционной устойчивости равновесий. Основная часть данной работы также посвящена исследованию устойчивости коалиционных структур, являющихся регулярными равновесиями Нэша как в игре $\mathcal{G}_1$ (с игроками типа 1), так и в игре $\mathcal{G}_2$ (с игроками обоих типов), к образованию новых коалиций.

В работе рассматриваются следующие понятия коалиционной устойчивости. РН устойчиво к *локальному расколу*, если не существует новой коалиции, являющейся подмножеством некоторой коалиции и обеспечивающей бо́льшие выигрыши всем своим членам. РН устойчиво к *объединению*, если не существует новой коалиции, являющейся объединением соседних коалиций и обеспечивающей бо́льшие выигрыши всем своим членам. Если РН устойчиво к локальному расколу и объединению, то оно *локально устойчиво*.

Теорема 4.1. ([8], стр. 1522) *В игре $\mathcal{G}_1$ с игроками типа $t \in \{1,2\}$ равновесная структура $K_m, m = 2, 3, \ldots,$ локально устойчива тогда и только тогда, когда*

$$R_t(2r) - R_t(r) \le L_t(r) - L_t(r/2). \qquad (4.1)$$

Как было указано в предыдущем разделе, в игре $\mathcal{G}_1$ в равновесной структуре K_m выполнено условие (3.1) неотрицательности выигрыша граничного игрока. Оказывается, что указанное условие является критерием устойчивости структуры к локальному расколу. При невыполнении данного условия части агентов, близких к границе коалиции, невыгодно быть в ее составе (им выгодно выйти из состава данной коалиции или образовать новую коалицию меньшего размера). Таким образом, в данной игре равновесная структура

K_m всегда устойчива к локальному расколу. Условие (4.1) гарантирует, что объединение соседних коалиций невыгодно. Это следует из того, что объединение любого числа соседних коалиций невыгодно, когда невыгодно объединение двух соседних коалиций, а последнее определяется величиной выигрыша граничных агентов объединенной коалиции. Покажем, что для игры $\mathcal{G}_2$ справедливы аналогичные результаты (при любом из предположений D1-D2).

Теорема 4.2. *Пусть для игроков типа 1 выполнены условия (3.1)–(4.1). В этом случае структура K_m является равновесием Нэша и локально устойчива в игре $\mathcal{G}_2$ тогда и только тогда, когда для игроков типа 2 выполнено условие (3.1).*

Доказательство. Следуя доказательству утверждения 2 из работы [8], можно показать, что условие (3.1) обеспечивает устойчивость к индивидуальным отклонениям игроков нового типа, а также к образованию коалиций (достаточно малого размера), состоящих из этих игроков (и, возможно, игроков старого типа). При этом не требуется выполнения условия (4.1), поскольку устойчивость к локальному объединению будет обеспечиваться игроками старого типа, для которых выполнены условия локальной устойчивости (3.1)–(4.1). □

5. Слабое коалиционное равновесие

В данном разделе будет рассматриваться усиление понятия локальной устойчивости — понятие слабого коалиционного равновесия.

Равновесие Нэша называется *слабым коалиционным равновесием (СКР)*, если не существует новой коалиции, обеспечивающей бóльшие выигрыши всем своим членам.

Сначала приведем результаты для игры $\mathcal{G}_1$, а в последующих подразделах — аналогичные результаты для игры $\mathcal{G}_2$ для вариантов распределения игроков D1 и D2.

При исследовании коалиционной устойчивости вводится дополнительное предположение относительно функций $R(\cdot)$ и $L(\cdot)$: $L'''(\cdot) \geq 0, R'''(\cdot) \leq 0$.

5.1. *СКР* в игре $\mathcal{G}_1$

В работе [8] было доказано достаточное условие эквивалентности понятий локальной устойчивости и слабого коалиционного равновесия в случае $R(r) \equiv r$ (теорема 2, стр. 1522). Ниже приведем обобщение данного утверждения.

Теорема 5.1. *В игре $\mathcal{G}_1$ с игроками типа $t \in \{1,2\}$ локально устойчивая структура K_m является СКР тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$L'_t\,(r/2) \geq R'_t(r) \text{ и } \tag{5.1}$$

$$R_t(r^*) - R(r) + L_t(r^*/2 - r/2) - L_t(r^*/2) \leq 0, \tag{5.2}$$

где $r^* = \min\left\{x^*, \frac{3}{2}r\right\}$, если существует решение уравнения $R'_t(x^*) + \frac{1}{2}L'_t(x^*/2 - r/2) - \frac{1}{2}L'_t(x^*/2) = 0$, и $r^* = r$ иначе.

Дополнительные ограничения (5.1)–(5.2) на локально устойчивые структуры возникают по следующей причине. Из доказательства теоремы 2 из [8] видно, что условия локальной устойчивости (3.1) и (4.1) обеспечивают устойчивость к образованию любых коалиций размера меньше r и больше $2r$ соответственно, но не гарантируют невыгодность образования коалиций, размер которых принадлежит интервалу $(r, 2r)$.

Также в работе [8] приведено достаточное условие *СКР*, в котором ограничения на параметры модели формулируются в более простом виде.

Следствие 5.1. ([8], стр. 1522) *Локально устойчивая структура K_m является СКР, если выполнено условие (5.1) и условие*

$$R'_t(2r) + \tfrac{1}{2}L'_t\,(r/2) - \tfrac{1}{2}L'_t(r) \geq 0. \tag{5.3}$$

5.2. Игра $\mathcal{G}_2$ в предположении D1.

Напомним, что вариант D1 предполагает равномерное распределение игроков двух типов на отрезке $[0,1]$.

В зависимости от свойств функций R_2 и L_2 добавление игроков нового типа к исходному множеству игроков может может либо «разрушить» *СКР*, то есть привести к тому, что структура, являющаяся

СКР в игре $\mathcal{G}_1$, не будет *СКР* в игре $\mathcal{G}_2$, либо наоборот обеспечить устойчивость, если ее не было. Нас будет интересовать первый исход, который может произойти по двум причинам:

- A1 Игроки нового типа являются *бо́льшими индивидуалистами.* То есть либо более чувствительны к росту удаленности: $L_2'(\cdot) > L_1'(\cdot)$, либо менее чувствительны к росту размера коалиции: $R_2'(\cdot) < R_1'(\cdot)$ (либо и то и другое одновременно).

- A2 Игроки нового типа являются *бо́льшими конформистами.* В этом случае предполагается выполнение неравенств, обратных неравенствам в предположении A1.

Рассмотрим последовательно данные случаи и для каждого из них приведем утверждения, характеризующие *СКР* в игре $\mathcal{G}_2$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнено предположение A1. Структура K_m является СКР в игре $\mathcal{G}_2$ тогда и только тогда, когда она является равновесной в игре $\mathcal{G}_2$, то есть для игроков обоих типов выполнено условие (3.1), а также СКР в игре $\mathcal{G}_1$ с игроками типа 1, то есть для игроков типа 1 выполнены условия (4.1)–(5.2).*

Доказательство. Из выполнения предположения A1, а также неравенств (3.1)–(5.2) для игроков типа 1, следует, что возможен единственный случай, при котором возникновение игроков нового типа может привести к тому, что структура K_m, являющаяся *СКР* в игре $\mathcal{G}_1$ (с игроками типа 1), не является *СКР* в игре $\mathcal{G}_2$. Это возможно только, когда игрокам типа 2 выгодно выйти из состава существующей коалиции, посредством образования коалиции достаточно малого размера. Но при выполнении неравенства (3.1) игрокам типа 2 невыгодно создание такой коалиции. □

Заметим, что предположение A2 не ограничивает «степень» конформизма игроков нового типа, которая a priori может быть достаточно велика для того, чтобы разрушить любое *СКР*. Например, если значение $L_2'(\cdot)$ на отрезке [0,1] ограничено достаточно малой величиной, то игрокам типа 2 может быть выгодно всем вместе присоединиться к какой-либо существующей коалиции и тем самым образовать новую коалицию большего размера. В связи с этим необходимо ввести дополнительное ограничение на выигрыш игроков нового типа и самое естественное в данном случае — потребовать выполнение условия устойчивости к локальному объединению для игроков типа 2.

Теорема 5.3. *Пусть выполнено предположение A2 и условия локальной устойчивости (3.1)–(4.1) структуры K_m для каждого из типов. Структура K_m является СКР тогда и только тогда, когда для типа 1 выполнены условия (5.1) и*

$$R_1((1-\lambda)r^*_\lambda + 2r\lambda) - R_1(r) + L_1(r^*_\lambda/2 - r/2) - L_1(r^*_\lambda/2) \le 0, \quad (5.4)$$

где $r^*_\lambda = \min\left\{x^*, \frac{3}{2}r\right\}$, если существует решение уравнения $(1-\lambda+\lambda 2r/x^*)R_1'((1-\lambda)x^*+2r\lambda)+\frac{1}{2}L_1'(x^*/2-r/2)-\frac{1}{2}L_1'(x^*/2)=0$, и $r^*_\lambda = r$ иначе, а для типа 2 — неравенство

$$L_2'(r/2) \ge \lambda R_2'(r). \quad (5.5)$$

Доказательство. Пусть π_1 — новая (потенциальная) коалиция со стратегией P_1 и размером r_1. Рассмотрим сначала случай $r_1 \ge 2r$. Тогда π_1 формируется из членов как минимум двух коалиций из K_m, и, следовательно, существует игрок x типа $t \in \{1, 2\}$, такой что $|P_1 - x| \ge r_1/2$. Справедливо неравенство $R_t(r_1) - L_t(|P_1 - x|) \le R_t(r_1) - L_t(r_1/2) = U_t(r_1)$. Обозначим $\Delta U_t(r_1) = U_t(r_1) - U_t(r)$. Тогда из устойчивости к локальному объединению вытекает, что $\Delta U_t(2r) \le 0$. С учетом того, что $\Delta U_t(r) = 0$ и $\Delta U_t(\cdot)$ — вогнутая функция получаем, что для любого размера $r_1 \ge 2r$ прирост выигрыша игрока x при смене коалиции $\Delta U_t(r_1) < 0$.

Пусть $r_1 \le r$ и коалиция π_1 представляет собой связное множество. Предположим, что она несимметрична относительно своей стратегии. Пусть x — игрок типа $t \in \{1, 2\}$, чья идеальная точка расположена ближе всего к стратегии его исходной коалиции P. С учетом предположений относительно знака второй производной функций $R_t(\cdot)$ и $L_t(\cdot)$ прирост выигрыша этого игрока будет минимальным (среди игроков его типа). Пусть ρ обозначает расстояние от P_1 до ближайшей границы исходной коалиции из K_m, которой принадлежит P_1. Фиксируем значение r_1 и подберем параметр $\varepsilon = const$ таким образом, что $|x - P_1| = \varepsilon r_1$, причем $\varepsilon > \frac{1}{2}$ (так как x — ближайший к P игрок). Прирост выигрыша игрока x при переходе в коалицию π_1 равен $\Delta U_t(x, r_1, P_1) = R_t(r_1) - R_t(r) + L_t(z_1) - L_t(z_2)$, где $z_1 = r/2 - (\varepsilon r_1 + \rho), z_2 = |x - P_1| = \varepsilon r_1$ (далее по тексту индекс t опускаем). Заметим стразу, что ΔU убывает по ρ (то есть оптимальное положение коалиции — когда P_1 находится на границе существующих коалиций). Пусть $V(r_1) = \Delta U(r_1) + R(r) - R(r - r_1)$ и, значит, $\Delta U(r_1) \leq V(r_1)$ и функция $V(r_1)$ вогнута.

Существует значение r_1^* такое, что $z_1 = z_2$. При этом $r_1^* \leq \frac{r}{2}$ поскольку при $r_1^* > \frac{r}{2}$ значение $z_1 = \frac{r}{2} - \varepsilon \frac{r_1^*}{2} < \frac{r_1^*}{4} < z_2$ и $\Delta U < 0$. Значение $V(0) = -R(r) + L(r/2) \leq 0$ и $V(r_1^*) < 0$, следовательно, $V(r_1) \leq 0$ для всех $r_1 \leq r/2$.

Теперь предположим, что π_1 представляет собой произвольную (не обязательно связную) коалицию размера $r_1 \leq r$. Фиксируем игрока x, чья идеальная точка наиболее удалена от P_1. Существует связная коалиция размера r_1 со стратегией P_1', в которой x также является граничным игроком, и причем $|P_1' - x| \leq |P_1 - x|$. При этом $\Delta U(x, r_1, P_1) \leq \Delta U(x, r_1, P_1')$. Но выше было показано, что $\Delta U(x, r_1, P_1') \leq 0$.

Пусть, наконец, $r \leq r_1 \leq 2r$. Сначала покажем, что создание несимметричной коалиции (в смысле взаимного расположения множеств идеальных точек игроков типов 1 и 2) невыгодно. Существуют два варианта оптимального расположения π_1 относительно исходной структуры: когда π_1 содержит (a) одну или (b) две точки, соответствующие стратегиям некоторых коалиций из K_m.

Покажем для варианта (a) невыгодность создания несимметричных коалиций (в случае (b) доказательство проводится аналогичным образом). Обозначим: x_1, x_2 – граничные агенты типа T_1, z – расстояние от указанных граничных агентов до стратегии P_1 в случае симметричной коалиции, ρ – расстояние от агента x_i, до стратегии его исходной коалиции в случае симметричной коалиции, $\delta > 0$ – смещение стратегии P_1 относительно симметричного случая, d – смещение агента x_1 относительно его положения в симметричной конфигурации (см. рис. 1). Для того, чтобы «компенсировать» игроку x_1 потерю выигрыша из-за смещения политики P_1 в сторону от него, необходимо подобрать достаточно большое смещение d. Покажем, что это невозможно без того, чтобы выигрыш агента x_2 не снизился по сравнению с его выигрышем в симметричной конфигурации. Прирост выигры-

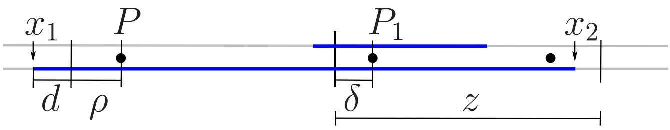


Рисунок 1. Несимметричная коалиция в случае (a).

ша каждого из агентов в этом случае равен (индексы при функциях $R(\cdot)$ и $L(\cdot)$ опускаем):

$$\begin{cases} \Delta_1 U(d,\delta) = R(r_1) - R(r) + L(\rho + d) - L(z + d + \delta), \text{для } x_1, \\ \Delta_2 U(d,\delta) = R(r_1) - R(r) + L(\rho - d) - L(z - d - \delta), \text{для } x_2. \end{cases}$$

Предположим, что существует функция $d(\delta)$ (дифференцируемая при $\delta \geq 0$) такая, что существует значение $\delta_0 > 0$ такое, что $\Delta U_i(d(\delta_0),\delta_0) > 0, i = 1,2$. В силу непрерывности рассматриваемых функций данные неравенства выполняются в некоторой окрестности точки δ_0 и $d'(\delta) > 0$ на некотором интервале из этой окрестности. Продифференцировав по δ каждый из приростов и сложив полученные выражения, получим:

$$\Delta_1 U' + \Delta_2 U' = d'\left[L'(\rho + d) - L'(\rho - d)\right] - d'\left[L'(z + d + \delta) - \right.$$
$$\left. - L'(z - d - \delta)\right] - \left[L'(z + d + \delta) - L'(z - d - \delta)\right].$$

Следовательно, так как интервал $(z-d-\delta, z+d+\delta)$ больше интервала $(\rho-d, \rho+d)$, значение $z+d+\delta$ больше $\rho+d$, а функция $L(\cdot)$ выпукла, то $\Delta_1 U' + \Delta_2 U' < 0$ для любого δ и, значит, $\Delta_1 U + \Delta_2 U < 0$. Таким образом, пришли к противоречию и $d = \delta = 0$.

С учетом доказанного выше, далее рассматриваются только симметричные коалиции, при этом также сохраняется деление на два случая — (a) и (b), описанное выше в доказательстве. Рассмотрим случай (a). Поместим начало координат в точку $P_1 = P$. Пусть $\frac{x}{2}$ — наиболее удаленный от стратегии коалиции агент нового типа из коалиции π_1, $\frac{z}{2}$ — соответствующий агент старого типа. Для любой конфигурации π_1 существует $\tau > 0$ такое, что $z = \tau x$. Заметим, что конфигурация π_1 такая, что x или z больше $2r$ или в которой x (или z) меньше r невыгодна. Таким образом, в случае (a) x и z могут принимать значения только из диапазона: $x, z \in [r, 2r]$.

Прирост выигрыша крайнего агента типа 1 при переходе в коалицию π_1 равен $\Delta U_1(x) = \Delta R_1 + L_1\left(r - \frac{x}{2}\right) - L_1\left(\frac{x}{2}\right)$, где $\Delta R_1 = R_1\left((1-\lambda)x + \lambda\tau x\right) - R_1(r)$ (прирост для игрока нового типа выписывается аналогичным образом). Заметим, что $\Delta U_1(r) = R_1((1-\lambda)r + \lambda\tau r) - R_1(r) = 0$ при $\tau = 1$ ($z = r$) и $\Delta U_1(r) > 0$ при $\tau > 1$. При этом $\Delta U_1''(x) \le 0$ и при $\tau = 1$ значение $\Delta U_1'(r) \le 0$ (следует из условия *СКР*) и, значит, $\Delta U_1'(x) \le 0$ для любого x. Таким образом, для существования устойчивости к образованию подобных коалиций необходимо и достаточно чтобы для типа 2 конфигурация π_1 с $\tau > 1$ была невыгодна (для любого x). Значение ΔU_2 при $x = r$ равно $\Delta U_2 \mid_{x=r} = R_2\left((1-\lambda)r + \lambda\tau r\right) - R_2(r) + L_2\left(r - \frac{\tau r}{2}\right) - L_2\left(\frac{\tau r}{2}\right)$ и равно нулю при $\tau = 1$. При этом вторая производная по τ прироста выигрыша отрицательна при $\tau \ge 1$ для любого x. Следовательно, для того чтобы при $x = r$ значение ΔU_2 было меньше нуля необходимо и достаточно, чтобы производная $(\Delta U_2)'_\tau$ при $\tau = 1$ была отрицательной, что выполнено при выполнении условия (5.5).

Рассмотрим вариант расположения (b). Данная конфигурация является для игроков старого типа более выгодной, когда $\Delta R_1 + L_1(|x/2 - r/2|) - L_1(x/2) \ge \Delta R_1 + L_1(r - x/2) - L_1(x/2)$, что эквивалентно $x \ge \frac{3r}{2}$ и x в данном случае находится в пределах между $\frac{3r}{2}$ и $2r$ (аналогичное справедливо для типа 2). Условие, обеспечивающее устойчивость к образованию коалиций указанного типа, имеет вид: $\Delta U_1(x_\tau^*) \le 0$, где $x_\tau^* \in \left(\frac{3r}{2}, 2r\right)$ — точка максимума прироста выигрыша на отрезке. Можно показать, что производная x_τ^* по τ положительна. Производная прироста выигрыша игрока старого типа по τ в точке x_τ^* равна $(\Delta U_1(x_\tau^*))'_\tau = \lambda x_\tau^* R_1'(r_1^*)$ и, следовательно, функция $\Delta U_1(x_\tau^*)$ возрастает по τ. Таким образом, необходимо найти максимально возможное значение τ и обеспечить невыгодность образования такой конфигурации. Из локальной устойчивости следует, что $z = \tau x \le 2r$. Значит, с учетом того, что x_τ^* возрастает по τ, максимальное значение τ^* равно $\frac{2r}{x_{\tau^*}^*}$, где $x_{\tau^*}^*$ определяется из условия (5.4) при $\tau = \frac{2r}{x_{\tau^*}^*}$ □

Также приведем два следствия из теоремы, формулирующие условия устойчивости в более удобном виде и позволяющие упростить анализ устойчивости коалиционных структур.

Следствие 5.2. *Структура K_m является СКРв игре $\mathcal{G}_2$, если для типа 1 выполнено достаточное условие СКР для игры $\mathcal{G}_1$, то есть условия (3.1)–(4.1) и неравенства (5.1) и (5.3), а для типа 2 — неравенство (5.5).*

Следствие 5.3. *Пусть структура K_m является СКР в игре $\mathcal{G}_1$ с игроками типа 1. Тогда она является СКР и в игре $\mathcal{G}_2$, если для игроков типа 2 выполнено условие (5.5) и неравенство*

$$\lambda R_2'(3r/2) + \tfrac{1}{2}L_2'(r/4) - \tfrac{1}{2}L_2'(3r/4) \le 0.$$

Отметим, что основное отличие следствия 5.3 от теоремы и следствия 5.2 в том, что в этом варианте утверждения не требуется дополнительных ограничений на тип 1.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть выигрыш игрока типа $t \in \{1, 2\}$ равен

$$U_t(x, r, P) = 2\alpha_t r - |x - P|^{k_t}, \tag{5.6}$$

где $\alpha_t \ge 0, k_t \ge 2$. Оказывается, что соотношение на параметры выигрыша игроков каждого типа в *СКР* можно выразить через две переменные: $\beta_t = \frac{2\alpha_t}{(r/2)^{k_t-1}}$ и k_t. С учетом следствия 5.2 ограничения на параметры в *СКР* имеют следующий вид:

$$k_1(2^{k_1-1} - 1) \le \beta_1 \le \min\left\{2k_1, 2^{k_1} - 1\right\}, \tag{5.7}$$

$$1 \le \beta_2 \le \min\left\{\tfrac{1}{\lambda}2k_2, 2^{k_2} - 1\right\}. \tag{5.8}$$

На рис. 2 изображены кривые, входящие в неравенства (5.7), и заштрихована область, в которой ограничения (5.7) выполняются. Из рисунка в частности видно, что, поскольку m возрастает с ростом β_1, то с ростом эластичности функции потерь k_1 число коалиций в устойчивой структуре возрастает, а чем больше значение параметра α, тем больше должен быть размер коалиций в K_m. Также из (5.8) следует, что с ростом доли λ игроков нового типа значение m уменьшается.

5.3. Игра $\mathcal{G}_2$ в предположении D2

Напомним, что в варианте D2 относительного распределения игроков предполагается распределение игроков нового типа на некотором небольшом сегменте $S \subset [0, 1]$ длины $\lambda < r$. В разделе 3 было

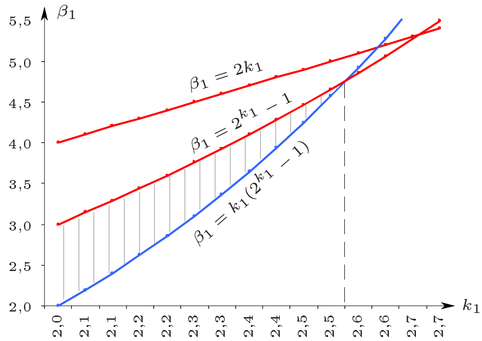


Рисунок 2. Область допустимых значений параметров в *СКР*

показано, что *СКР* возможно только в коалиционной структуре K_m, которая, согласно теореме 4.2, в игре $\mathcal{G}_2$ остается равновесной и локально устойчивой при выполнении для игроков типа 2 условия неотрицательности выигрыша граничного игрока (3.1).

Оказывается, что в предположении A1 (игроки типа 2 являются бóльшими индивидуалистами) условия *СКР* для варианта относительного распределения игроков D2 полностью аналогичны соответствующим условиям для варианта D1.

Теорема 5.4. *Пусть выполнено предположение A1. Структура K_m является СКР при варианте относительного распределения игроков D2 тогда и только тогда, когда она является СКР при варианте распределения D1.*

В предположении A2 (игроки типа 2 являются бóльшими конформистами) *СКР* может быть разрушено из-за выгодности создания новых коалиций, расположенных несимметрично относительно исходной равновесной структуры K_m (поскольку граничными игроками могут являться игроки разных типов). Более того, можно показать, что наибольшая «угроза» *СКР* возникает, когда игроки нового типа находятся на границе одной из существующих коалиций.

Теорема 5.5. *Пусть выполнено предположение A2, структура K_m является СКР в игре $\mathcal{G}_1$ с игроками типа 1 и равновесной в игре $\mathcal{G}_2$. В этих условиях структура K_m будет СКР в игре $\mathcal{G}_2$ тогда и толь-*

ко тогда, когда выполнено одно из двух неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} L_1'\,(r/2) \geq 2R_1'(r), \\ L_2'\,(r/2) \leq \frac{2}{3}R_2'(r). \end{array}\right. \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть π_1 — новая (потенциальная) коалиция со стратегией P_1 и размером r_1, и аналогично доказательству теоремы 5.3 рассмотрим сначала случай $r_1 \geq 2r$. Здесь рассуждения аналогичны рассуждениям в соответствующем пункте теоремы 5.3. Единственное отличие заключается в том, что поскольку $|S| = \lambda < r_1$ и в коалицию π входят игроки обоих типов, то устойчивость будет обеспечиваться игроками старого типа.

В случае $r_1 \leq r$ самая «опасная» с точки зрения устойчивости ситуация — когда игроки нового типа находятся на границе существующих коалиций. Но, аналогично доказательству теоремы 5.3, в этом случае также можно показать, что устойчивость будет обеспечиваться условием равновесия (3.1).

При $r \leq r_1 \leq 2r$ нужно также рассматривать два варианта расположения π_1 относительно K_m (см. доказательство теоремы 5.3) и аналогичным образом можно показать, что и в этом случае прирост выигрыша граничного игрока новой коалиции будет минимальным (среди его типа). Обозначим данного игрока через x. Заметим, далее, что в обоих вариантах расположения π_1 прирост граничного игрока старого типа будет тем больше, чем ближе граница π_1 расположена к границе коалиции из K_m и максимален, когда этот игрок является граничным агентом как π_1, так и одной из коалиций из K_m. Прирост его выигрыша в этом случае равен $\Delta U_1(x, r_1, P_1) = R_1(r_1) - R_1(r) + L_1(r/2) - L_1(r_1/2)$, где $r \leq r_1 \leq 2r$. Заметим, что $\Delta U_1(r) = 0$ и $\Delta U_1'' < 0$, и если при этом минимальный прирост выигрыша игроков нового типа будет положителен, то для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $\Delta U_1'(r_1 = r) \leq 0$, и, таким образом, приходим к условиям (5.9) □

Таким образом, только при выполнении более сильного ограничения на выигрыш игроков типа 1 (см. условие (5.1)) структура K_m остается *СКР* при возникновении игроков нового типа.

Вернемся теперь к примеру с функцией выигрыша вида (5.6). С учетом (5.9) ограничения на параметры функций выигрыша игроков старого типа примут вид:

$$k_1(2^{k_1-1}-1) \leq \beta_1 \leq \min\left\{k_1, 2^{k_1}-1\right\}.$$

Данное ограничение является более сильным, чем условие (5.7) и выполняется только при $k_1 = 2$. Таким образом, только за счет ограничений на свойства функции выигрыша игроков старого типа не удается гарантировать устойчивость. Но при этом, если удается гарантировать выполнение ограничений

$$1 \leq \beta_2 \leq \tfrac{1}{\lambda} 2k_2 \left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{k_2-1} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k_2-1}\right),$$

то коалиционная структура останется устойчивой при возникновении группы игроков нового типа, причем при $k_2 \geq 3$ данное условие гарантированно выполняется при выполнении неравенства (5.8), но при $2 \leq k_2 \leq 3$ наоборот является более сильным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alesina A. Spolaore E. *On the Number and Size of Nations* // Quarterly Journal of Economics. 1997. V. 112. N 4. P. 1027–1056.

2. Alesina A. M., Spolaore E. *The size of Nations. Cambridge, MA.* // MIT Press 2003.

3. Bogomolnaia A. M., Le Breton M., Savvateev A., et al. *Stability of Jurisdiction Structures under the Equal Share and Median Rules* // IDEI Working Papers. 2005. N 362.

4. Bogomolnaia A. M., Le Breton M., Savvateev A., et al. *The Egalitarian Sharing Rule in Provision of Public Goods* // Economic Bulletin. 2005. V. 8. N 11. P. 1–5.

5. Gomberg A. M., Marhuenda F., Ortuño-Ortín I. *Endogenous Platforms: The Case of Many Parties* // International Journal of Game Theory. 2005. V. 35. N 2. P. 223–249.

6. Ortuño-Ortín I., Roemer J. E. *Endogenous Party Formation and the Effect of Income Distribution on Policy* // Ivie. 2000. V. AD. N 6. P. 921–935.

7. Sosina Yu. V. *Endogenous Formation of Political Structures and Their Stability* // ORM2004: Труды. М.: МАКС Пресс, 2004 С. 215–216.

8. Vasin A. A., Stepanov D. S. *Endogenous Formation of Political Parties* // Mathematical and Computer Modelling. 2008. V. 48. N 9-10. P. 1519–1526.

TWO TYPES OF PLAYERS IN THE ENDOGENOUS COALITION FORMATION MODEL

Denis S. Stepanov, Moskow State University (dn.step@gmail.com).

Abstract: A model of coalition formation by players whose payoff depends on the value of the parameter (e.g., geographical location, bliss point) is considered. In this model a small portion of the new players with a different payoff function is injected into the main population. This paper considers different types of coalition stability and for each describes corresponding stability criteria. The derived conditions are then compared with the similar criteria in the game with a single type of players.

Keywords: coalition stability, Nash equilibrium, weak coalitional equilibrium (WCE).

Математическая Теория Игр и её Приложения, т.2, в.2, с. 99-128

УДК 517.917
ББК 22.1

ДЕФЕКТ ФУНКЦИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

Владимир Н. Ушаков
Александр А. Успенский *
Институт математики и механики УрО РАН
620090, Екатеринбург, С. Ковалевской, 16
e-mail: ushak@imm.uran.ru, uspen@imm.uran.ru

В работе рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух игроков с терминальной функцией платы. Для функций, зависящих от позиции игры и определенным образом связанных с функцией платы игры, вводится и изучается понятие дефекта функции.

Ключевые слова: игровая задача, управление, конфликтно управляемая система, гамильтониан, дефект стабильности, стабильный мост.

1. Введение

В настоящей работе изучается антагонистическая дифференциальная игра с терминальной функцией платы [3–7, 14, 15]. В работах [22, 23, 31], посвящённых игровым задачам о сближении, было введено и исследовалось понятие дефекта стабильности множества, содержащегося в пространстве позиций игры. Это понятие было введено для множеств, определенным образом связанных с целевым множеством и не обладающих, вообще говоря, свойством стабильности [3–7]. Свойство стабильности — ключевое при построении решений в

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект 08-01-00587-а, программы Президиума РАН №4 «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики», регионального гранта РФФФИ/ПСО №07-0196085

позиционных дифференциальных играх; с ним тесно связано понятие стабильного моста — многообразия в пространстве позиций игровой задачи о сближении, удобного для её успешного завершения. Понятие дефекта стабильности множества мы трактуем как некоторое распространение понятия стабильности на нестабильные множества, с которыми исследователям игровых задач приходится довольно часто сталкиваться при попытках построения стабильных мостов.

Целесообразно, на наш взгляд, провести аналогичное распространение с класса стабильных функций на нестабильные функции. Здесь предлагается один из вариантов такого распространения, позволяющего привлечь к исследованию дифференциальной игры функции, зависящие от позиции и не обладающие, вообще говоря, свойством стабильности. При помощи понятия дефекта функции оценивается, с какой степенью точности может быть решена дифференциальная игра на базе использования этой функции.

Изучаемая здесь тематика возникла из работ [3–9, 26] и опирается на результаты, полученные в этих работах. Так, здесь используется унификация в дифференциальных играх [8, 9] и инфинитезимальное описание стабильности [26]. Одним из основных источников мотивации для написания этой работы стала статья [10], посвященная принципу сравнения для уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби–Беллмана и Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, описывающих решения ряда задач управления и задач управления с возмущениями. Другим таким источником явилась статья [23], конструкции из которой были перенесены в эту работу.

Работа примыкает к исследованиям по теории дифференциальных игр [1–30].

2. Постановка игровой задачи

Пусть задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$ описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x^0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{2.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены условия

A. Функция $f(t,x,u,v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t,x,u,v), и для любой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ существует такая постоянная $L_f=L_f(\mathcal{D})\in(0,\infty)$, что

$$\left\|f\left(t,x^{(1)},u,v\right)-f\left(t,x^{(2)},u,v\right)\right\|\leqslant L_f\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,$$

$$\left(t,x^{(i)},u,v\right)\in\mathcal{D}\times P\times Q,\quad i=1,2;$$

здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора f в евклидовом пространстве.

B. Существует такая постоянная $\mu\in(0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u,v)\|\leqslant\mu(1+\|x\|),$$

$$(t,x,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P\times Q.$$

Пусть для любой непрерывной вектор-функции $x[\cdot]=\bigl(x[t],\ t_0\leqslant t\leqslant\vartheta\bigr)$ определено значение функционала $\gamma\bigl(x[\cdot]\bigr)=\sigma\bigl(x[\vartheta]\bigr)$, где $\sigma(x)$ — локально липшицева по x скалярная функция на $\mathbb{R}^m$.

Задача, стоящая перед первым игроком, заключается в определении позиционной процедуры управления с поводырем, обеспечивающей min функционала $\gamma\bigl(x[\cdot]\bigr)$ на движениях $x[\cdot]$ конфликтно управляемой системы (2.1). Эта задача формулируется как задача определения позиционной процедуры управления с поводырем первого игрока, обеспечивающей минимум гарантированного результата (см., например, задачу 1.1.2 из [16], стр. 12). При этом в качестве допустимого способа управления второго игрока используем контр-позиционные процедуры управления с поводырем второго игрока (см., например, [7]).

Тот факт, что в качестве допустимого способа управления второго игрока используются контр-позиционные процедуры управления, отражён в специфике гамильтониана системы (2.1), который используется в разрешающих конструкциях.

Игровую задачу будем рассматривать в ограниченной и замкнутой области

$$\mathcal{D}=\bigl\{(t,x)\colon t\in[t_0,\vartheta],\ \|x-x^0\|\leqslant\varepsilon+\mu(t-t_0)e^{\mu(t-t_0)}\bigr\}\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m;$$

где $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Область $\mathcal{D}$ есть интегральная воронка дифференциального включения (д. в.) $\dot{x} \in U(x) = \Big\{f \in \mathbb{R}^m \colon \|f\| \leqslant \mu\big(1 + \|x\|\big)\Big\}$ с начальным множеством $\mathcal{D}(t_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^m \colon \|x - x^0\| \leqslant \varepsilon\big\}$.

В следующем разделе будут представлены позиционные процедуры управления с поводырем первого игрока, ориентированные на решение сформулированной выше задачи. Конструирование этих процедур сопряжено с выбором конечных разбиений Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Будем считать, что диаметры $\Delta(\Gamma)$ этих разбиений настолько малы, что все рассматриваемые ниже движения $x[t]$ $(t \in [t_0, \vartheta],\ x[t_0] = x^0)$ системы (2.1) и движения поводыря $z[t]$ $(t \in [t_0, \vartheta],\ z[t_0] = x^0)$ содержатся в $\mathcal{D}$ (в том смысле, что $(t, x[t]) \in \mathcal{D},\ (t, z[t]) \in \mathcal{D}$).

3. Дефект функции в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания

В этом разделе приведём определение дефекта функции $\varphi(t, x)$, заданной в некоторой окрестности области $\mathcal{D}$. Отметим, что в рамках этого определения стабильные функции $\varphi(t, x)$ (см. [16]) есть функции с дефектом, равным нулю.

Введем обозначения (см. [19, 20])

$$G = B(0; K) = \{b \in \mathbb{R}^m \colon \|b\| \leqslant K\}, \text{ где } K \in (0, \infty) \text{ таково, что}$$

$$F(t, x) = \mathrm{co}\big\{f(t, x, u, v) \colon u \in P, v \in Q\big\} \subset G \quad \text{при} \quad (t, x) \in D$$

$$\begin{gathered} \Pi_l(t, x) = \big\{f \in \mathbb{R}^m \colon \langle l, f\rangle \leqslant H(t, x, l)\big\}, \\ F_l(t, x) = F(t, x) \cap \Pi_l(t, x), (t, x, l) \in \mathcal{D} \times S \end{gathered} \tag{3.1}$$

здесь $S = \{l \in \mathbb{R}^m \colon \|l\| = 1\}$, $H(t, x, l) = \max\limits_{u \in P} \min\limits_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v)\rangle$, $\langle l, f\rangle$ — скалярное произведение векторов l и f.

Справедливо включение

$$F_l(t, x) \subset G, \quad (t, x, l) \in D \times S. \tag{3.2}$$

Введем скалярные функции $\varphi(t, x)$, определенные на некоторой окрестности области $\mathcal{D}$ и удовлетворяющие условиям

C.1. Функция $\varphi(t, x)$ непрерывна на $\mathcal{D}$ и $\varphi(\vartheta, x) = \sigma(x)$ на $\mathcal{D}(\vartheta) = \big\{x \in \mathbb{R}^m \colon (x, \vartheta) \in \mathcal{D}\big\}$, при этом

$$\big\|\sigma(x_*) - \sigma(x^*)\big\| \leqslant L_\sigma \|x_* - x^*\|, \quad L_\sigma \in (0, \infty); \tag{3.3}$$

здесь x_* и x^* из $\mathcal{D}(\vartheta)$.

C.2. Существуют такие функции $\psi(t,x,f)$ на $\mathcal{D}\times G$ и $\gamma(\delta)$ на $(0,\infty)$ ($\gamma(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), что

1. при любых $t\in[t_0,\vartheta)$, $(t,x)\in\mathcal{D}$, $f\in F(t,x)$, $\delta>0$
$$\varphi(t+\delta,x+\delta f)\leqslant\varphi(t,x)+\psi(t,x,f)\delta+\gamma(\delta)\delta; \tag{3.4}$$

2. функция $\psi(t,x,f)$ ограничена снизу на $\mathcal{D}\times G$ и для любых $(t,x,l)\in\mathcal{D}\times S$ существует и конечен
$$\psi\bigl(t,x,F_l(t,x)\bigr)=\min_{f\in F_l(t,x)}\psi(t,x,f). \tag{3.5}$$

C.3. Функция $\varepsilon(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0,\vartheta]$; здесь
$$\begin{gathered}\varepsilon(t)=\sup_{x\in\mathcal{D}(t)}\varepsilon(t,x),\\ \varepsilon(t,x)=\sup_{l\in S}\psi\bigl(t,x,F_l(t,x)\bigr),\quad (t,x)\in\mathcal{D}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

К условиям **C.1**, **C.2**, **C.3**, наложенным на функции $\varphi(t,x)$, добавим ещё условие, наложенное на семейство отображений $(t,x)\mapsto F_l(t,x)$, $l\in S$

C.4. Существует скалярная функция $\widetilde{\omega}(\delta)$ на $(0,\infty)$ ($\widetilde{\omega}(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), что
$$d\bigl(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\bigr)\leqslant\widetilde{\omega}(\|t_*-t^*\|+\|x_*-x^*\|)$$
при любых $(t_*,x_*),(t^*,x^*)$ из $\mathcal{D}$ и $l\in S$.

Функции $\psi(t,x,f)$ в условиях **C.2** и **C.3** будем называть *калибровочными функциями*, имея в виду, что они задают ограничение на скорость функции φ с возрастанием времени, тем самым как бы ранжируя (калибруя) эту скорость. будем считать также, что функция $\gamma(\delta)$ в условии **C.2** не является, вообще говоря, строго монотонной; в частности, мы допускаем в неравенстве (3.4) функцию $\gamma(\delta)\equiv 0$.

Опишем позиционную процедуру u^c управления с поводырем первого игрока, основанную на использовании калибровочной функции

$\psi(t,x,f)$. Эту процедуру будем применять в процессе управления системой (2.1) на промежутке $[t_0,\vartheta]$.

Для этого зададим разбиение $\Gamma=\{t_0,t_1,\ldots,t_N=\vartheta\}$ с диаметром $\Delta(\Gamma)=\max\limits_i(t_{i+1}-t_i)$. Процедура u^c предполагает пошаговое (по промежуткам $[t_i,t_{i+1}]$ разбиения Γ) конструирование движения $x[t]$ системы (2.1) параллельно с вспомогательным движением $z[t]$ поводыря. При этом, в соответствии с конструкциями позиционных процедур управления из работ [7, 16], управление первого игрока на каждом шаге $[t_i,t_{i+1})$ разбиения Γ задается как некоторый вектор $u^c(t_i,x[t_i])$, где $x[t_i]$ — конечная точка движения $x[t]$ системы (2.1) на предыдущем шаге $[t_{i-1},t_i]$ (в случае, когда $i\geqslant 1$).

Итак, полагаем $x[t_0]=z[t_0]=x^0$.

На первом шаге разбиения Γ выбираем произвольно вектор $l^{(0)}\in S$ и вектор $f^*(t_0,z[t_0])$ из условия

$$f^*(t_0,z[t_0])\in F_{l^{(0)}}(t_0,z[t_0]). \tag{3.7}$$

Движение $z[t]$ поводыря на $[t_0,t_1]$ определяем равенством

$$z[t]=z[t_0]+(t-t_0)f^*(t_0,z[t_0]). \tag{3.8}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_0,t_1]$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot x[t]=f\big(t,x[t],u^c(t_0,x[t_0]),v(t)\big),\quad x[t_0]=x^0. \tag{3.9}$$

Здесь $u^c(t_0,x[t_0])$ — произвольный вектор из P, $v(t)\in Q$ — допустимое управление второго игрока на $[t_0,t_1)$.

Решение $x[t]$ уравнения (3.9) понимается как абсолютно непрерывная на $[t_0,t_1]$ функция, удовлетворяющая (3.9) почти всюду на $[t_0,t_1]$.

Рассмотрим следующий шаг $[t_1,t_2]$ разбиения Γ.

В случае, если $x[t_1]=z[t_1]$, при определении движений $x[t]$ и $z[t]$ на $[t_1,t_2]$ поступаем аналогично тому, как это делалось на шаге $[t_0,t_1]$.

В случае, если $x[t_1]\neq z[t_1]$, определяем вектор $l^{(1)}=\|s[t_1]\|^{-1}s[t_1]\in S$, а также вектор $f^*(t_1,z[t_1])$ из соотношений

$$\begin{gathered} f^*(t_1,z[t_1])\in F_{l^{(1)}}(t_1,z[t_1]),\\ \psi\big(t_1,z[t_1],f^*(t_1,z[t_1])\big)=\psi\big(t_1,z[t_1],F_{l^{(1)}}(t_1,z[t_1])\big). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь и в дальнейшем $s[t_i] = z[t_i] - x[t_i], i = \overline{0, N}$.

Движение поводыря $z[t]$ на $[t_1, t_2]$ определим равенством

$$z[t] = z[t_1] + (t - t_1)f^*(t_1, z[t_1]). \tag{3.11}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_1, t_2]$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big), \tag{3.12}$$

с начальным значением $x[t_1]$, где $x[t_1]$ — конечная точка движения $x[t]$ системы (2.1) на предыдущем шаге $[t_0, t_1]$.

Здесь вектор $u^c(t_1, x[t_1])$ определяется соотношением

$$\min_{v\in Q} \big\langle l^{(1)}, f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v\big)\big\rangle = H\big(t_1, x[t_1], l^{(1)}\big), \tag{3.13}$$

$v(t)$ — допустимое управление второго игрока на полуинтервале $[t_1, t_2)$.

В случае, если $x[t_2] = z[t_2]$, на следующем шаге $[t_2, t_3]$ разбиения Γ поступаем при определении движений $x[t]$ и $z[t]$ аналогично тому, как это делалось на предыдущих шагах.

В случае, если $x[t_2] \neq z[t_2]$, поступаем аналогично тому, как это делалось на предыдущем шаге $[t_1, t_2]$.

Допустим теперь, что в ходе применения процедуры u^c управления с поводырем первого игрока реализовались движения $x[t]$ и $z[t]$ на промежутке $[t_0, t_i]$.

В случае, если оказалось $z[t_i] = x[t_i]$, при определении движений $x[t]$ и $z[t]$ на $[t_i, t_{i+1}]$ поступаем по аналогии с предыдущими шагами $[t_1, t_2], \ldots, [t_{i-1}, t_i]$ разбиения Γ.

В случае, если $x[t_i] \neq z[t_i]$, определяем вектор $l^{(i)} = \|s[t_i]\|^{-1} s[t_i] \in S$ $(s[t_i] = z[t_i] - x[t_i])$ и вектор $f^*(t_i, z[t_i])$ из соотношений

$$\begin{gathered} f^*(t_i, z[t_i]) \in F_{l^{(i)}}(t_i, z[t_i]), \\ \psi\big(t_i, z[t_i], f^*(t_i, z[t_i])\big) = \psi\big(t_i, z[t_i], F_{l^{(i)}}(t_i, z[t_i])\big). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Движение поводыря $z[t]$ на $[t_i, t_{i+1}]$ определяем равенством

$$z[t] = z[t_i] + (t - t_i)f^*(t_i, z[t_i]). \tag{3.15}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_i, t_{i+1}]$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}[t] = f\big(t, x[t], u^c(t_i, x[t_i]), v(t)\big), \tag{3.16}$$

с начальным значением $x[t_i]$, где $x[t_i]$ — конечная точка движения $x[t]$ на $[t_{i-1}, t_i]$.

Здесь вектор $u^c(t_i, x[t_i]) \in P$ определяется из соотношения

$$\min_{v \in Q} \big\langle l^{(i)}, f\big(t_i, x[t_i], u^c(t_i, x[t_i]), v\big)\big\rangle = H(t_i, x[t_i], l^{(i)}), \tag{3.17}$$

$v(t)$ — допустимое управление второго игрока на промежутке $[t_i, t_{i+1})$.

Представленная выше процедура u^c управления с поводырем первого игрока вместе с некоторым допустимым управлением $v(t)$ второго игрока на $[t_0, \vartheta]$ определяют движение $x[t] = x_\Gamma[t; t_0, x^0; v(\cdot)],\ t \in [t_0, \vartheta]$ системы (2.1), отвечающее разбиению Γ.

Введем в рассмотрение величину

$$V_\Gamma(t_0, x^0) = \sup_{v(\cdot)} \varphi(x_\Gamma[\vartheta; t_0, x^0; v(\cdot)]). \tag{3.18}$$

Величина $V_\Gamma(t_0, x^0)$ есть тот результат, который гарантирует себе первый игрок в рассматриваемой задаче управления в случае, когда он использует процедуру u^c, отвечающую разбиению Γ и калибровочной функции $\psi(t, x, f)$.

Оценим сверху величину $V_\Gamma(t_0, x^0)$. Для этого приступим сначала к оценке расстояния между движениями $x[t]$ и $z[t]$ в моменты $t_i \in \Gamma$. Оценку проведем в случае 1: $z[t_i] \neq x[t_i],\ i = \overline{0, N-1}$. В альтернативном случае 2, когда при некоторых $i = \overline{0, N-1}$ неравенство $z[t_i] \neq x[t_i]$ нарушается, вывод оценки расстояния сводится к выводу оценки в случае 1.

Рассмотрим первый шаг $[t_0, t_1]$ разбиения Γ.

Так как $f^*(t_0, z[t_0])$ и $f\big(t, x[t], u^c(t_0, x[t_0]), v(t)\big)$ содержатся в G, то

$$\begin{gathered} \|f^*(t_0, z[t_0])\| \leqslant K, \\ \big\|f\big(t, x[t], u^c(t_0, x[t_0]), v(t)\big)\big\| \leqslant K, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|z[t_1] - x[t_1]\| \leqslant 2K\Delta_0, \tag{3.20}$$

где обозначено $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим следующий промежуток $[t_1, t_2]$.

Движение $z[t]$ поводыря на $[t_1, t_2]$ удовлетворяет равенству

$$z[t_2] = z[t_1] + \Delta_1 f^*(t_1, z[t_1]). \tag{3.21}$$

Движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_1, t_2]$ удовлетворяет равенству

$$x[t_2] = x[t_1] + \int\limits_{t_1}^{t_2} f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)dt.$$

Вместе с тем получаем

$$\begin{gathered}\|s[t_2]\|^2 = \|s[t_1]\|^2 \\ + 2\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\rangle \\ + \Big\|\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\|^2.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Из неравенства (3.19) следует оценка

$$\Big\|\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\|^2 \leqslant 4K^2\Delta_1^2. \tag{3.23}$$

Оценим второе слагаемое в правой части равенства (3.22). Представим его в виде

$$\begin{gathered}2\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\rangle \\ + 2\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \\ - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big)dt\Big\rangle.\end{gathered}$$

Рассмотрим выражение

$$\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big) dt \Big\rangle,$$

которое запишем в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \big\langle s[t_1], f^*(t_1, z[t_1]) \big\rangle dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} \big\langle s[t_1], f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\rangle dt.$$

По определению вектора $f^*(t_1, z[t_1])$ имеем

$$\begin{gathered} \big\langle s[t_1], f^*(t_1, z[t_1]) \big\rangle = \\ \|s[t_1]\| \, \big\langle l^{(1)}, f^*(t_1, z[t_1]) \big\rangle \leqslant \|s[t_1]\| \, H(t_1, z[t_1], l^{(1)}), \end{gathered} \tag{3.24}$$

поскольку $f^*(t_1, z[t_1]) \in F_{l^{(1)}}(t_1, z[t_1])$.

По определению вектора $u^c(t_1, x[t_1])$ имеем

$$\begin{gathered} \big\langle s[t_1], f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\rangle = \\ \|s[t_1]\| \, \big\langle l^{(1)}, f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \big\rangle \geqslant \\ \|s[t_1]\| \min_{v \in Q} \big\langle l^{(1)}, f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v\big) \big\rangle = \\ \|s[t_1]\| \, H(t_1, x[t_1], l^{(1)}). \end{gathered} \tag{3.25}$$

Из соотношений (3.24), (3.25) следует

$$\begin{gathered} \Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big) dt \Big\rangle \leqslant \\ \|s[t_1]\| \, \big(H(t_1, z[t_1], l^{(1)}) - H(t_1, x[t_1], l^{(1)}) \big) \Delta_1. \end{gathered}$$

Учитывая, что функция $H(t, x, l)$ локально липшицева по x на $\mathcal{D}$ с константой $L_f = L_f(\mathcal{D})$, получаем

$$H(t_1, z[t_1], l^{(1)}) - H(t_1, x[t_1], l^{(1)}) \leqslant L_f \, \|s[t_1]\| \, .$$

Принимая во внимание два последних неравенства, получаем

$$\begin{gathered} \Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big) dt \Big\rangle \leqslant \\ L_f \, \|s[t_1]\|^2 \, \Delta_1. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Оценим далее сверху выражение

$$\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big) dt \Big\rangle.$$

Для этого введем функции на $(0, \infty)$

$$\omega^*(\delta) = \sup\big\{ \| f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v) \| :$$
$$(t_*, x_*, t^*, x^*, u, v) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times P \times Q,\ \ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta \big\},$$
$$\omega(\delta) = \delta \omega^*\big((1 + K)\delta\big).$$

Принимая во внимание тот факт, что движение $x[t]$ системы (2.1) на $[t_1, t_2]$ удовлетворяет включению $(t, x[t]) \in \mathcal{D}$, получаем

$$\Big\| f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) \Big\| \leqslant$$
$$\omega^*\big((1 + K)\Delta_1\big), \quad t \in [t_1, t_2],$$

откуда следует оценка

$$\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(t_1, x[t_1], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big) - \qquad (3.27)$$
$$f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big) dt \Big\rangle \leqslant K_* \omega(\Delta_1);$$

здесь $K_* = \max\big\{ \|z - x\| : (t, x),\ (t, z) \in \mathcal{D} \big\} < \infty$.

Из (3.26), (3.27) следует оценка

$$\Big\langle s[t_1], \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f^*(t_1, z[t_1]) - f\big(t, x[t], u^c(t_1, x[t_1]), v(t)\big)\Big) dt \Big\rangle \leqslant \qquad (3.28)$$
$$L_f \, \|s[t_1]\|^2 \, \Delta_1 + K_* \omega(\Delta_1).$$

Из (3.22), (3.23) и (3.28) получаем

$$\|s[t_2]\|^2 \leqslant (1 + 2L_f \Delta_1) \, \|s[t_1]\|^2 + K_* \omega(\Delta_1) + 4K^2 {\Delta_1}^2. \qquad (3.29)$$

Пусть теперь в процессе позиционной процедуры u^c управления с поводырем реализовались в текущий момент $t_i \in \Gamma$ точки $x[t_i]$ и $z[t_i]$

движений системы (2.1) и поводыря. Тогда процедура u^c породит на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ движения $x[t]$ и $z[t]$, выходящие в момент t_i из этих точек; при этом будет справедлива оценка, подобная оценке (3.29)

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 \leqslant (1 + 2L_f\Delta_i)\,\|s[t_i]\|^2 + \Delta_i\varphi^*(\Delta_i), \tag{3.30}$$

где обозначено $\varphi^*(\delta) = K_*\omega^*\big((1+K)\delta\big) + 4K^2\delta,\ \delta > 0$.

Из локальной оценки (3.30), справедливой для любого $i = \overline{1, N-1}$, следует оценка

$$\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\|^2 \leqslant e^{2L_f(\vartheta - t_1)}\Big(\|s[t_1]\|^2 + (\vartheta - t_1)\varphi^*\big(\Delta(\Gamma)\big)\Big). \tag{3.31}$$

Из (3.20) и (3.31) получаем оценку

$$\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\|^2 \leqslant e^{2L_f(\vartheta - t_0)}\Big(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*\big(\Delta(\Gamma)\big)\Big)$$

и, следовательно, оценку

$$\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\| \leqslant e^{L_f(\vartheta - t_0)}\Big(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*\big(\Delta(\Gamma)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

Теперь сфокусируем внимание на конечной последовательности $z[t_i]$,
$i = \overline{1, N}$. Для точек этой последовательности имеют место, согласно условию **C.2**, неравенства

$$\varphi(t_{i+1}, z[t_{i+1}]) \leqslant \varphi(t_i, z[t_i]) + \psi\big(t_i, z[t_i], f^*(t_i, z[t_i])\big)\Delta_i + \gamma(\Delta_i)\Delta_i,$$

$$\psi\big(t_i, z[t_i], f^*(t_i, z[t_i])\big) \leqslant \varepsilon(t_i, z[t_i]) \leqslant \varepsilon(t_i).$$

Из этих неравенств (верхнего неравенства) путем их последовательной подстановки друг в друга, получаем оценку

$$\varphi(\vartheta, z[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, z[t_0]) + \sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon(t_i)\Delta_i + \sum_{i=0}^{N-1}\Delta_i\gamma(\Delta_i). \tag{3.33}$$

Учитывая также, что функция платы $\sigma[x] = \varphi(\vartheta, x)$ на $\mathcal{D}(\vartheta)$ удовлетворяет неравенству (3.3), получаем

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(\vartheta, z[\vartheta]) + L_\sigma\,\|z[\vartheta] - x[\vartheta]\|. \tag{3.34}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + (\vartheta - t_0)\gamma\bigl(\Delta(\Gamma)\bigr) + \\ L_\sigma e^{L_f(\vartheta - t_0)}\bigl(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*(\Delta(\Gamma))\bigr)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

Зафиксировав некоторое $\rho > 0$, подберем такое $\delta(\rho) > 0$, что при всех разбиениях Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta(\Gamma) \leqslant \delta(\rho)$ имеет место

$$(\vartheta - t_0)\gamma\bigl(\Delta(\Gamma)\bigr) + L_\delta e^{L_f(\vartheta - t_0)}\bigl(4K^2\Delta(\Gamma)^2 + (\vartheta - t_0)\varphi^*(\Delta(\Gamma))\bigr)^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho.$$

Здесь считаем, что величина $\delta(\rho)$ выбрана удовлетворяющей соотношению $\delta(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Для таких разбиений Γ и отвечающих им процедур u^c управления с поводырем первого игрока выполняется неравенство

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + \rho. \tag{3.36}$$

Начиная с этого момента, будем более адекватно обозначать движения $x[t]$ на $[t_0, \vartheta]$, порожденные процедурой управления u^c и отвечающие разбиению Γ. А именно, будем обозначать их символом $x_\Gamma[t]$ подобно тому как это делается в работах [7, 16], отражая тем самым их соответствие разбиению Γ. Учитывая это, неравенство (3.36) запишем в виде

$$\varphi(\vartheta, x_\Gamma[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + \rho. \tag{3.37}$$

Оценка (3.37) есть оценка сверху результата игры, сложившейся в процессе применения первым игроком процедуры u^c, отвечающей калибровочной функции $\psi(t, x, f)$ и разбиению Γ $\bigl(\Delta(\Gamma) \leqslant \delta(\rho)\bigr)$.

Отсюда получаем верхнюю оценку

$$V_\Gamma(t_0, x^0) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(t_i)\Delta_i + \rho. \tag{3.38}$$

результата (3.18), который гарантирует себе первый игрок в рассматриваемой задаче, применяя процедуру управления u^c, отвечающую калибровочной функции $\psi(t,x,f)$ и разбиению Γ с диаметром $\Delta(\Gamma) \leqslant \delta(\rho)$.

Рассмотрим теперь некоторую последовательность $\{x^{(n)}[t]\}$ движений $x^{(n)}[t] = x_{\Gamma_n}[t]$ системы (2.1) на $[t_0, \vartheta]$, порожденных упомянутой процедурой u^c и отвечающих разбиению Γ_n с диаметрами $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma_n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Пусть существует равномерный на $[t_0,\vartheta]$ предел $x[t] = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}[t]$. Следуя работам [7, 16], будем называть такие пределы $x[t]$ движениями системы (2.1), порожденными процедурой управления u^c, соответствующей калибровочной функции $\psi(t,x,f)$. Совокупность $\{x[t]\}$ всех таких движений $x[t]$ на $[t_0,\vartheta]$ обозначим символом $\mathcal{X}_{u^c}(t_0, x^0)$.

Введем величину

$$V(t_0,x^0) = \lim_{\Delta(\Gamma)\downarrow 0} \sup V_\Gamma(t_0,x^0). \tag{3.39}$$

Величина (3.39), так же как и $V_\Gamma(t_0,x^0)$, зависит от выбора калибровочной функции $\psi(t,x,f)$.

Оценим сверху $V(t_0,x^0)$. В связи с этим рассмотрим произвольное движение $x[t] = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}[t]$ из пучка $\mathcal{X}_{u^c}(t_0,x^0)$ и некоторую последовательность $\{\rho_k\}$ ($\rho_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$).

Для каждого ρ_k найдется номер n_k, для которого $\Delta^{(n_k)} \leqslant \delta(\rho_k)$.

Тогда движения $x^{(n_k)}[t]$ на $[t_0,\vartheta]$, порожденные процедурой u^c и отвечающие разбиениям Γ_{n_k} $(k = 1,2,\dots)$, стеснены оценкой

$$\varphi(\vartheta, x^{(n_k)}[\vartheta]) \leqslant V_{\Gamma_{n_k}}(t_0,x^0) \leqslant \varphi(t_0,x^0) + \sum_{i=0}^{N_k-1} \varepsilon(t_i^{(k)})\Delta_i^{(k)} + \rho_k. \tag{3.40}$$

Здесь $t_i^{(k)}$ — моменты разбиения Γ_{n_k}, $\Delta_i^{(k)} = t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}$, (N_k+1) — число моментов разбиения Γ_{n_k}.

Из неравенства (3.40) и предельного равенства $x[\vartheta] = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(n_k)}[\vartheta]$, учитывая непрерывность функции $\sigma(x) = \varphi(\vartheta,x)$ и условие **C.3**, получаем

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant V(t_0,x^0) \leqslant \varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt. \tag{3.41}$$

С другой стороны, по определению $V(t_0, x^0)$, найдется такая последовательность $\{\Gamma_n\}$ ($\Delta^{(n)} \downarrow 0$ при $n \to \infty$), что $V(t_0, x^0) = \sup\limits_{n\to\infty} V_{\Gamma_n}(t_0, x^0)$. Для каждого разбиения Γ_n найдется такое движение $x_{\Gamma_n}[t]$ которое удовлетворяет неравенству $\varphi(\vartheta, x_{\Gamma_n}[\vartheta]) \geqslant V_{\Gamma_n}(t_0, x^0) - \frac{1}{n}$. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что существует равномерный на $[t_0, \vartheta]$ предел $x[t] = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\Gamma_n}[t]$. Для этого предела выполняется неравенство

$$\varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \geqslant V(t_0, x^0). \tag{3.42}$$

Из (3.41), (3.42) следует утверждение

Теорема 3.1. *Величина* (3.39) *удовлетворяет соотношению*

$$V(t_0, x^0) = \sup_{x[\cdot]\in\mathcal{X}_{u^c}(t_0,x^0)} \varphi(\vartheta, x[\vartheta]) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt. \tag{3.43}$$

где функция $\varepsilon(t)$ (3.6)*, входящая в* (3.43)*, определена на базе калибровочной функции* $\psi(t, x, f)$.

Замечание 3.1. В формулировке теоремы 3.1 (в правой части неравенства(3.43)) присутствует интеграл Римана $\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt$. Условие **C.3** интегрируемости функции $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ входит в число условий при которых доказана теорема 3.1. Заметим, что это условие можно ослабить до условия интегрируемости функции $\varepsilon(t)$ по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$. Доказательство теоремы 3.1 можно провести по схеме, подобной схеме рассуждений, примененных в работе [23] при доказательстве аналогичной теоремы о дефекте стабильности множеств.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(t, x)$ на $\mathcal{D}$, которая (наряду с условиями **C.1**, **C.2**) удовлетворяет следующему условию

C.2⁰. Функция $\varphi(t, x)$ дифференцируема по направлениям $(1, f)$, $f \in \mathrm{R}^m$ в каждой точке $(t, x) \in \mathcal{D}$, $t \in [t_0, \vartheta)$, а также

$$1.\ \ \varphi(t+\delta, x+\delta f) = \varphi(t, x) + \varphi'\big(t, x; (1, f)\big)\delta + o_*(t, x, f; \delta)\delta \tag{3.44}$$

при любых $(t, x, f) \in \mathcal{D} \times \mathrm{R}^m$, $t \in [t_0, \vartheta)$, $\delta \in (0, \vartheta - t)$, где функция $o_*(t, x, f; \delta)$ стеснена неравенством

$$\sup_{(t,x,f)\in\mathcal{D}\times G} o_*(t, x, f; \delta) \leqslant \gamma_*(\delta), \tag{3.45}$$

при этом $\gamma_*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$;

2. функция $\varphi'\big(t, x; (1, f)\big)$ ограничена снизу на $\mathcal{D}\times G$ и для любых $(t, x, l) \in \mathcal{D} \times S$ существует

$$\varphi'\Big(t, x; \big(1, F_l(t, x)\big)\Big) \triangleq \min_{f \in F_l(t,x)} \varphi'\big(t, x; (1, f)\big). \tag{3.46}$$

Из (3.44), (3.45) следует равномерная на $\mathcal{D} \times G$ оценка

$$\begin{gathered}\varphi(t+\delta, x+\delta f) - \varphi(t, x) - \varphi'\big(t, x; (1, f)\big)\delta \leqslant \delta\gamma_*(\delta),\\ (t, x, f) \in \mathcal{D} \times G, \quad t \in [t_0, \vartheta).\end{gathered} \tag{3.47}$$

Равномерность понимается в том смысле, что правая часть оценки (3.47) не зависит от (t, x, f) из $\mathcal{D} \times G$.

Также из условия **C.2⁰** и оценки (3.47) следует, что функция $\psi_*(t, x, f) = \varphi'(t, x; (1, f))$, заданная на $\mathcal{D} \times G$, удовлетворяет условиям **C.2**, **C.3**, наложенным на функцию $\psi(t, x, f)$. Таким образом, функция $\psi_*(t, x, f)$ сама является калибровочной функцией.

Кроме того, из (3.4) следует, что для любой калибровочной функции $\psi(t, x, f)$ справедливо неравенство

$$\frac{\varphi(t+\delta, x+\delta f) - \varphi(t, x)}{\delta} \leqslant \psi(t, x, f) + \gamma(\delta), \quad \delta > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta \downarrow 0$, получаем

$$\psi_*(t, x, f) \leqslant \psi(t, x, f), \quad (t, x, f) \in \mathcal{D} \times G. \tag{3.48}$$

Неравенство (3.48) означает, что функция $\psi_*(t, x, f)$ является нижней огибающей для семейства калибровочных функций $\psi(t, x, f)$ на $\mathcal{D} \times G$.

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon_*(t, x) = \sup_{l \in S} \psi_*\big(t, x, F_l(t, x)\big), \quad (t, x) \in \mathcal{D}, \quad t \in [t_0, \vartheta). \tag{3.49}$$

Пусть $(t, x) \in \mathcal{D}$, $t \in [t_0, \vartheta)$. В случае $\varepsilon_*(t, x) \leqslant 0$ получаем $k_*(t, x) \triangleq \varepsilon_*(t, x)$ — *индекс стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в точке* (t, x); в случае $\varepsilon_*(t, x) \geqslant 0$ получаем $d_*(t, x) \triangleq \varepsilon_*(t, x)$ — *дефект стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в точке* (t, x).

Введем также функцию

$$\varepsilon_*(t) = \sup_{x \in \mathcal{D}(t)} \varepsilon_*(t, x), \quad t \in [t_0, \vartheta). \tag{3.50}$$

Дополним эту функцию значением $\varepsilon_*(\vartheta)$ в момент $t = \vartheta$, получив таким образом функцию $\varepsilon_*(t)$, определенную на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Функцию $\varepsilon_*(t)$ на отрезке $[t_0, \vartheta]$ назовём *спектром функции* $\varphi(t, x)$.

Пусть $t \in [t_0, \vartheta]$. В случае $\varepsilon_*(t) \leqslant 0$ получаем $k_*(t) \triangleq \varepsilon_*(t)$ — *индекс стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в момент* t; в случае $\varepsilon_*(t) \geqslant 0$ получаем $d_*(t) \triangleq \varepsilon_*(t)$ — *дефект стабильности функции* $\varphi(t, x)$ *в момент* t.

Обозначим через Λ^- и Λ^+ соответственно множества в $[t_0, \vartheta]$, на которых определены функции $k_*(t)$ и $d_*(t)$ — неположительная и неотрицательная части спектра $\varepsilon_*(t)$. Множества Λ^- и Λ^+ могут, вообще говоря, не пересекаться, и пересечение $\Lambda^- \cap \Lambda^+$ (в случае, если оно непусто) есть множество всех тех t в $[t_0, \vartheta]$, для которых $\varepsilon_*(t) = 0$.

В дополнение к условиям **C.1**, **C.2**, **C.2$^{\mathbf{0}}$** предполагаем, что выполнено относительно $\varepsilon_*(t)$ следующее условие.

C.3$^{\mathbf{0}}$. Функция $\varepsilon_*(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0, \vartheta]$.

Определение 3.1. *Дефектом функции* $\varphi(t, x)$ *на* $[t_0, \vartheta]$ *назовем интеграл*

$$\varkappa(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t) dt = \int_{\Lambda^-} k_*(t) dt + \int_{\Lambda^+} d_*(t) dt. \tag{3.51}$$

Здесь $\int_{\Lambda^-} k_*(t) dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \min\bigl(\varepsilon_*(t), 0\bigr) dt$, $\int_{\Lambda^+} d_*(t) dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \max\bigl(\varepsilon_*(t), 0\bigr) dt$.

Справедливо неравенство

$$V(t_0, x^0) \leqslant \varphi(t_0, x^0) + \varkappa(\vartheta). \tag{3.52}$$

Здесь $V(t_0, x^0) = \sup_{x[\cdot] \in \mathcal{X}_{u^c}(t_0, x^0)} \varphi(\vartheta, x[\vartheta])$, где процедура u^c управления первого игрока базируется на использовании калибровочной функции $\psi_*(t, x, f)$ и, стало быть, значение $V(t_0, x^0)$ в некоторой степени определено функцией $\psi_*(t, x, f)$.

Далее заметим, что в рамках условий, при которых мы рассматриваем функции $\varphi(t,x)$, одним из критериев стабильности (u-стабильности) функции $\varphi(t,x)$ (см. [18]) является неравенство

$$\varepsilon_*(t,x) = \sup_{l\in S} \psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big) \leqslant 0, \quad t\in[t_0,\vartheta), \quad (t,x)\in\mathcal{D}, \tag{3.53}$$

а, значит, и неравенство

$$\varepsilon_*(t) \leqslant 0, \quad t\in[t_0,\vartheta]. \tag{3.54}$$

Тогда, в соответствии с (3.52), величина $V(t_0,x_0)$ будет стеснена неравенством

$$V(t_0,x^0) \leqslant \varphi(t_0,x^0). \tag{3.55}$$

Очевидно, что неравенство (3.55) эквивалентно неравенству (3.52), дополненному неравенством $\varkappa(\vartheta) = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t)dt \leqslant 0$, или, что одно и то же, — неравенством

$$\int\limits_{\Lambda^+} d_*(t)dt \leqslant \int\limits_{\Lambda^-} |k_*(t)|dt. \tag{3.56}$$

Можно проинтерпретировать неравенство (3.56) как то, что индекс стабильности превалирует в интегральном смысле над дефектом стабильности. Этого достаточно для выполнения (3.55).

Теперь, считая, что наряду с функцией $\psi_*(t,x,f)$ на $\mathcal{D}\times G$ задана некоторая калибровочная функция $\psi(t,x,f)$, оценим, насколько сильно различаются верхние оценки в (3.43) и (3.52).

Для этого введем неотрицательную функцию $h_*(t,x,f) = \psi(t,x,f) - \psi_*(t,x,f)$ на $\mathcal{D}\times G$. При любых $t\in[t_0,\vartheta)$, $(t,x,l)\in\mathcal{D}\times S$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \psi_*(t,x,f_0) \leqslant \psi_*(t,x,f^0) \leqslant \psi(t,x,f^0) = \\ \psi_*(t,x,f^0) + h_*(t,x,f^0) \leqslant \psi_*(t,x,f_0) + h_*(t,x,f_0) \leqslant \\ \psi_*(t,x,f_0) + \sup_{f\in F_l(t,x)} h_*(t,x,f). \end{gathered} \tag{3.57}$$

Здесь обозначено $\psi_*(t,x,f_0) \triangleq \psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, $\psi(t,x,f^0) \triangleq \psi\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, где f_0 и f^0 из $F_l(t,x)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} h_*(t,x) = \sup_{l\in S,\, f\in F_l(t,x)} h_*(t,x,f), \\ h_*(t) = \sup_{x\in\mathcal{D}(t)} h_*(t,x). \end{gathered} \tag{3.58}$$

Для этих функций выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \varepsilon(t,x) - \varepsilon_*(t,x) \leqslant h_*(t,x), \\ \varepsilon(t) - \varepsilon_*(t) \leqslant h_*(t), \end{gathered} \tag{3.59}$$

при $t \in [t_0,\vartheta)$, $(t,x) \in \mathcal{D}$.

Предполагаем далее, что выполнено условие

$\mathbf{E^1}$. Функция $h_*(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0,\vartheta]$.

Тогда из (3.57)–(3.59) следует, что оценки $\Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt\Big)$ и $\Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t)dt\Big)$, входящие соответственно в (3.43) и (3.52), отличаются не более, чем на величину $\int\limits_{t_0}^{\vartheta} h_*(t)dt$, т.е. справедливо неравенство

$$\Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t)dt\Big) - \Big(\varphi(t_0,x^0) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon_*(t)dt\Big) \leqslant \int\limits_{t_0}^{\vartheta} h_*(t)dt.$$

В заключение этих рассуждений, относящихся к сравнению правых частей в неравенствах (3.43) и (3.52), заметим, что эти рассуждения могут быть полезны при рассмотрении тех ситуаций, связанных с $\varphi(t,x)$, в которых затруднена по тем или иным причинам реализация процедуры управления u^c, базирующейся на использовании функции $\psi_*(t,x,f) = \varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$. Например, функция $\psi_*(t,x,f)$, как функция вектора f, может быть неудобной для вычисления величины $\psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, $l\in S$, и тогда имеет смысл заменить функцию $\psi_*(t,x,f)$ некоторой хорошей с точки зрения вычисления значений $\psi_*\big(t,x,F_l(t,x)\big)$, $(t,x)\in\mathcal{D}$, $l\in S$, калибровочной функцией $\psi(t,x,f)$. Эту функцию $\psi(t,x,f)$ можно попытаться выбрать дифференцируемой по f при любых $(t,x)\in\mathcal{D}$, $l\in S$, а также не сильно отличающейся от $\psi_*(t,x,f)$.

4. Примеры функций $\varphi(t,x)$, удовлетворяющих условиям C.1, C.2^0, C.3^0.

Пример 1. Рассматривается конфликтно-управляемая система (2.1) из раздела 2. Пусть функция $\varphi(t,x)$ определена в некоторой выпуклой окрестности U области $\mathcal{D}$ и вогнута на U, а также удовлетворяет условию **C.1**. Тогда при любых $(t,x)\in\mathcal{D}$, $f\in F(t,x)$ существует производная по направлению $\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$ и при этом

$$\varphi(t+\delta,x+\delta f)\leqslant\varphi(t,x)+\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)\delta,\quad \delta>0. \tag{4.1}$$

Функция $\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)=\min_{h\in\bar\partial\varphi(t,x)}\langle h,(1,f)\rangle,$$

где $h=(h_t,h_x)\in \mathrm{R}^{m+1}$ и $\bar\partial\varphi(t,x)$ — супердифференциал функции $\varphi(t,x)$ в точке (t,x) (см. [31], стр. 130).

Введем в этом примере функцию

$$o_*(t,x,f;\delta)=\big(\varphi(t+\delta,x+\delta f)-\varphi(t,x)-\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)\delta\big)\delta^{-1},\ \ \delta>0.$$

Функция $\varphi(t,x)$ вместе с $o_*(t,x,f;\delta)$ удовлетворяет равенству (3.44) и при этом $o_*(t,x,f;\delta)\leqslant 0$. Отсюда следует, что для функции имеет место неравенство (3.45), где в качестве $\gamma_*(\delta)$ выбрана функция $\gamma_*(\delta)\equiv 0$ на $(0,\infty)$. Вместе с тем получили, что функция $\varphi(t,x)$ удовлетворяет условию **C.2^0.1**.

Так как $\varphi(t,x)$ вогнута на U и непрерывна в каждой точке $(t,x)\in\mathcal{D}$, то производная $\varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$ ограничена снизу на $\mathcal{D}\times G$ и функция $\varphi'(t,x;(1,f))$ при любых $(t,x)\in\mathcal{D}$ непрерывна по f. Значит, при любых $(t,x,l)\in\mathcal{D}\times S$ существует и конечен $\varphi'\big(t,x;(1,F_l(t,x))\big)=$

$\min\limits_{f \in F_l(t,x)} \varphi'\big(t,x;(1,f)\big)$. Следовательно выполняется условие **C.2⁰.2** и вместе с ним условие **C.2⁰**.

Для того, чтобы $\varphi(t,x)$ удовлетворяла и условию **C.3⁰**, наложим на нее и область $\mathcal{D}$ некоторые дополнительные ограничения.

Предполагаем, что $\mathcal{D}$ есть объединение конечного числа (пусть I) компонентов $\mathcal{D}_i = \mathcal{D} \cap \Pi(\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in \overline{1,I}$, $\tau_1 = t_0$, $\tau_{I+1} = \vartheta$, (см. рис. 1) удовлетворяющих условиям

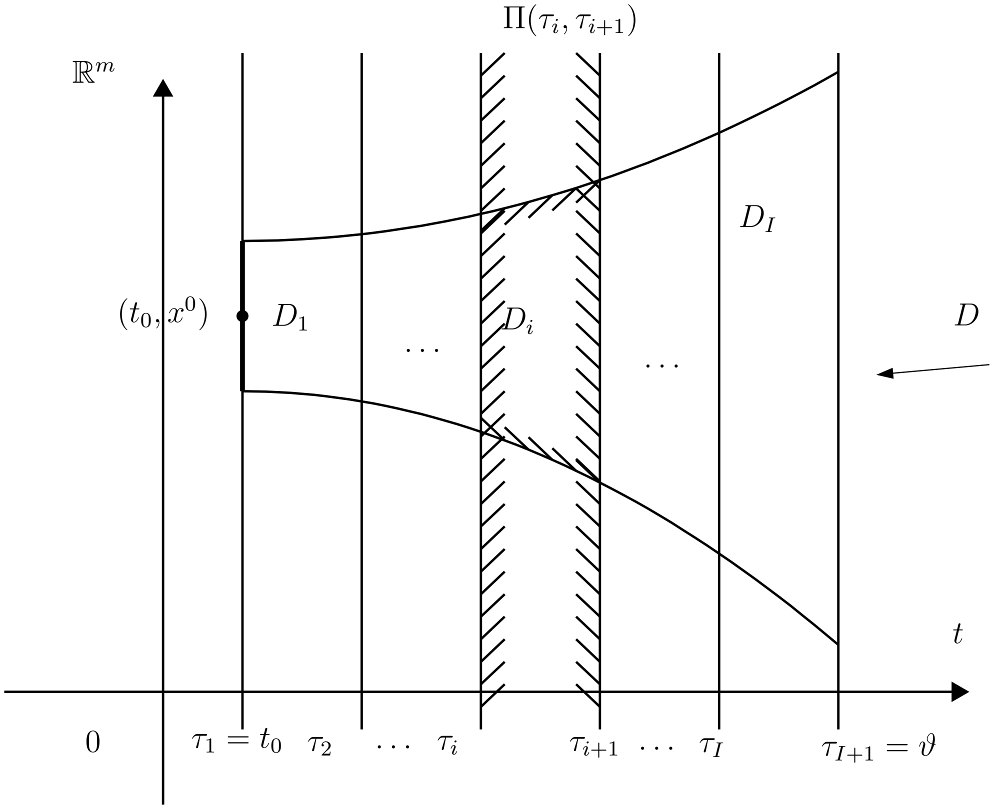


Рисунок 1.

1. На каждом $\Phi_i = \mathcal{D}_i \setminus \Pi(\tau_{i+1})$ функция $\varphi(t,x)$ имеет вид $\varphi(t,x) = \min\limits_{k \in \overline{1,k_*}} \varphi_{ik}(t,x)$. При этом функции $\varphi_{ik}(t,x)$ определены и непрерывны в некоторой выпуклой открытой окрестности U_i компакта $\mathcal{D}_i$, а также обладают непрерывными по t,x,f на $U_i \times G$ производными по направлению $\varphi'_{ik}\big(t,x;(1,f)\big)$; число k_* зависит, вообще говоря, от номера i;

2. Каждое множество

$$\Phi_{ik} = \Phi_i \cap \big\{(t,x)\colon \varphi_{ik}(t,x) = \varphi(t,x)\big\} \tag{4.2}$$

гомеоморфно цилиндру $[\tau_i, \tau_{i+1}) \times B(0;1)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и каждое его сечение $\Phi_{ik}(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ гомеоморфно шару $B(0;1)$ в $\mathbb{R}^m$; (см. рис. 2);

3. Для любых k и s $(k \neq s)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ выполняется

$$\operatorname{int}\Phi_{ik}(t) \cap \operatorname{int}\Phi_{is}(t) = \varnothing.$$

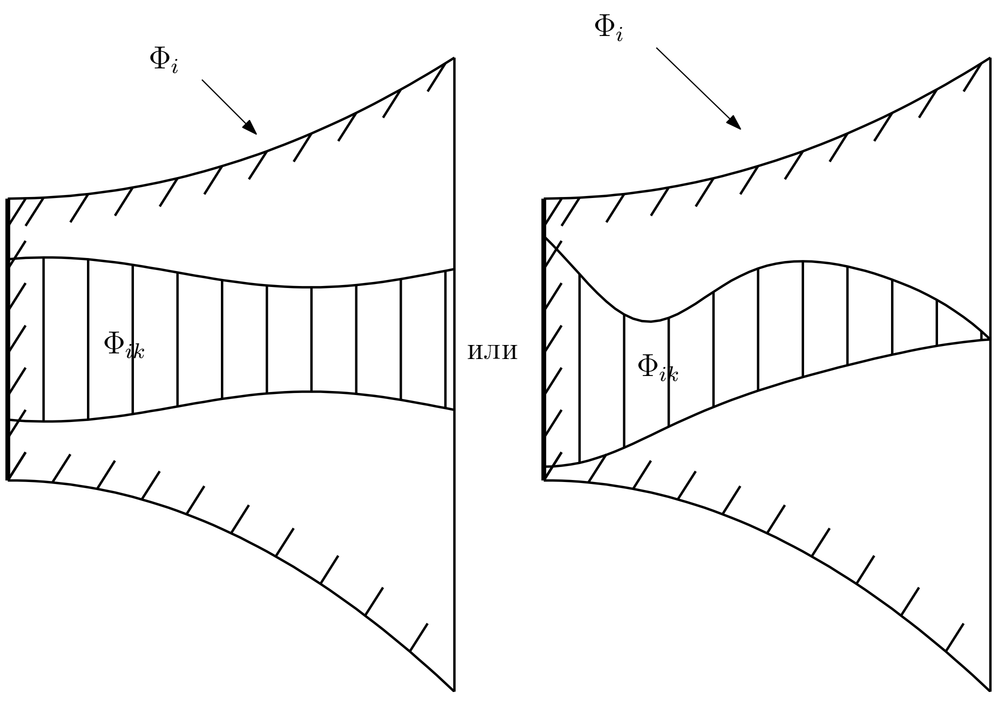


Рисунок 2.

Здесь $\Pi(\tau_i, \tau_{i+1}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{m+1}\colon t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]\}$, $\Pi(\tau_{i+1}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{m+1}\colon t = \tau_{i+1}\}$, $\operatorname{int}\Phi_{ik}(t)$ — внутренность множества $\Phi_{ik}(t)$ в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим теперь некоторое множество $\Phi_{ik}(t)$, $k \in \overline{1, k_*}$, а также такую замкнутую окрестность V_{ik} множества Φ_{ik}, которая удовлетворяет включению $V_{ik} \subset U_i$.

Функция $\varphi'_{ik}\big(t,x;(1,f)\big)$ равномерно непрерывна на компакте $V_{ik}\times G$ и, значит, найдется такая функция $\varkappa(\delta)$ ($\varkappa(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$), что для (t_*,x_*,f_*) и (t^*,x^*,f^*) из $V_{ik}\times G$

$$\begin{gathered}\Big|\varphi'_{ik}\big(t_*,x_*;(1,f_*)\big)-\varphi'_{ik}\big(t^*,x^*;(1,f^*)\big)\Big|\leqslant\\ \varkappa\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\|f_*-f^*\|\big).\end{gathered}\tag{4.3}$$

Также, по условию **C.4** (стр. 103), существует такая функция $\tilde w\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$, что

$$d\big(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\big)\leqslant\tilde w\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\tag{4.4}$$

при любых (t_*,x_*) и (t^*,x^*) из $\mathcal{D}$ и $l\in S$.

Пусть пока векторы f_* и f^* таковы, что $f_*\in F_l(t_*,x_*)$, $f^*\in F_l(t^*,x^*)$, $\|f_*-f^*\|\leqslant\tilde w\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)$, где (t_*,x_*) и (t^*,x^*) из V_{ik} и $l\in S$.

Для таких f_* и f^* будет в силу (4.3), (4.4) выполнено неравенство при любом $l\in S$

$$\begin{gathered}\Big|\varphi'_{ik}\big(t_*,x_*;(1,f_*)\big)-\varphi'_{ik}\big(t^*,x^*;(1,f^*)\big)\Big|\leqslant\\ \varkappa\Big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\tilde w\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\Big).\end{gathered}\tag{4.5}$$

Учитывая монотонное убывание к нулю при $\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\downarrow 0$ функции $\varkappa\Big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\tilde w\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\Big)$, получим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при $|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\leqslant\delta$ будет

$$\varkappa\Big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|+\tilde w\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big)\Big)\leqslant\varepsilon$$

для любого вектора $l\in S$ и, значит,

$$\Big|\varphi'_{ik}\big(t_*,x_*;(1,f_*)\big)-\varphi'_{ik}\big(t^*,x^*;(1,f^*)\big)\Big|\leqslant\varepsilon\tag{4.6}$$

для любых $l\in S$ и $f_*\in F_l(t_*,x_*)$, $f^*\in F_l(t^*,x^*)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f_*-f^*\|\leqslant d\big(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\big)\leqslant\tilde w\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big).$$

Допустим теперь, что $f_* \in F_l(t_*, x_*)$ удовлетворяет соотношению $\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big) = \varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big)$.

Из (4.6) вытекает неравенство

$$\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big) \geqslant \varphi'_{ik}\big(t^*, x^*; (1, f^*)\big) - \varepsilon$$

для выбранного f_*, соответствующего вектора $f^* \in F_l(t^*, x^*)$ и $l \in S$.

Отсюда следует, что при любом $l \in S$

$$\varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big) \geqslant \varphi'_{ik}\Big(t^*, x^*; \big(1, F_l(t^*, x^*)\big)\Big) - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Аналогично показывается, что при любом $l \in S$

$$\varphi'_{ik}\Big(t^*, x^*; \big(1, F_l(t^*, x^*)\big)\Big) \geqslant \varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big) - \varepsilon. \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) следует неравенство

$$\left|\varphi'_{ik}\Big(t_*, x_*; \big(1, F_l(t_*, x_*)\big)\Big) - \varphi'_{ik}\Big(t^*, x^*; \big(1, F_l(t^*, x^*)\big)\Big)\right| \leqslant \varepsilon \tag{4.9}$$

при любых (t_*, x_*), (t^*, x^*) из $\mathcal{D}$ $(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta)$ и любых $l \in S$.

Введем далее обозначение $\Omega_{ik}(t) = \operatorname{int} \Phi_{ik}(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Из условий 1, 2 (стр. 119) выводим, что множество $\Omega_{ik}(t)$ непрерывно по t на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ в хаусдорфовой метрике. Это означает: для любых $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ и $\xi > 0$ найдется такое $\rho = \rho(\xi) > 0$, что

$$d\big(\Omega_{ik}(t_*), \Omega_{ik}(t^*)\big) \leqslant \xi \tag{4.10}$$

при любых $t^* \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ |t_* - t^*| \leqslant \rho$.

Будем считать, не нарушая общности рассуждений, что $\rho(\xi) \downarrow 0$ при $\xi \downarrow 0$. Тогда для числа $\delta = \delta(\varepsilon)$ (стр. (4.6)) можно выбрать $\xi > 0$ в (4.10) настолько малым, что будет справедливо неравенство

$$\rho(\xi) + \xi \leqslant \delta. \tag{4.11}$$

Следовательно, для любых $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ и $\xi > 0$ найдется такое $\rho = \rho(\xi) > 0$, что каковы бы ни были $t^* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $\big(|t_* - t^*| \leqslant \rho\big)$ и $x_* \in \Omega_{ik}(t_*)$, найдется точка $x^* \in \Omega_{ik}(t^*)$, для которой справедливо

$$|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \rho(\xi) + \xi \leqslant \delta. \tag{4.12}$$

Значит, для этих (t_*, x_*) и (t^*, x^*) и любого $l \in S$ верно неравенство (4.9). Стало быть, для этих точек (t_*, x_*) и (t^*, x^*) верно неравенство

$$\Big|\sup_{l\in S}\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, F_l(t_*, x_*))\big) - \sup_{l\in S}\varphi'_{ik}\big(t^*, x^*; (1, F_l(t^*, x^*))\big)\Big| \leqslant \varepsilon. \tag{4.13}$$

Учитывая, что точки (t_*, x_*) и (t^*, x^*) содержатся в $\operatorname{int}\Phi_{ik}$ и что $\operatorname{int}\Phi_{ik} \cap \operatorname{int}\Phi_{is} = \varnothing$ при любом $s \neq k$, получаем

$$\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, F_l(t_*, x_*))\big) = \varphi'\big(t_*, x_*; (1, F_l(t_*, x_*))\big),$$

$$\varphi'_{ik}\big(t^*, x^*; (1, F_l(t^*, x^*))\big) = \varphi'\big(t^*, x^*; (1, F_l(t^*, x^*))\big).$$

Учитывая эти равенства, получаем, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ найдется $\rho > 0$ такое, что для любых $x_* \in \Omega_{ik}(t_*)$ и $t^* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ($|t_* - t^*| \leqslant \rho$) найдется точка $x^* \in \Omega_{ik}(t^*)$, для которой справедливо

$$\big|\varepsilon_*(t_*, x_*) - \varepsilon_*(t^*, x^*)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{4.14}$$

Отсюда делаем вывод, что функция $\xi_{ik}(t) = \sup\limits_{x\in\Omega_{ik}(t)} \varepsilon_*(t, x)$ непрерывна на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ и это верно для всех i, k ($i = \overline{1, I}$, $k \in \overline{1, k_*}$), в частности, и для $k = s$.

Выберем далее точку $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_i$, удовлетворяющую соотношению $x_* \notin \bigcup\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \Omega_{ik}(t_*)$. Для точки x_* в этом случае найдутся по меньшей мере два множества $\Phi_{ik}(t_*)$ и $\Phi_{is}(t_*)$, которым она принадлежит. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что точка x_* принадлежит только этим двум множествам. Тогда имеем равенство

$$\varphi'\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big) = \min\Big(\varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big), \varphi'_{is}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big)\Big)$$

Из этого равенства следует

$$\min_{f_*\in F_l(t_*,x_*)} \varphi'\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big) = \min\Big(\min_{f_*\in F_l(t_*,x_*)} \varphi'_{ik}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big),$$

$$\min_{f_*\in F_l(t_*,x_*)} \varphi'_{is}\big(t_*, x_*; (1, f_*)\big)\Big). \tag{4.15}$$

Так как $x_* \in \Phi_{ik}(t_*) = \operatorname{cl}\Omega_{ik}(t_*)$, то найдется последовательность $\{x_j\}$, содержащаяся в $\Omega_{ik}(t_*)$ и сходящаяся к x_*, то есть $x_* = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$.

Здесь $\operatorname{cl}\Omega_{ik}(t_*)$ — замыкание множества $\Omega_{ik}(t_*)$ в $\mathbb{R}^m$.

Отсюда и из непрерывной зависимости функции $\varphi'_{ik}\Big(t,x;\big(1,F_l(t,x)\big)\Big)$ от t,x следует

$$\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_j;\big(1,F_l(t_*,x_j)\big)\Big)\to\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\\ \text{при } j\to\infty. \tag{4.16}$$

Принимая во внимание (4.16), получаем

$$\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)}\varphi'_{ik}\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big)=\\ \sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big). \tag{4.17}$$

Аналогично, имеет место неравенство

$$\varphi'_{is}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{is}(t_*)}\varphi'_{is}\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big)=\\ \sup_{z\in\Omega_{is}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big). \tag{4.18}$$

Из (4.17), (4.18) следует соотношение

$$\varphi'\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)=\\ \min\Big(\varphi'_{ik}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big),\varphi'_{is}\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\Big)\leqslant\\ \min\Big(\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big),\sup_{z\in\Omega_{is}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big)\Big),$$

то есть при любых $l\in S$

$$\varphi'\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)\cup\Omega_{is}(t_*)}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big). \tag{4.19}$$

Следовательно, имеем

$$\sup_{l\in S}\varphi'\Big(t_*,x_*;\big(1,F_l(t_*,x_*)\big)\Big)\leqslant\\ \sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)\cup\Omega_{is}(t_*)}\ \sup_{l\in S}\varphi'\Big(t_*,z;\big(1,F_l(t_*,z)\big)\Big), \tag{4.20}$$

иными словами, выполняется неравенство

$$\varepsilon_*(t_*,x_*)\leqslant\sup_{z\in\Omega_{ik}(t_*)\cup\Omega_{is}(t_*)}\varepsilon_*(t_*,z). \tag{4.21}$$

Выше мы рассмотрели точку $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_i$ $\big(x_* \notin \bigcup\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \Omega_{ik}(t_*)\big)$, принадлежащую ровно двум множествам вида $\Phi_{ik}(t_*)$, $k \in \overline{1,k_*}$.

Очевидно, что для точки $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}_i$ $\big(x_* \notin \bigcup\limits_{k\in\overline{1,k_*}} \Omega_{ik}(t_*)\big)$ в общем случае верны включения $x_* \in \Phi_{ik_j}(t_*)$, $j \in \overline{1,J}$, где $J \leqslant k_*$ и k_j – натуральные числа, не превосходящие числа k_*. Для такой точки (t_*, x_*) выполняется по аналогии с (4.21) неравенство

$$\varepsilon_*(t_*, x_*) \leqslant \sup_{z\in \bigcup\limits_{j\in\overline{1,J}} \Omega_{ik_j}(t_*)} \varepsilon_*(t_*, z). \tag{4.22}$$

Из неравенства (4.22) следует, что при любом $t_* \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}\varepsilon_*(t_*) = \sup_{x_*\in\mathcal{D}(t_*)} \varepsilon_*(t_*, x_*) = \\ \max_{k\in\overline{1,k_*}} \sup_{x_*\in\Omega_{ik}(t_*)} \varepsilon_*(t_*, x_*) = \max_{k\in\overline{1,k_*}} \xi_{ik}(t_*).\end{gathered} \tag{4.23}$$

Выше (на стр. 123) было показано, что функции $\xi_{ik}(t)$, $k \in \overline{1,k_*}$, непрерывны на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Тем самым получаем, что функция $\varepsilon_*(t)$ непрерывна на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{1,I}$.

В итоге мы показали, что в рассматриваемом примере функция $\varepsilon_*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ удовлетворяет условию $\mathbf{C.3^0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев М. И. *Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрёстными связями* // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.

2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1990.

3. Красовский Н. Н. *Игровые задачи динамики. I* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Смешанное управление в дифференциальной игре* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 745–747.

5. Красовский Н. Н. *Игровые задачи о встрече движений.* М.: Наука, 1970.

6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *О структуре дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 523–526.

7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

8. Красовский Н. Н. *К задаче унификации дифференциальных игр* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.

9. Красовский Н. Н. *Унификация дифференциальных игр* // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.

10. Куржанский А. Б. *Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления* // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.

11. Никольский М. С. *Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина* // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.

12. Осипов Ю. С. *Альтернатива в дифференциально–разностной игре* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 5. С. 619–624

13. Петров Н. Н. *О существовании значения игры преследования* // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 6. С. 1289–1291.

14. Понтрягин Л. С. *О линейных дифференциальных играх. II* // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.

15. Понтрягин Л. С. *Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры* // М.: Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 119–158.

16. Субботин А. И., Ченцов А. Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

17. Субботин А. И., Субботина Н. Н. *Функция оптимального результата в задаче управления* // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 2. С. 294–299.

18. Субботин А. И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка.* Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.

19. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. *О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения.* Деп. в ВИНИТИ, № 2454-83. Свердловск, 1983.

20. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. *Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления* // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. вып. 2. С. 216–222.

21. Ухоботов В. И. *Аналитическая схема построения стабильных мостов для операторов программного поглощения с инвариантными семействами множеств* // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2005. № 2 (32). С. 23–34.

22. Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. *Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления* // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178–194.

23. Ушаков В. Н., Малёв А. Г. *К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении* // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16. №. 1. С. 199–222.

24. Филиппова Т. Ф. *Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы* // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232.

25. Черноусько Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* М.: Наука. 1988.

26. Guseinov H. G., Subbotin A. I., and Ushakov V. N. *Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game–Theoretical Problems of Control* // Problems Control Inform. Theory. 1985. V. 14. №. 6. P. 405–419.

27. Kurzhanski A. B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Boston: Birkhauser, 1997.

28. Osipov Yu. S., Kryazhimski A. V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* London: Gordon and Breach, 1995.

29. Petrosjan L. *Differential Games of Pursuit.* World Scientific: Singapore. 1993.

30. Ushakov V. N., Taras'ev A. M., Tokmantsev T. B., Uspenskii A. A. *On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time* // Journal of Mathematical Sciences. 2006. V. 139, N. 5. P. 6954–6975.

31. Ushakov V. N., Brykalov S. A., Latushkin Y. A. *Stable and unstanble sets in problems of conflict control* // Functional Differential Equations. 2008. V. 15. N. 3–4. P. 309–338.

FUNCTION DEFECT IN DIFFERENTIAL GAMES WITH TERMINAL PAY

Vladimir N. Ushakov, IMM UrO RAN, Dr. Sc., chief of the department (ushak@imm.uran.ru).
Alexandr A. Uspenskiy, IMM UrO RAN, Cand. Sc. (uspen@imm.uran.ru).

Abstract: The antagonistic differential game of two players with terminal pay function is considered. Function defect conception is suggested for functions connected with the coast of the game.

Keywords: game problem, control, conflict controlled system, Hamiltonian, stability defect, stable bridge.

Пример оформления статьи для публикации в журнале «Математическая теория игр и её приложения»

Статьи принимаются в формате TEX. Правила оформления и стилевой файл доступны на официальном сайте журнала: http://mgta.krc.karelia.ru

УДК (обязательно указывать)
ББК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

Имя О. Фамилия*
Организация
Полный адрес организации
e-mail: author@noname.ru

Текст аннотации.

Ключевые слова: список ключевых слов, разделенных запятыми.

1. Введение

Основной текст должен быть напечатан 12 шрифтом.

Ссылки на литературу в тексте должны быть в виде [1] или [1,2 - 5]. Все сокращения в тексте должны быть расшифрованы при первом упоминании.

2. Модель

Нумеровать следует только те формулы, на которые есть ссылки в тексте. Формулы с номерами должны быть выделены в отдельную

* Ссылка на грант

строку. Нумерация двойная по разделам: (1.1) – в разделе 1; (2.1) – в разделе 2, и т.д.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,. \tag{2.1}$$

Нумерация теорем, определений, следствий и т.д. – двойная по разделам арабскими цифрами.

Теорема 2.1. *Формулировка теоремы.*

Доказательство. Формулировка доказательства.

$$a = b\,. \tag{2.2}$$

□

2.1. Основные определения

Подразделы должны быть выделены двойной нумерацией.

Определение 2.1. *Формулировка определения.*

Замечание 2.1. Формулировка замечания.

3. Таблицы

Числовой материал следует представлять в форме таблицы. Все таблицы должны быть пронумерованы сквозной нумерацией арабскими цифрами. После номера может быть указано название таблицы.[1]

Таблица 1.

1	2	3
4	5	6

4. Рисунки

Рисунки должны быть выполнены в хорошем качестве, преимущественно в формате .eps. Нумерация рисунков сквозная. Каждый рисунок должен иметь подпись.

[1] сноски из текста нумеруются по порядку следования

МТИ&П

Рисунок 1. Журнал

Список литературы оформляется как нумерованный список. Первыми приводятся источники на русском языке, затем на английском.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. *Название книги.* Город: Издательство, 2008.
2. Фамилия1 И.О., Фамилия2 И.О. *Название статьи* // Название Журнала. 1993. № 1. С. 59–78.
3. Surname1 N., Surname2 N. *Title* // Journal. 2001. V. 1. N 2. P. 9–17.

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

ФИО на английском языке, название организации, научная степень, научное звание на английском языке (author@noname.ru).

Abstract: Аннотация на английском языке.

Keywords: ключевые слова на английском языке.

Четвертая международная конференция «Теория Игр и Менеджмент» (GTM2010)

28-30 июня 2010, Санкт-Петербург, Россия

Научная программа

Работа конференции сконцентрирована на следующих направлениях:
• Теория игр и приложения в менеджменте
• Кооперативные игры и приложения
• Динамические игры и приложения
• Эволюционные игры и приложения
• Стохастические игры и приложения
• Приложения теории игр в следующих областях: стратегический и международный менеджмент, отраслевая организация, маркетинг, управление операциями, государственное управление, финансовый менеджмент, управление персоналом, управление энергетикой и ресурсами, проблемы управления охраной окружающей среды.

Рабочий язык конференции - английский.

Пленарные доклады

Аркадий Кряжимский (Международный институт прикладного системного анализа, Австрия; Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Россия)
Эрве Мулен (Университет г. Райс, США)
Алан Ори (Университет г. Женева, Швейцария)
Терри Рокафеллар (Университет г. Вашингтон, США)

Программный комитет

председатель: Валерий С. Катькало (Высшая школа менеджмента СПбГУ, Россия)
председатель: Леон А. Петросян (Факультет прикладной математики – процессов управления СПбГУ; Центр теории игр, Россия)
Eitan Altman (France); Jesus Mario Bilbao (Spain); Irinel Dragan (USA); Hongwei Gao (China); Andrey Garnaev (Russia); Sergiu Hart (Israel); Steffen Jorgensen (Denmark); Ehud Kalai (USA); Andrea Di Liddo (Italy); Vladimir Mazalov (Russia); Shigeo Muto (Japan); Richard Staelin (USA); Krzysztof Szajowski (Poland); Myrna Wooders (UK); David Yeung (Hong-Kong); Georges Zaccour (Canada); Nikolay Zenkevich (Russia); Paul Zipkin (USA)

Локальный оргкомитет

председатель: Валерий С. Катькало (Высшая школа менеджмента СПбГУ, Россия)
председатель: Леон А. Петросян (Факультет прикладной математики – процессов управления СПбГУ; Центр теории игр, Россия)
Николай А. Зенкевич (Высшая школа менеджмента СПбГУ, Россия)

Спонсоры

Высшая школа менеджмента СПбГУ, Факультет прикладной математики – процессов управления СПбГУ, Центр теории игр.

Международная конференция «Stochastic Optimal Stopping» (SOS2010)

12-16 сентября 2010, Петрозаводск, Россия

Научная программа

Работа конференции сконцентрирована на следующих направлениях:
• Оптимальная остановка. Общая теория
• Правила многократной остановки и оптимальная остановка пространственных процессов
• Задачи наилучшего выбора и их обобщения, задача о парковке, задача поиска работы
• Задачи оптимальной остановки с ограничениями
• Задача о разладке
• Стохастические игры
• Сетевые игры
• Оптимальная остановка и американские опционы
• Методы математического программирования в задачах оптимальной остановки

Программный комитет

председатель: Альберт Н. Ширяев (Математический Институт им. В.А. Стеклова, Россия)
Владимир В. Мазалов (Институт Прикладных Математических Исследований Карельский Научный Центр РАН, Россия)
Goran Peskir (The University of Manchester,UK)
Larry Shepp (Rutgers University, New Jersey, USA)
Albrecht Irle (University of Kiel, Germany)
Hans Rudolf Lerche (University of Freiburg, Germany)
Krzysztof Szajowski (Institute of Mathematics, Wroclaw University of Technology, Poland)
Mitsushi Tamaki (Aichi University, Japan)

Локальный оргкомитет

председатель: Владимир В. Мазалов (Институт Прикладных Математических Исследований Карельский Научный Центр РАН, Россия)

Публикации

Все представленные доклады будут опубликованы в сборнике тезисов, а избранные статьи в настоящем и последующих выпусках журнала «Математическая теория игр и её приложения».

Поддержано грантами РФФИ № 10-01-06035-г и ОМН РАН.

Пятая международная конференция «Теория Игр и Менеджмент» (GTM 2011)

27-29 июня 2011, Санкт-Петербург, Россия

Научная программа

Тематика конференции включает результаты теоретических и прикладных исследования по кооперативным, динамическим, дифференциальным, стохастическим и эволюционным; сетевым, обучающим и адаптивным играм, и вопросы приложений теории игр в самом широком спектре областей менеджмента: стратегический и международный менеджмент; отраслевая организация; маркетинг; управление операциями и цепями поставок; государственное управление, финансовый менеджмент, управление персоналом, управление энергетикой и рациональным использованием природных ресурсов; управление охраной окружающей среды и др.

Рабочий язык конференции - английский.

Пленарные доклады

Йорген Вейбулл (Школа экономики г. Стокгольма, Швеция)
Шмуэль Замир (Университет г. Иерусалим, Израиль)
Владимир Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН, Россия)
Роджер Майерсон (Университет г. Чикаго, США)

Программный комитет

председатель: Валерий С. Катькало (Высшая школа менеджмента СПбГУ)
председатель: Леон А. Петросян (Факультет прикладной математики – процессов управления СПбГУ; Центр теории игр, Россия)
Eitan Altman (France); Jesus Mario Bilbao (Spain); Irinel Dragan (USA);
Hongwei Gao (China); Andrey Garnaev (Russia); Sergiu Hart (Israel);
Steffen Jorgensen (Denmark); Ehud Kalai (USA); Andrea Di Liddo (Italy);
Vladimir Mazalov (Russia); Shigeo Muto (Japan); Richard Staelin (USA);
Krzysztof Szajowski (Poland); Myrna Wooders (UK); David Yeung (Hong-Kong);
Georges Zaccour (Canada); Nikolay Zenkevich (Russia); Paul Zipkin (USA)

Локальный оргкомитет

председатель: Валерий С. Катькало (Высшая школа менеджмента СПбГУ)
председатель: Леон А. Петросян (Факультет прикладной математики – процессов управления СПбГУ; Центр теории игр, Россия)
Николай А. Зенкевич (Высшая школа менеджмента СПбГУ, Россия)

Спонсоры

Высшая школа менеджмента СПбГУ, Факультет прикладной математики – процессов управления СПбГУ, Центр теории игр.

Контактная информация

Мария Дорохина (менеджер конференции)
e-mail: game@gsom.pu.ru, тел.: (+7 812) 3238464, факс: (+7 812) 3238451
Сайт конференции: http://www.gsom.pu.ru/en/gtm2011/

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Том 2
Выпуск 2

Печатается по решению Ученого совета
Института прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Оригинал-макет *А. Н. Реттиева*

Сдано в печать 27.09.10.
Формат 70x108$^{1}/_{16}$. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,1. Усл. печ. л. 11,7. Тираж 300 экз.
Изд. № 143. Заказ 901.

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
Петрозаводск, пр. А. Невского, 50