

УДК 519.2

## О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ В СЛУЧАЙНОМ ГРАФЕ ИНТЕРНЕТ-ТИПА

Ю. Л. Павлов<sup>1</sup>, Е. Н. Дертишникова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладных математических исследований  
Карельского научного центра РАН

<sup>2</sup>Институт социально-экономического развития территорий (г. Вологда)

Рассматриваются случайные графы, состоящие из  $N$  занумерованных вершин. Степени вершин определяются независимо в соответствии со степенным распределением с показателем  $\tau > 0$ . Все полуребра вершин занумерованы. Граф строится путем равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Последние исследования показали, что такие случайные графы можно использовать для моделирования топологии сети Интернет. Получено предельное распределение максимальной степени вершины при условии, что сумма степеней равна  $n$ , где  $n$  четно,  $\tau < 1$  и  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$ .

**К л ю ч е в ы е с л о в а :** случайные графы, Интернет, максимальная степень вершины, предельное распределение.

**Yu. L. Pavlov, E. N. Dertishnikova. ON LIMIT DISTRIBUTION OF  
MAXIMUM VERTEX DEGREE IN RANDOM GRAPH OF INTERNET TYPE**

We study random graphs consisting of  $N$  numbered vertices. The degrees of the vertices are drawn independently from power-law distribution with the exponent  $\tau > 0$ . All of the stubs of the vertices are numbered. The graph is constructed by joining each stub to another equiprobably to form edges. Recent studies show that such random graphs can be used for modeling the Internet topology. We obtain the limit distribution of the maximum vertex degree under the condition that the sum of vertex degrees is equal to  $n$ ,  $n$  is even,  $\tau < 1$  and  $N, n \rightarrow \infty$  such that  $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$ .

**Key words :** random graphs, Internet, maximum vertex degree, limit distribution.

В последнее время появилось большое число книг и статей, посвященных использованию случайных графов для моделирования сложных сетей передачи данных, включая Интернет (см. например, [Janson et al., 2000; Reittu, Norros, 2004; Durrett, 2007]). В связи с этим такие графы иногда называют графами Интернет-типа. Степени их вершин являются независимыми случайными величинами, об-

щим распределением которых служит дискретный аналог распределения Парето с положительным показателем  $\tau$ .

Пусть в графе содержится  $N$  вершин, занумерованных числами от 1 до  $N$ , а степени вершин обозначим  $\eta_1, \dots, \eta_N$ . Пусть  $\eta$  – случайная величина, равная степени произвольной вершины, и положим

$$P\{\eta \geq k\} = k^{-\tau}, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Для удобства описания структуры графа будем использовать понятие полуребра, т. е. ребра, инцидентного конкретной вершине, но для которой смежная вершина еще не определена. Предполагается, что все полуребра графа являются различными (занумерованными). Процесс формирования графа состоит из двух этапов. На первом этапе для каждой вершины определяется ее степень, т. е. число выходящих из нее полуребер, являющееся реализацией случайной величины  $\eta$ . На втором этапе полуребра, выходящие из всех вершин, соединяются равновероятно; два полуребра, соединившись, образуют ребро. Понятно, что для построения графа необходимо, чтобы общее число полуребер было четным. Для обеспечения этого условия искусственно вводят дополнительную вершину, степень которой равна 0 или 1 в зависимости от того, является ли суммарное число полуребер основных вершин четным или нет. Нетрудно видеть, что такая конструкция графа допускает петли и кратные ребра.

Во многих работах (см., например, [Reittu, Norros, 2004; Durrett, 2007]) указываются возможные варианты содержательной интерпретации рассмотренной модели. Например, при моделировании Интернета, вершинам графа могут соответствовать локальные сети (точнее, автономные системы), кратные ребра означают одновременную передачу данных несколькими компьютерами одной сети в другую, а петля соответствует подключению одного компьютера к другому через общий маршрутизатор внутри одной локальной сети.

В различных статьях и монографиях (см. например, [Janson et al., 2000; Reittu, Norros, 2004; Durrett, 2007; Павлов, 2007, 2009; Павлов, Чеплюкова, 2008]) изучалось предельное поведение различных характеристик Интернет-графов при  $N \rightarrow \infty$ . В ходе исследований выяснилось, что свойства графов существенно зависят от значения параметра  $\tau$ . Наблюдения за реальными сетями показали, что предложенная модель является адекватной, если  $\tau \in (1, 2)$ , хотя с развитием сетей уже встречаются случаи  $\tau < 1$ . Отмечается также, что если параметр  $\tau$  изменяется так, что его значение переходит через точки  $\tau = 1$  или  $\tau = 2$ , то происходят значительные изменения свойств графа. Поэтому представляет интерес изучение графов Интернет-типа и при значениях параметра  $\tau$  вне интервала  $(1, 2)$ . Заметим, что если  $\tau \in (1, 2)$ , то распределение (1) имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию.

Представляют интерес Интернет-графы с заданной суммой степеней вершин  $v_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$ , так как на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях, а если известны результаты о таких графах в различных зонах изменения  $N$  и  $v_N$ , то их можно распространить и на графы со случайным числом ребер.

В настоящей работе рассматривается подмножество Интернет-графов, для которых сумма степеней вершин известна и равна  $n$ . Расположим степени вершин в виде вариационного ряда  $\eta_{(1)} \leq \eta_{(2)} \leq \dots \leq \eta_{(N)}$ , записав  $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(N)}$  в убывающем порядке. Обозначим  $\eta_{(N)}$  максимальную степень вершины, т. е.  $\eta_{(N)} = \max_{1 \leq i \leq N} \eta_i$ .

В работе [Павлов, Чеплюкова, 2008] было найдено предельное распределение максимальной степени вершины при  $\tau > 0$  и  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $1 < n/N < \zeta(\tau)$ , где  $\zeta(\tau)$  – значение дзета-функции Римана в точке  $\tau$ . В этой работе рассматривались также случаи  $n/N \downarrow 1$  и  $n/N \uparrow \zeta(\tau)$ . Заметим, что при  $\tau \leq 1$  справедливо равенство  $\zeta(\tau) = \infty$ . В случае  $n/N \rightarrow \infty$  и  $\tau < 1$  было дополнительное условие  $n/N I^\tau \rightarrow 0$ . В работе [Павлов, 2009] получены предельные теоремы для  $\eta_{(N)}$  в случае  $\tau > 1$  и  $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ .

В настоящей работе доказана теорема о предельном поведении максимальной степени вершины при условии, что  $\tau \in (0, 1)$ ,  $v_N = n$  и  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N I^\tau \rightarrow \infty$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N I^\tau \rightarrow \infty$ ,  $\tau \in (0, 1)$ . Тогда

$$P \left\{ \frac{n - \eta_N}{N^{1/\tau}} \leq z \right\} \rightarrow \int_0^z g(x) dx,$$

где  $g(x)$  – плотность устойчивого распределения с показателем  $\tau$  и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -\Gamma(1-\tau) |t|^\tau \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \right) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right\}, \quad (2)$$

а  $\Gamma(1-\tau)$  означает значение гамма-функции в точке  $1-\tau$ .

Методом доказательства теоремы является обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и изученная В. Ф. Колчиным (см., например, [Колчин, 2004]). Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1-3), с помощью которых в конце статьи доказывается сформулированная теорема.

Из (1) ясно, что

$$p_k = P\{\eta = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k=1, 2, \dots \quad (3)$$

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_N$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая из которых имеет распределенные (3). Отсюда следует, как легко видеть, что если  $k_1, \dots, k_N$  – натуральные числа такие, что  $k_1 + \dots + k_N = n$ , то справедливо равенство

$$\begin{aligned} P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \\ P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \end{aligned} \quad (4)$$

а если  $k_1 + \dots + k_N \neq n$ , то

$P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = 0$ . Соотношение (4) означает, что для двух наборов случайных величин  $(\eta_1, \dots, \eta_N)$  и  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$  выполнены условия обобщенной схемы размещения.

Введем вспомогательные случайные величины  $(\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)})$ , для которых

$$P\{\xi_i^{(r)} = k\} = P\{\xi_i = k \mid \xi_i \leq r\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

и обозначим

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)},$$

$$P_r = P\{\xi_1 > r\}.$$

Используя (4), легко получить следующую лемму.

**Лемма 1.** Справедливо равенство

$$P\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{P\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{P\{\zeta_N = n\}}.$$

Рассмотрим предельное поведение вероятности  $P\{\zeta_N = n\}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^{1/\tau} \rightarrow \infty$ . Тогда для  $n$  таких, что  $P\{\zeta_N = n\} > 0$ ,

$$P\{\zeta_N = n\} = \tau N n^{-(\tau+1)} (1 + o(1)).$$

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что лемма 2 вытекает из результатов работы [Ткачук, 1973]. Однако, следуя этой работе и лемме 2.5.2 книги [Pavlov, 2000], мы приведем подробное доказательство леммы 2, поскольку, как будет видно ниже, оно послужит основой для аналогичного доказательства в схеме серий (лемма 3), для которой использовать статью [Ткачук, 1973] нельзя. Обозначим

$$\gamma = (N^{1/\tau} / n)^\alpha, \quad (5)$$

где  $\alpha = \tau / (2\tau + 2)$ . Легко видеть, что

$$P\{\zeta_N = n\} = P_1(n) + NP_2(n) + P_3(n), \quad (6)$$

где

$$P_1(n) = P\{\zeta_N = n; \xi_i \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, N\},$$

$$P_2(n) =$$

$$P\{\zeta_N = n; \xi_i \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, N-1, \xi_N > \gamma\},$$

$$P_3(n) = P\left\{\zeta_N = n; \bigcup_{i \neq j} (\xi_i > \gamma, \quad \xi_j > \gamma)\right\}.$$

Оценивая последовательно эти вероятности, мы увидим ниже, что основной вклад в сумму (6) дает второе слагаемое.

Рассмотрим вероятность  $P_1(n)$ . Обозначим

$$R(w) = \sum_{k \leq \gamma n} \exp\{kw\} p_k. \quad (7)$$

Из (3) следует, что при  $k \rightarrow \infty$

$$pk = \tau k^{-(\tau+1)} (1 + o(1)). \quad (8)$$

Отсюда нетрудно получить, что при достаточно больших  $l$

$$\sum_{k \leq l} kp_k \leq C_1 l^{1-\tau}, \quad \sum_{k > l} p_k \leq C_2 l^{-\tau}, \quad (9)$$

здесь и далее символы  $C_1, C_2, \dots$  означают некоторые положительные постоянные.

Поскольку  $N^{1/\tau} / n \rightarrow 0$ , из (5) следует, что  $(\gamma n)^{-\tau} = o(N^{-1})$ .

Используя это соотношение и учитывая, что при  $0 \leq y \leq 1$  справедливо равенство  $e^y = 1 + \delta(y)$ , где  $\delta(y) \leq 2y$ , из (7) и (9) получаем, что

$$R(1/(\gamma n)) = \sum_{k \leq \gamma n} p_k \exp\{k/(\gamma n)\} =$$

$$\sum_{k \leq \gamma n} p_k (1 + \delta(k/(\gamma n))) = 1 - \sum_{k > \gamma n} p_k + Q,$$

где, в силу (9), (10), при  $N \rightarrow \infty$

$$Q < 2(\gamma n)^{-1} \sum_{k > \gamma n} kp_k = o(N^{-1}),$$

$$\sum_{k > \gamma n} p_k = o(N^{-1}). \quad (11)$$

Учитывая это, находим, что

$$R(1/(\gamma n)) = 1 + o(N^{-1}). \quad (12)$$

Введем вспомогательные независимые, одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1(\gamma), \dots, \xi_N(\gamma)$ , имеющие следующее распределение вероятностей:

$$P\{\xi_i(\gamma) = k\} = p_k \exp\{k/(\gamma n)\} R^{-1}(1/(\gamma n)), \quad k \leq \gamma n.$$

Обозначим  $\zeta_N(\gamma) = \xi_1(\gamma) + \dots + \xi_N(\gamma)$ . Легко видеть, что

$$P_1(n) = R^N(1/(\gamma n)) \exp\{-1/\gamma\} P\{\zeta_N(\gamma) = n\}. \quad (13)$$

Докажем, что при  $N \rightarrow \infty$

$$P\{\zeta_N(\gamma) = n\} \leq C_3 N^{-1/\tau}. \quad (14)$$

Обозначим  $\varphi(t), \varphi_\gamma(t)$  характеристические функции случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_1(\gamma)$  соответственно. Воспользуемся формулой обращения и представим вероятность  $P\{\zeta_N(\gamma) = n\}$  в виде

$$P\{\zeta_N(\gamma) = n\} =$$

$$\frac{1}{2\pi N^{1/\tau}} \int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} \exp\left\{-\frac{itn}{N^{1/\tau}}\right\} \left(\varphi_\gamma\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)\right)^N dt. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_\gamma(t) = R(it + 1/(\gamma)) / R(1/(\gamma)). \quad (16)$$

Поскольку  $\exp\{k/(\gamma)\} \leq 1 + 2k/(\gamma)$ ,

$$|R(it + 1/(\gamma))| \leq \left| \sum_{k \leq \gamma} p_k e^{ik} \right| + 2(\gamma)^{-1} \times \quad (17)$$

$$\sum_{k \leq \gamma} kp_k \leq |\varphi(t)| + 2(\gamma)^{-1} \sum_{k \leq \gamma} kp_k + O\left(\sum_{k > \gamma} p_k\right).$$

Отсюда и из (11) получаем, что

$$|R(it + 1/(\gamma))| \leq |\varphi(t)| + o(N^{-1}).$$

Тогда из (12) и (16) следует, что

$$|\varphi_\gamma(t)|^N \leq |\varphi(t)|^N |1 + o(\varphi^{-1}(t)N^{-1})|^N. \quad (18)$$

Покажем, что для  $t \in [-\pi, \pi]$  справедливо неравенство  $|\varphi_\gamma(t)| \geq C_4 > 0$ .

Из (3) получаем, что

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \quad (19)$$

где  $\Phi(z, s, a)$  – трансцендентная функция Лерча, имеющая вид:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt. \quad (20)$$

При  $s < 1$  и  $z \rightarrow 1$  известна асимптотика функции (20) (см., например, [Flajolet, Sedgewick, 2009]):

$$\Phi(z, s, 1) = \Gamma(1-s)(-\ln z)^{s-1}(1 + o(1)). \quad (21)$$

Отсюда и из (19) нетрудно получить, что  $\varphi(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow 0$ . Рассмотрим случай  $0 < \varepsilon \leq |t| \leq \pi$ . Из (19) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(t) &= 1 + (\cos t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kt}{(k+1)^\tau} - \\ \sin t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kt}{(k+1)^\tau} &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k+1)t}{(k+1)^\tau} - \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kt}{(k+1)^\tau}. \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно [Прудников и др., 1981] (см. примеры 5.4.3.1 и 5.4.2.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kt}{(k+1)^\tau} = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\tau-1} e^{-x} (1 - e^{-x} \cos t)}{1 - 2e^{-x} \cos t + e^{-2x}} dx,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k+1)t}{(k+1)^\tau} = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\tau-1} (e^x \cos t - 1)}{1 - 2e^x \cos t + e^{2x}} dx.$$

Подставляя эти выражения в (22), получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi(t) &= \\ 1 - \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^{\infty} x^{\tau-1} e^{-x} \frac{(1 - \cos t)(1 + e^{-x})}{1 - 2e^{-x} \cos t + e^{-2x}} dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Для того чтобы выполнялось равенство  $\operatorname{Re} \varphi(t) = 0$ , последнее слагаемое в (23) должно равняться единице. Но это возможно только, если для всех  $x$

$$\frac{(1 - \cos t)(1 + e^{-x})}{1 - 2e^{-x} \cos t + e^{-2x}} = 1,$$

или  $\cos t = e^{-x}$ , что исключено. Поэтому  $\operatorname{Re} \varphi(t) \neq 0$  и из (18) следует, что при любом фиксированном  $t$

$$|\varphi_\gamma(t)|^N \leq C_5 |\varphi(t)|^N. \quad (24)$$

Из (19) и (21) находим, что при  $t \rightarrow 0$

$$\varphi(t) = 1 + (it - t^2/2 + O(t^3))\Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1},$$

откуда получаем, что при  $|t| < \varepsilon$  и достаточно малом  $\varepsilon$

$$|\varphi(t)| \leq \exp\{-C_6 |t|^\tau\}. \quad (25)$$

Поскольку при  $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$  справедливо неравенство

$$|\varphi(t)| \leq e^{-C_7}, \quad (26)$$

из (15), (24) и (25) следует, что

$$\mathbb{P}\{\zeta_N(\gamma) = n\} \leq C_8 N^{-1/\tau} \times$$

$$\int_{|t| < \varepsilon N^{1/\tau}} \exp\{-C_9 |t|^\tau\} dt + C_{10} N^{-1/\tau} \int_{\varepsilon N^{1/\tau} \leq |t| \leq \pi N^{1/\tau}} e^{-C_{11} N} dt,$$

откуда и следует (14). Из (5) и (12)-(14) находим, что

$$P_1(n) \leq C_{12} N^{-1/\tau} e^{-1/\gamma} = o(Nn^{-(\tau+1)}). \quad (27)$$

Оценим вероятность  $P_2(n)$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} P_2(n) &= \sum_{N-1 \leq k < n - \gamma} \mathbb{P}\{\xi_N = n - k\} \mathbb{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} = k, \\ &\xi_i \leq \gamma, i = 1, \dots, N-1\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим  $\xi_1(\gamma), \dots, \xi_N(\gamma)$  вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbb{P}\{\xi_1(\gamma) = k\} = \mathbb{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq \gamma\}.$$

Обозначим также  $\zeta_{N-1}(\gamma) = \xi_1(\gamma) + \dots + \xi_{N-1}(\gamma)$ . Тогда

$$\mathbb{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1}, \xi_i \leq \gamma, i = 1, \dots, N-1\} =$$

$$\mathbb{P}^{N-1}\{\xi_1 \leq \gamma\} \mathbb{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} = k \mid \xi_1 \leq \gamma, i = 1, \dots, N-1\} =$$

$$\mathbb{P}^{N-1}\{\xi_1 \leq \gamma\} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma) = k\}.$$

Отсюда и из (9), (10), (28) следует, что

$$\begin{aligned} P_2(n) &= \\ (1 + o(1)) \sum_{N-1 \leq k < n - \gamma} \mathbb{P}\{\xi_N = n - k\} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma) = k\} \end{aligned} \quad (29)$$

Покажем, что при достаточно больших  $n$

$$\mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma) > \gamma^{-1} N^{1/\tau}\} \leq C_{13} \gamma^\tau. \quad (30)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leq (N-1)\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} + \\ & \left(\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}\right)^{N-1} \times \\ & \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau} \mid \xi_i(\mathcal{M}) \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}, i=1, \dots, N-1\} \leq \\ & (N-1)\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} + \left(\frac{1-\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}}{1-\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \mathcal{M}\}}\right)^{N-1} \times \\ & \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} = \sum_{k > \gamma^{-1}N^{1/\tau}} \mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) = k\} \leq$$

$$C_{14} \mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}.$$

Отсюда и из (9) получаем неравенство

$$\begin{aligned} (N-1)\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} & \leq C_{15}N(\gamma^{-1}N^{1/\tau})^{-\tau} \\ & = C_{15}\gamma^\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

С помощью (9) для достаточно больших  $n$  нетрудно вывести оценку:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_{N-1}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}) & = \\ & \sum_{k < \gamma^{-1}N^{1/\tau}} k \mathbb{P}\{\xi_{N-1} = k \mid \xi_{N-1} \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leq C_{16}(\gamma^{-1}N^{1/\tau})^{1-\tau}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Чёбышева, отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma^{-1}N^{1/\tau}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leq \\ & \gamma N^{1-1/\tau} \mathbb{E}\xi_1(\gamma^{-1}N^{1/\tau}) \leq C_{17}\gamma^\tau, \end{aligned} \quad (33)$$

а из (9) находим, что

$$\left(\frac{1-\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}}{1-\mathbb{P}\{\xi_1(\mathcal{M}) > \mathcal{M}\}}\right)^{N-1} = 1 + o(1),$$

поэтому из (31)-(33) следует оценка (30).

Учитывая (29), представим вероятность

$$P_2(n) \text{ в виде суммы} \quad (34)$$

$$P_2(n) = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_i = (1 + o(1)) \sum_{K_i} \mathbb{P}\{\xi_N = n - k\} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) = k\},$$

$$i = 1, 2, 3;$$

$$K_1 = \{k : N - 1 \leq k \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}\},$$

$$K_2 = \{k : \gamma^{-1}N^{1/\tau} < k \leq n(1 - \gamma^a)\},$$

$$K_3 = \{k : n(1 - \gamma^a) < k \leq n(1 - \gamma)\}.$$

С помощью (5) и (8) нетрудно получить, что для  $k \in K_1$  справедливо равенство

$$p_{n-k} = \tau(n-k)^{-(\tau+1)}(1 + o(1)), \text{ следовательно,}$$

$$S_1 = \tau(1 + o(1)) \sum_{K_1} (n-k)^{-(\tau+1)} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) = k\} =$$

$$\tau n^{-(\tau+1)} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} (1 + o(1)) =$$

$$\tau n^{-(\tau+1)} (1 + o(1)).$$

Покажем, что при выполнении условий леммы имеют место соотношения

$$S_2, S_3 = o(n^{-(\tau+1)}). \text{ Если } k \in K_2, \text{ то, как не-}$$

трудно видеть,

$$S_2 \leq C_{18}(n\gamma^a)^{-(\tau+1)} \sum_{K_2} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) = k\} \leq$$

$$C_{19}(n\gamma^a)^{-(\tau+1)} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}$$

и, как следует из (30),  $S_2 \leq C_{20}n^{-(\tau+1)}\gamma^{\tau/2}$ , по-

этому

$$S_2 = o(n^{-(\tau+1)}). \quad (36)$$

Рассмотрим  $S_3$ . Если  $k \in K_3$ , то, как и вы-

ше,  $p_{n-k} \leq C_{21}(\mathcal{M})^{-(\tau+1)}$ , откуда следует, что

$$S_3 \leq C_{22}(\mathcal{M})^{-(\tau+1)} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) > n(1 - \gamma^a)\}. \quad (37)$$

Учитывая (9), нетрудно получить, что  $\mathbb{E}\xi_1(\mathcal{M}) \leq C_{23}(\mathcal{M})^{1-\tau}$ . Поэтому с помощью неравенства Чёбышева находим, что

$$\mathbb{P}\{\zeta_{N-1}(\mathcal{M}) > n(1 - \gamma^a)\} \leq C_{24}Nn^{-\tau}\gamma^{1-\tau},$$

следовательно, как видно из (5) и (37),

$S_3 = o(n^{-(\tau+1)})$ . Отсюда, из оценок (35), (36) и

представления (34) получаем, что в условиях леммы

$$P_2(n) = \tau n^{-(\tau+1)}(1 + o(1)). \quad (38)$$

Оценим, наконец, вероятность  $P_3(n)$ . Легко заметить, что

$$P_3(n) = \binom{N}{2} \times$$

$$\sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbb{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-2} = k\} \mathbb{P}\{\xi_{N-1} + \xi_N = n - k, \xi_{N-1} > \mathcal{M}, \xi_N > \mathcal{M}\}.$$

Отсюда следует, что

$$P_3(n) \leq C_{25}N^2 \times$$

$$\sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbb{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-2} = k\} \left( \sum_S \mathbb{P}\{\xi_{N-1} = i\} \mathbb{P}\{\xi_N = n - k - i\} \right), \quad (39)$$

где  $S = \{i : \gamma n < i < n(1 - \gamma) - k\}$ . В силу (8) при  $i > \gamma n$

$$\mathbb{P}\{\xi_{N-1} = i\} < C_{26}(\mathcal{M})^{-(\tau+1)}, \text{ поэтому, используя}$$

(9), получаем, что

$$\sum_S \mathbb{P}\{\xi_{N-1} = i\} \mathbb{P}\{\xi_N = n - k - i\} \leq$$

$$C_{27}(\mathcal{M})^{(\tau+1)} \mathbb{P}\{\xi_N > \mathcal{M}\} \leq C_{28}(\mathcal{M})^{-(2\tau-1)}$$

Отсюда и из (39) следует, что

$$P_3(n) \leq C_{29}N^2(\mathcal{M})^{-2\tau-1} = o(Nn^{-(\tau+1)}),$$

и из (6), (27), (38) получаем утверждение леммы 2.

Для суммы  $\zeta_N^{(r)}$  справедлив следующий результат.

**Лемма 3.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n / N^{1/\tau} \rightarrow \infty$ ,  $r = n - zN^{1/\tau}$ , где  $z$  – фиксированное положительное число. Тогда

$$\mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = (1 + o(1)) z N n^{-(\tau+1)} \int_z^\infty g(x) dx,$$

где  $g(x)$  – плотность устойчивого распределения с показателем  $\tau$  и характеристической функцией (2).

*Доказательство.* Мы будем следовать методу доказательства леммы 2. Все введенные там обозначения сохраняют силу и далее, а случайные величины  $\zeta_N$  и  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , естественным образом заменяются на  $\zeta_N^{(r)}$  и  $\xi_i^{(r)}$  соответственно. Представим вероятность  $\mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}$  в виде суммы, аналогичной (6):

$$\mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = P_1(n) + NP_2(n) + P_3(n). \quad (40)$$

Для оценки  $P_1(n)$  нетрудно получить неравенства, подобные (9):

$$\sum_{k \leq l} \mathbb{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \leq C_1 l^{1-\tau}, \quad \sum_{k > l} \mathbb{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \leq C_2 l^{-\tau}. \quad (41)$$

Используя эти соотношения, легко находим, как и в (12), что

$$R(1/(\mathcal{M})) = 1 + o(N^{-1}). \quad (42)$$

Опять вводятся вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_i^{(r)}(\gamma), \dots, \xi_N^{(r)}(\gamma)$ , для которых

$$\mathbb{P}\{\xi_i^{(r)}(\gamma) = k\} = \exp\{k/(\mathcal{M})\} \mathbb{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} R^{-1}(1/(\mathcal{M})), \quad k \leq \mathcal{M}.$$

Легко видеть, что

$$P_1(n) = R^N(1/(\mathcal{M})) \exp\{-1/\gamma\} \mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)}(\gamma) = n\}, \quad (43)$$

где  $\zeta_N^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma) + \dots + \xi_N^{(r)}(\gamma)$ .

Обозначим  $\varphi_{\gamma,r}(t)$  характеристическую функцию случайной величины  $\xi_1^{(r)}(\gamma)$  и представим вероятность  $\mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)}(\gamma) = n\}$  по формуле обращения

$$\mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)}(\gamma) = n\} = \frac{1}{2\pi N^{1/\tau}} \times \quad (44)$$

$$\int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} \exp\left\{-\frac{itn}{N^{1/\tau}}\right\} \left(\varphi_{\gamma,r}\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)\right)^N dt.$$

Рассматривая выражение

$$|\varphi_{\gamma,r}(t)|^N = \left| \frac{R(it + 1/(\mathcal{M}))^N}{R(1/\mathcal{M})} \right|^N$$

и используя (41), нетрудно получить, аналогично (17) – (24), что при любом фиксированном  $t$

$$|\varphi_{\gamma,r}(t)|^N \leq C_3 |\varphi_r(t)|^N \quad (45)$$

и, кроме того,

$$\varphi_r(t) = \varphi(t) + o(N^{-1}). \quad (46)$$

При доказательстве леммы 2 мы видели, что если  $|t| < \varepsilon$ , то выполняется неравенство (25), а если  $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$ , то (26). Используя эти оценки и разбивая интеграл, стоящий в правой части равенства (43), на сумму двух интегралов, соответствующих указанным областям изменения переменной  $t$ , получим из (45), (46), что

$$\mathbb{P}\{\zeta_N^{(r)}(\gamma) = n\} \leq C_4 N^{1/\tau}.$$

Отсюда и из (5), (42), (43) приходим к соотношению

$$P_1(n) \leq C_5 N^{-1} e^{-1/\gamma} = o(N n^{-(\tau+1)}). \quad (47)$$

Оценим  $P_2(n)$ . Обозначим

$\xi_1^{(r)}(\mathcal{M}), \dots, \xi_N^{(r)}(\mathcal{M})$  вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbb{P}\{\xi_1^{(r)}(\mathcal{M}) = k\} = \mathbb{P}\{\xi_1^{(r)} = k \mid \xi_1^{(r)} \leq \mathcal{M}\}.$$

Обозначим также

$$\zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) = \xi_1^{(r)}(\mathcal{M}) + \dots + \xi_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}).$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-1}^{(r)} = k, \quad \xi_i^{(r)} \leq \mathcal{M}, \quad i = 1, \dots, N-1\} =$$

$$\mathbb{P}^{N-1}\{\xi_i^{(r)} \leq \mathcal{M}\} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) = k\}.$$

Отсюда и из (41) следует, что в условиях леммы

$$P_2(n) = (1 + o(1)) \times$$

$$\sum_{n-r \leq k \leq n-\gamma n} \mathbb{P}\{\xi_N^{(r)} = n-k\} \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) = k\}. \quad (48)$$

Обозначим функцию распределения случайной величины  $\xi_1$  через  $F(x)$ . Из (1) следует, что при  $x \rightarrow \infty$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - x^{-\tau} + o(x^{-\tau}), & x > 0. \end{cases} \quad (49)$$

Согласно теореме 2.6.1 книги [Ибрагимов, Линник, 1965] условия (49) достаточно для того, чтобы  $F(x)$  принадлежала области притяжения устойчивого закона с показателем  $\tau$ , а в силу теоремы 2.1.1 этой же книги получаем, что такой закон является предельным для случайной величины  $\zeta_{N-1} / N^{1/\tau}$ . Используя теорему 2.2.2 [Ибрагимов, Линник, 1965], нетрудно найти, что

$$\ln \varphi(t) = -\Gamma(1-\tau) |t|^\tau \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \right) \cos \frac{\pi\tau}{2},$$

откуда

$$\left( \varphi\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right) \right)^{N-1} \rightarrow \quad (50)$$

$$\exp\left\{-\Gamma(1-\tau) |t|^\tau \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \right) \cos \frac{\pi\tau}{2}\right\}.$$

Учитывая (41), получаем оценку, аналогичную (30):

$$\mathbb{P}\{\zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \leq C_6\gamma^\tau. \quad (51)$$

Если  $k \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}$ , то, учитывая (34) и следуя доказательству соотношения (35), получаем, что

$$S_1 = \mathfrak{n}^{-(\tau+1)} \mathbb{P}\{n-r \leq \zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} \times (1+o(1)). \quad (52)$$

Для вычисления вероятности  $\mathbb{P}\{n-r \leq \zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) \leq \gamma^{-1}N^{1/\tau}\}$  введем  $\varphi_{\mathcal{M},r}(t)$  – характеристическую функцию случайной величины  $\xi_1^{(r)}(\mathcal{M})$ :

$$\varphi_{\mathcal{M},r}(t) = \sum_{k \leq \mathcal{M}} e^{ikt} \mathbb{P}\{\xi_1^{(r)}(\mathcal{M}) = k\} = (1 - \mathbb{P}\{\xi_1^{(r)} > \mathcal{M}\})^{-1} \left( \varphi_r(t) - \sum_{k > \mathcal{M}} e^{ikt} \mathbb{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \right).$$

Используя (41) и (46), получаем в итоге, что

$$|\varphi_{\mathcal{M},r}(t)|^{N-1} = |\varphi(t)|^{N-1} (1+o(1)).$$

Отсюда и из (5), (50), (51) следует, что при любом фиксированном  $y$

$$\mathbb{P}\{N^{-1/\tau} \zeta_{N-1}^{(r)} \leq y\} \rightarrow \int_{-\infty}^y g(x) dx. \quad (53)$$

Учитывая (50) и равенство  $r = n - zN^{1/\tau}$ , из (52) и (53) находим, что

$$S_1 = (1+o(1)) \mathfrak{n}^{-(\tau+1)} \int_z^\infty g(x) dx. \quad (54)$$

Если  $k \in K_2$ , то, используя (51), получаем, что

$$S_2 \leq C_7(\gamma^\tau n) \mathbb{P}\{\zeta_{N-1}^{(r)}(\mathcal{M}) > \gamma^{-1}N^{1/\tau}\} = o(n^{-(\tau+1)}). \quad (55)$$

Если  $k \in K_3$ , то, как и в лемме 2, видим, что  $S_3 = o(n^{-(\tau+1)})$ , поэтому из (34), (48), (54), (55) следует, что

$$P_2(n) = (1+o(1)) \mathfrak{n}^{-(\tau+1)} \int_z^\infty g(x) dx. \quad (56)$$

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

##### Павлов Юрий Леонидович

зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 763370

##### Дертишников Екатерина Николаевна

аспирант  
Институт социально-экономического развития территорий ул. Комсомольская, 23, Вологда, Россия, 160014  
эл. почта: Katya-dert@mail.ru  
тел.: 89217021153

Оценка  $P_3(n)$  проводится аналогично соответствующему доказательству в лемме 2, поэтому из (40), (47) и (56) получаем утверждение леммы 3.

Теперь мы можем доказать теорему. Из (9) следует, что  $P_r \leq C_7 r^{-\tau} = o(N^{-1})$ , поэтому из лемм 1 – 3 очевидным образом получаем требуемое.

#### Литература

- Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
- Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004. 256 с.
- Павлов Ю. Л. Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 22–34.
- Павлов Ю. Л. О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.
- Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
- Ткачук С. Г. Локальные предельные теоремы, учитывающие большие отклонения в случае предельных устойчивых законов // Известия АН Узб. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1973. Т. 2. С. 30–33.
- Durrett R. Random Graph Dynamics. N.Y.: Cambridge University Press, 2007. 221 p.
- Flajolet P., Sedgewick R. Analytic Combinatorics. Cambridge: Cambridge University Press. 2009. 824 p.
- Janson S., Luczak T., Rucinski A. Random Graphs. Wiley, New York, 2000. 333 с.
- Pavlov Yu. L. Random Forests. Utrecht: VPS, 2000. 122 p.
- Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 1. P. 3–23.

##### Pavlov, Yury

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia  
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 763370

##### Dertishnikova, Ekaterina

Institute for Socioeconomic Development  
23 Komsomolskaya St., 160014 Vologda, Russia  
e-mail: Katya-dert@mail.ru  
tel.: 89217021