Труды Карельского научного центра РАН
№ 3. 2010. С. 66–71

УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИКЕ СТАТИСТИКИ ТИПА χ^2 ДЛЯ ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

Ю. Л. Павлов, И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматриваются Интернет-графы, состоящие из N вершин при условии, что сумма степеней вершин равна n. Получено предельное распределение статистики типа χ^2 для таких графов в случае, когда $N, n \to \infty$, $1 < C \le n/N < \varsigma(\tau)$, $\tau > 0$, где $\varsigma(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ.

К л ю ч е в ы е с л о в а : случайные графы, Интернет, статистика типа χ^2, предельное распределение.

Yu. L. Pavlov, I. A. Cheplyukova. ON ASYMPTOTICS OF χ^2 - TYPE STATISTICS IN CONDITIONAL RANDOM INTERNET GRAPHS

We consider random Internet graphs consisting of N vertices under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n. We get the limit distribution of χ^2 type statistic for these graphs such that $N, n \to \infty$, $1 < C \le n/N < \varsigma(\tau)$, $\tau > 0$, where $\varsigma(\tau)$ is the Rimann's zeta-function.

K e y w o r d s : random graphs, Internet, χ^2 type statistic, limit distribution.

Для связанной с критерием согласия χ^2 полиномиальной схемы хорошо известно асимптотическое поведение соответствующей статистики. Однако во многих комбинаторных задачах, отличающихся от полиномиальной схемы, при проверке статистических гипотез также возникает необходимость получения подобных результатов. В настоящей работе рассматривается одна из таких задач. Объектом исследования является известная конструкция случайного графа (см., например, [Faloutsos et al., 1999; Jason et al., 2000; Newman et al., 2001; Reittu, Norros, 2004]), являющаяся подходящей моделью сети Интернет. В связи с этим такие модели иногда называют Интернет-графами. Опишем этот граф. Предполагается, что граф состоит из N основных и одной вспомогательной вершин. Степени основных вершин, занумерованных числами от

1 до N, задаются независимыми случайными величинами $\eta_1,\ldots,\eta_N$, распределение которых имеет вид

$$\mathbf{P}\{\eta_i \ge k\} = k^{-\tau_i}, \quad i=1,\ldots,N, \quad k=1,2,\ldots, \tag{1}$$

где τ_i – некоторые положительные параметры.

Для описания структуры графа будем использовать понятие полуребра [Reittu, Norros, 2004], т. е. ребра, инцидентного конкретной вершине, но для которой смежная вершина еще не определена. Чтобы суммарное число полуребер было четным, степень вспомогательной вершины полагается равной 1 или 0, в зависимости от того, является ли число полуребер основных вершин четным или нет. Предполагается, что все полуребра различны и при образовании ребер полуребра соединяются равновероятно.

Во многих работах изучалось предельное поведение различных характеристик Интернет-графов. В работе [Faloutsos et al., 1999] было показано, что на практике, как правило, параметры распределения $\tau_1,\ldots,\tau_N$ одинаковы и принадлежат интервалу (1,2). В работах [Cheplyukova, Pavlov, 2007; Павлов, Чеплюкова, 2008] впервые было предложено использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам с целью исследования асимптотического поведения Интернет-графов. Эта схема была введена и изучена В. Ф. Колчиным (см., например, [Колчин, 2004]).

В настоящей работе мы рассматриваем подмножество Интернет-графов при условии, что сумма степеней основных вершин задана и равна n, т. е.

$$\eta_1+\ldots+\eta_N=n.$$

В качестве нулевой статистической гипотезы будем рассматривать гипотезу о том, что параметры распределения (1)

$$\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_N=\tau.$$

Для проверки этой гипотезы кажется естественным использовать статистику типа χ^2 следующего вида

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(\eta_i-n/N)^2}{n/N}. \tag{2}$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_N$, распределение которых имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{\lambda^k}{1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)}\left(\frac{1}{k^\tau}-\frac{1}{(k+1)^\tau}\right), \tag{3}$$

где $k=1,2,\ldots$; $\Phi(x,s,a)$ означает трансцендентную функцию Лерча:

$$\Phi(x,s,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+a)^s}, \qquad a>0, \tag{4}$$

а параметр распределения λ выбран из интервала (0,1) так, что выполнено равенство

$$\frac{\Phi(\lambda,\tau,1)-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-1,1)}{1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)}=\frac{n}{N}. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (5) имеет единственное решение на интервале (0,1).

Пусть

$$\nu_i=\xi_i(\xi_i-1)/2, \qquad i=1,\ldots,N;$$

$$a=\mathbf{E}\nu_1,\ \sigma^2=\mathbf{D}\nu_1,$$

$$\rho=\mathrm{cov}(\nu_1,\xi_1)\Big/\sqrt{\mathbf{D}\nu_1\mathbf{D}\xi_1}.$$

Ниже приведена локальная предельная теорема для статистики (2) в случае $N,n\to\infty$ так, что $1<C_1\le n/N<\varsigma(\tau)$, где $\varsigma(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ. Заметим, что слабая сходимость распределения статистики (2) к нормальному закону следует из результатов работы [Ронжин, 1988]. Содержание данной статьи докладывалось на следующих конференциях: Barcelona Conference on Asymptotic Statistics (2008) [Cheplyukova, Pavlov, 2008], X Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (2009) [Чеплюкова, 2009], 9th Internetional Conference «Computer Data Analysis and Modeling: Complex Stochastic Data and Systems» (2010), формулировки утверждений приведены в трудах этих конференций. В настоящей работе эти результаты обобщаются в виде приведенной ниже теоремы и дается ее подробное доказательство.

Далее будем считать, что при $n/N\to\varsigma(\tau)$ выполнено одно из условий:

1) $\tau>6$;
2) $\tau=6$; $\sqrt{N}\big/\left|\ln(1-\lambda)\right|\to\infty$;
3) $4<\tau<6$; $\sqrt{N}(1-\lambda)^{6-\tau}\to\infty$;
4) $\tau=4$; $\sqrt{N}(1-\lambda)^2\left|\ln^3(1-\lambda)\right|\to\infty$;
5) $0<\tau<4$; $N(1-\lambda)^\tau\to\infty$.

Теорема. *Пусть* $N,n\to\infty$ *так, что* $1<C\le n/N<\varsigma(\tau)$. *Тогда равномерно относительно целых* k *таких, что*

$(k-Na)\Big/\left(\sigma\sqrt{N\left(1-\rho^2\right)}\right)$ *лежит в любом конечном фиксированном интервале, справедливо*

$$\mathbf{P}\left\{\chi^2=\frac{2Nk}{n}+N-n\right\}=$$
$$\frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N\left(1-\rho^2\right)}}\ \exp\left\{-\frac{(k\text{-}Na)^2}{2N\sigma^2\left(1-\rho^2\right)}\right\}.$$

Эта теорема будет доказана с помощью приведенных ниже лемм $1-3$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\left\{\chi^2=\frac{2Nk}{n}+N-n\right\}=\frac{\mathbf{P}\{\varsigma_N=n,\mu_N=k\}}{\mathbf{P}\{\varsigma_N=n\}},\quad(6)$$

где

$$\varsigma_N=\xi_1+\ldots+\xi_N,\ \mu_N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\xi_i(\xi_i-1).$$

Доказательство. Учитывая равенство $\eta_1+\ldots+\eta_N=n,$ из (2) легко получить, что

$$\mathbf{P}\left\{\chi^2=\frac{2Nk}{n}+N-n\right\}=$$
$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\eta_i(\eta_i-1)=k\right\}.\quad(7)$$

Из (1), (3) и (4) несложно показать, что для рассматриваемого множества условных графов справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1=k_1,\ldots,\eta_N=k_N\}=$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1=k_1,\ldots,\xi_N=k_N|\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}.\quad(8)$$

Это равенство означает, что выполнены условия обобщенной схемы размещения ([Колчин, 2004]). Из (7) и (8) нетрудно получить утверждение леммы 1.

Легко видеть, что суммы случайных величин, стоящие в правой чисти равенства (6), образуют схему серий, поэтому задача получения предельного распределения статистики (2) сводится к доказательству локальных предельных теорем для случайной величины ς_N и случайного вектора $(\varsigma_N,\ \mu_N)$.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{\mathrm{X}}_i=(\xi_i,\nu_i),\qquad i=1,\ldots,N,$$
$$S_N=\left(\overline{\mathrm{X}}_1+\ldots+\overline{\mathrm{X}}_N\right)=(\varsigma_N,\ \mu_N),$$
$$A_N=\mathbf{E}S_N,\quad \sigma_1^2=\mathbf{D}\xi_1,$$
$$Q_N=\begin{pmatrix}1/\left(\sigma_1\sqrt{N}\right) & 0\\ 0 & 1/\left(\sigma\sqrt{N}\right)\end{pmatrix},$$
$$\Sigma=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1 & -\rho\\ -\rho & 1\end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда последовательность распределений* $(S_N-A_N)Q_N$ *слабо сходится к двумерному нормальному закону с плотностью*

$$g(\overline{x})=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\overline{x}\Sigma\overline{x}^T\right\},\quad(9)$$

где $\overline{x}=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$.

Доказательство. Для справедливости утверждения леммы достаточно показать, что в каждой точке (t_1,t_2) выполнено равенство

$$\varphi(t_1,t_2)=$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(t_1^2+t_2^2+2\rho t_1t_2\right)\right\}(1+o(1)),\quad(10)$$

где $\varphi(t_1,t_2)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $(S_N-A_N)Q_N$. Обозначим через $f(t_1,t_2)$ характеристическую функцию случайного вектора $(\xi_1-\mathbf{E}\xi_1,\nu_1-\mathbf{E}\nu_1)$. Используя формулу Тейлора, получаем, что при достаточно малых t_1 и t_2

$$f(t_1,t_2)=1-(t_1\sigma_1)^2/2-(t_2\sigma)^2/2-$$
$$t_1t_2\operatorname{cov}(\xi_1,\nu_1)+r(t_1,t_2),\quad(11)$$

где

$$|r(t_1,t_2)|\le C_1\left(|t_1|^3\left(\mathbf{E}\xi_1^{\ 3}+\mathbf{E}^3\xi_1\right)+\right.$$
$$\left.|t_2|^3\left(\mathbf{E}\nu_1^{\ 3}+\mathbf{E}^3\nu_1\right)\right),$$

здесь и далее $C_1,C_2,\ldots$ означают некоторые положительные постоянные.

Из (3) несложно найти, что

$$\mathbf{E}\xi_1=\frac{\Phi(\lambda,\tau,1)-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-1,1)}{1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)};$$
$$\mathbf{E}\nu_1=((3-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-1,1)-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-2,1)-$$
$$2\Phi(\lambda,\tau,1))(2(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)))^{-1};$$
$$\sigma_1^2=(2\Phi(\lambda,\tau-1,1)-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-2,1)-$$
$$\Phi(\lambda,\tau,1))(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1))^{-1}-\mathbf{E}^2\xi_1;$$
$$\sigma^2=((1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-4,1)/2+$$
$$(3-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-3,1)-\frac{1}{2}(13-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-2,1)+\quad(12)$$
$$6\Phi(\lambda,\tau-1,1)-2\Phi(\lambda,\tau,1))\times$$
$$(2(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)))^{-1}-\mathbf{E}^2\nu_1;$$
$$\mathbf{E}\xi_1^3=((\lambda-1)\Phi(\lambda,\tau-3,1)+$$
$$3(\Phi(\lambda,\tau-2,1)-\Phi(\lambda,\tau-1,1))+\Phi(\lambda,\tau,1))\times$$
$$(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1))^{-1};$$

$$\mathbf{E}\nu_1^3 = ((\lambda-1)\Phi(\lambda,\tau-6,1)+ (9-3\lambda)\Phi(\lambda,\tau-5,1)+(3\lambda-33)\Phi(\lambda,\tau-4,1)+ (63-\lambda)\Phi(\lambda,\tau-3,1)-66\Phi(\lambda,\tau-2,1)+ 36\Phi(\lambda,\tau-1,1)-8\Phi(\lambda,\tau,1))\times (8(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)))^{-1}.$$

Используя (3) и (5), легко показать, что $\sigma_1 \ge C_2$, $\sigma \ge C_3$. Поэтому из соотношения $\varphi(t_1,t_2) = f^N\left(t_1/(\sigma_1\sqrt{N}), t_2/(\sigma\sqrt{N})\right)$

находим, что

$$\ln\varphi(t_1,t_2) = N\ln\left(1-\frac{t_1^2}{2N}-\frac{\rho t_1 t_2}{N}-\frac{t_2^2}{2N}+ r\left(\frac{t_1}{\sigma_1\sqrt{N}},\frac{t_2}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right), \tag{13}$$

где, как следует из (11),

$$\left|r\left(\frac{t_1}{\sigma_1\sqrt{N}},\frac{t_2}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right| \le C_4\left(|t_1|^3 E + |t_2|^3 F\right),$$

$$E = \frac{\mathbf{E}\xi_1^3 + \mathbf{E}^3\xi_1}{\left(\sigma_1\sqrt{N}\right)^3};\quad F = \frac{\mathbf{E}\nu_1^3 + \mathbf{E}^3\nu_1}{\left(\sigma\sqrt{N}\right)^3}. \tag{14}$$

В лемме 3 [Павлов, Чеплюкова, 2008] показано, что в случае $0 < C \le n/N \le C_5 < \varsigma(\tau)$ справедливы неравенства $C_6 \le \lambda \le C_7 < 1$, поэтому из соотношений (12) следует, что $E, F = O\left(N^{-3/2}\right)$, значит $r = o\left(N^{-1}\right)$. Отсюда и из (13) видно, что в этом случае имеет место равенство (10).

Из леммы 3 [Павлов, Чеплюкова, 2008] следует, что $\lambda \to 1$ при $n/N \to \varsigma(\tau)$. При $s<1$ для функции Лерча $\Phi(z,s,1)$ справедливы соотношения (см., например, [Flajolet, Sedgewick, 2009]): $\Phi(z,1,1) = -z^{-1}\ln(1-z)$; $\Phi(z,0,1) = (1-z)^{-1}$;

при $s<1, z\to 1$

$$\Phi(z,s,1) = \Gamma(1-s)(-\ln z)^{s-1}(1+o(1)), \tag{15}$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x. Тогда, используя (12) и (15), несложно показать, что

$$\mathbf{E}\nu_1 = \begin{cases} O(1) & \tau > 2; \\ O(|\ln(1-\lambda)|) & \tau = 2; \\ O\left((1-\lambda)^{\tau-2}\right) & 0<\tau<2. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}\nu_1^3 = \begin{cases} O(1), & \tau > 6; \\ O(|\ln(1-\lambda)|), & \tau = 6; \\ O\left((1-\lambda)^{\tau-6}\right), & 0<\tau<6. \end{cases} \tag{16}$$

$$\sigma^2 \asymp \begin{cases} 1, & \tau > 2; \\ |\ln(1-\lambda)|, & \tau = 2; \\ (1-\lambda)^{\tau-4}, & 0<\tau<2, \end{cases}$$

где запись $f \asymp g$ означает, как и в [Грэхем и др., 2006], что выполнены одновременно два неравенства $|f| \le C_8|g|$ и $|g| \le C_9|f|$. Тогда из (14) и (16) получаем, что

$$F = \begin{cases} O\left(N^{-3/2}\right), & \tau > 6; \\ O\left(N^{-3/2}\ln(1-\lambda)\right), & \tau = 6; \\ O\left(N^{-3/2}(1-\lambda)^{\tau-6}\right), & 4<\tau<6; \\ O\left(\dfrac{(1-\lambda)^{-2}}{\left(\ln(1-\lambda)\sqrt{N}\right)^3}\right), & \tau = 4; \\ O\left(N^{-3/2}(1-\lambda)^{-\tau/2}\right), & 0<\tau<4. \end{cases} \tag{17}$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что

$$E = \begin{cases} O\left(N^{-3/2}\right), & \tau > 3; \\ O\left(N^{-3/2}\ln(1-\lambda)\right), & \tau = 3; \\ O\left(N^{-3/2}(1-\lambda)^{\tau-3}\right), & 2<\tau<3; \\ O\left(\dfrac{(1-\lambda)^{-1}}{\left(N\ln(1-\lambda)\right)^{3/2}}\right), & \tau = 2; \\ O\left(N^{-3/2}(1-\lambda)^{-\tau/2}\right), & 0<\tau<2. \end{cases} \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что $r = o\left(N^{-1}\right)$ и в случае $n/N \to \varsigma(\tau)$, поэтому из (13) опять получаем соотношение (10), что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2 показывает, что распределение статистики (2) слабо сходится к нормальному закону. Докажем, что имеет место локальная сходимость.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда равномерно по* $\bar{z} = (z_1, z_2)$

$$\mathbf{P}\{S_N = \bar{z}\} = \det Q_N\left[g\left((\bar{z}-A_N)Q_N\right)+o(1)\right],$$

где $g(\bar{x})$ *определено в (9).*

Доказательство. Пусть $\langle\alpha\rangle$ обозначает расстояние от $\alpha \in \mathbf{R}$ до ближайшего целого числа,

$$\Omega(1/2,1/4) = \left\{\bar{d} = (d_1,d_2) \in \mathbf{R}^2 : |d_1|,|d_2| \le 1/2, |\bar{d}| > 1/4\right\}$$

Для двумерной случайной величины $\overline{X}$ и вектора $\overline{d}$ обозначим

$$\mathrm{H}\left(\overline{X},\overline{d}\right)=\mathbf{E}\left\langle\left(\overline{X}^{*},\overline{d}\right)\right\rangle^{2},$$

где $\left(\overline{X}^{*},\overline{d}\right)$ – скалярное произведение векторов $\overline{X}^{*}$ и $\overline{d}$, случайная величина $\overline{X}^{*}$ получена из $\overline{X}$ путем симметризации. Пусть также

$$\mathrm{H}_N\left(\overline{d}\right)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{H}\left(\overline{X}_i,\overline{d}\right)=N\mathbf{E}\left\langle\left(\overline{X}^{*},\overline{d}\right)\right\rangle^{2}, \qquad (19)$$

$$\mathrm{H}_N=\inf_{d\in\Omega(1/2,1/4)}\mathrm{H}_N\left(\overline{d}\right).$$

Поскольку $\overline{X}^{*}=(\xi_1-\xi_2,\nu_1-\nu_2)$, нетрудно показать, что

$$\mathrm{H}_N\left(\overline{d}\right)=N\sum_{k,l}\left\langle(k-l)d_1+\frac{(k-l)(k+l-1)}{2}d_2\right\rangle^{2}\times$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}\mathbf{P}\{\xi_2=l\}.$$

Из (16) видно, что

$$\left|Q_N^{-1}\overline{d}\right|^{2}=\sigma_1^2Nd_1^2+\sigma^2Nd_2^2 \asymp$$

$$\begin{cases} N,\ \text{если}\ 0<C\le n/N\le C_5<\varsigma(\tau) \\ \quad \text{или}\ n/N\to\varsigma(\tau),\tau>4; \\ N\left|\ln(1-\lambda)\right|,\ \text{если}\ n/N\to\varsigma(\tau),\tau=4; \\ N(1-\lambda)^{\tau-4},\ \text{если}\ n/N\to\varsigma(\tau),0<\tau<4, \end{cases} \qquad (20)$$

а для всех $\overline{d}\in\Omega(1/2,1/4)$ справедливо

$$\mathrm{H}_N\left(\overline{d}\right)\ge C_{10}N\left(\langle(d_1+d_2)\rangle^2+\langle(2d_1+3d_2)\rangle^2\right). \qquad (21)$$

Отсюда, из (20) и леммы 2 следует, что в случаях, когда $0<C\le n/N\le C_5<\varsigma(\tau)$ и $n/N\to\varsigma(\tau),\tau>4$, выполнено условие 1 локальной предельной теоремы [Мухин, 1991] для двумерных случайных сумм в схеме серий, а именно, существует такое $\alpha>0$, что

$$\mathrm{H}_N\left(\overline{d}\right)\ge\alpha\left|Q_N^{-1}d\right|^{2},$$

поэтому в этих случаях утверждение леммы 3 справедливо.

Пусть $n/N\to\varsigma(\tau),\tau>4$. Проверим выполнение условия 2 указанной теоремы [Мухин, 1991]. Для этого достаточно показать, что $\mathrm{H}_N\to\infty$ и существуют такие $\alpha>0,\delta\in(0,2],M>0,\beta>0,\nu\in(0,1/2)$, что

$$\mathrm{B}_N^2\left(\overline{\theta},u\right)\ge\alpha u^{2-\delta}\left|Q_N^{-1}\overline{\theta}\right|^{\delta}, \qquad (22)$$

где

$$\mathrm{B}_N^2\left(\overline{\theta},u\right)=N\sum_{\left|\left(\overline{\theta},\overline{X}_1\right)\right|\le u}\left(\overline{\theta},\overline{X}_1\right)\mathrm{P}^{*},$$

а P^{*} – симметризованное распределение $\overline{X}^{*}$,

$$\overline{\theta}=(\theta_1,\theta_2),\ \left|\overline{\theta}\right|=1,\ u\in\left[M\mathrm{H}_N^{\nu},\beta\left|Q_N^{-1}\overline{\theta}\right|\right].$$

Нетрудно найти, что при $\nu>0$ справедливо соотношение

$$\mathrm{B}_N^2\left(\overline{\theta},u\right)= \qquad (23)$$

$$N\sum_{\substack{k,l:\\ \left|\left(\overline{\theta},\overline{X}_1\right)\right|\le u}}\left(\theta_1(k-l)+\theta_2\left(\frac{k(k-1)}{2}-\frac{l(l-1)}{2}\right)\right)^{2}\times$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}\mathbf{P}\{\xi_2=l\}\ge$$

$$N\sum_{\substack{k:\\ \left|\left(\overline{\theta},\overline{X}_1\right)\right|\le u}}\left(\theta_1(k-1)+\theta_2\frac{k(k-1)}{2}\right)^{2}\times$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}\mathbf{P}\{\xi_2=1\}\ge C_{12}N\sum_{\frac{1}{2}u\le k\le u}k^{3-\tau}\ge C_{12}Nu^{4-\tau}.$$

Из (19) – (23) следует, что достаточно показать существование ν и δ, обеспечивающих выполнение неравенства

$$N^{1-\frac{\delta}{2}}u^{2-\tau+\delta}(1-\lambda)^{(4-\tau)\frac{\delta}{2}}\ge C_{13}. \qquad (24)$$

В силу условия леммы $N(1-\lambda)^{\tau}\to\infty$, поэтому при достаточно малых ν и δ неравенство (24) выполнено и, следовательно, утверждение леммы 3 справедливо при $0<\tau<4$. Осталось рассмотреть случай $\tau=4$. Аналогично предыдущему получаем, что

$$\mathrm{B}_N^2\left(\overline{\theta},u\right)\ge C_{14}N\ln u,$$

и, как нетрудно проверить, (22) справедливо и при $\tau=4$, что завершает доказательство леммы 3.

Из результатов работ [Павлов, Чеплюкова, 2008] и [Павлов, 2009] следует, что в рассматриваемых условиях

$$\mathbf{P}\{\varsigma_N=n\}=\left(\sigma_1\sqrt{2\pi N}\right)^{-1}(1+o(1)).$$

поэтому из лемм 1 и 3 получаем утверждение теоремы.

Литература

Грэхем Р., Кнут В., Паташник О. Конкретная математика / пер. с англ. М.: Мир, 2006. 703 с.

Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004. 256 с.

Мухин А. Б. Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных вершин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, № 4. С. 660 – 674.

Павлов Ю. Л. О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.

Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.

Ронжин А. Ф. Критерии согласия для обобщенных схем размещения частиц по ячейкам, основанные на разделимых статистиках // Теория вероятностей и ее применения. 1988. Т. 33, № 1. С. 94–104.

Чеплюкова И. А. Об асимптотике статистики типа χ^2 для условных случайных Интернет-графах // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, № 4. С. 272.

Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L. Limit distributions of vertex degree in conditional power-law random graphs / Transactios of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Karmiel, October 22–26 2007). Karmiel, 2007. P. 52–59.

Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L. On asymptotics of a χ^2 - type statistics in conditional random Internet graphs / Barselona Conference on Asymptotic Statistics (Bellatera // September 1–5 2008). Bellatera, 2008. P. 96.

Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the Internet topology // Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–252.

Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Prees. Cambridge, 2009. 826 p.

Jason S., Luzak T., Rucinski A. Random grahps. Wiley, New York, 2000. 333 p.

Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Wats D. J. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, paper 026118.

Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 1. P. 3–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и копмьютерной статистики, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370