Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2011. С. 4–9

УДК 519.2

О ЧИСЛЕ ДЕРЕВЬЕВ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА В СЛУЧАЙНОМ НЕПОМЕЧЕННОМ НЕКОРНЕВОМ ЛЕСЕ

Е. С. Берникович

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Рассматривается множество $F_{N,n}$ всех случайных лесов, состоящих из N упорядоченных некорневых деревьев и n незанумерованных вершин, на котором задано равномерное распределение вероятностей. Для таких лесов доказаны предельные теоремы о числе деревьев заданного объема при $N, n \to \infty$ так, что $1 < n/N \leqslant L = 2.0512772...$

Ключевые слова: случайные леса, число деревьев заданного объема, обобщенная схема размещения, предельные теоремы.

E. S. Bernikovich. ON THE NUMBER OF TREES OF A GIVEN SIZE IN A RANDOM UNLABELLED UNROOTED FOREST

We consider the set $F_{N,n}$ of all random forests consisting of N ordered unrooted trees and n unlabelled vertices with uniform probability distribution on this set. We prove limit theorems for the number of trees of a given size in such forest as $N, n \to \infty$ so that $1 < n/N \leqslant L = 2.0512772...$

Key words: random forests, number of trees of a given size, generalized allocation scheme, limit theorems.

Введение

Нахождение предельных распределений таких важных характеристик как максимальный объем дерева и число деревьев заданного объема является традиционным направлением исследований различных типов случайных лесов (см. [Pavlov, 2000; Павлов, Лосева, 2002; Хворостянская, 2002; Колчин, 2004]). Для изучавшихся ранее типов случайных лесов было показано, что такие распределения близки и часто отличаются друг от друга только значениями параметров. Основными методами получения результатов были методы теории ветвящихся процессов (в тех случаях, когда лес генерируется процессом Гальтона-Ватсона ([Pavlov, 2000]) и обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и подробно изученная В. Ф. Колчиным (см., например, [Колчин, 2004]). В настоящей статье доказываются предельные теоремы, описывающие распределение числовой характеристики μ_r, равной числу деревьев, содержащих r вершин, в случае, когда N, $n \to \infty$ так, что $1 < n/N \leqslant L = 2.0512772...$, для непомеченных некорневых лесов. Заметим, что для таких лесов в работе [Берникович, Павлов, 2011] получено полное описание предельного поведения другой характеристики – максимального объема дерева, где под объемом понимается число вершин, содержащихся в этом дереве.

Основные результаты

Обозначим $F_{N,n}$ – множество случайных непомеченных лесов, состоящих из N некорневых деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, с общим числом вершин n. Зададим на этом объекте равномерное распределение вероятностей.

Пусть независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ имеют распределение следующего вида:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = t_k \lambda^k t^{-1}(\lambda), \tag{1}$$
$$k = 1, 2, ..., \quad 0 < \lambda \leqslant R,$$

где t_k – число непомеченных некорневых деревьев, содержащих k вершин. Рассмотрим производящую функцию

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x^k. \tag{2}$$

Свойства функции (2) изучены в [Харари, Палмер, 1977]. Показано, что начало этой суммы вглядит следующим образом:

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + ...,$$

и радиус сходимости ряда $R = 0.3383219...$ Кроме того, функцию $t(x)$ можно представить в виде

$$t(x) = a_0 - a_1(R - x) + a_2(R - x)^{3/2} + ..., \tag{3}$$

где $a_0 = t(R) = 0.5628769..., a_1 = t'(R) = 3.4127749..., a_2 = 6.4243753....$ При $k \to \infty$

$$t_k = \alpha \left(R^k k^{5/2}\right)^{-1} + O\left(\left(R^k k^{7/2}\right)^{-1}\right), \tag{4}$$

где $\alpha = (3a_2/4\sqrt{\pi})\, R^{3/2} = 0.5349485...$

В работе [Берникович, Павлов, 2011] показано, что справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, ..., \eta_N = k_N\} =$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, ..., \xi_N = k_N | \xi_1 + ... + \xi_N = n\}, \tag{5}$$

где $\eta_1, ..., \eta_N$ – случайные величины, равные объемам деревьев леса из $F_{N,n}$. Это равенство означает, что для рассматриваемых случайных лесов выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам (см., например, [Колчин, 2004]).

Пусть

$$L = a_1 R / a_0 = 2,0512772... \tag{6}$$

Следуя [Берникович, Павлов, 2011], в качестве λ берем решение уравнения

$$\lambda t'(\lambda)/t(\lambda) = n/N. \tag{7}$$

Обозначим $m = \mathbf{E}\,\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\,\xi_1$. Из (1), (2) и (7) получаем, что

$$m = \frac{\lambda t'(\lambda)}{t(\lambda)} = \frac{n}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\lambda^2 t''(\lambda)}{t(\lambda)} + m - m^2. \tag{8}$$

Положим

$$\sigma_{rr}^2 = p_r \left(1 - p_r - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r\right). \tag{9}$$

Справедливы следующие утверждения о предельном поведении числа вершин заданного объема μ_r.

Теорема 1. *Пусть $N, n \to \infty, \quad n/N \to 1, n - N \to \infty$. Тогда для любого $r \geqslant 2$ равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале для целых неотрицательных k*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!}(Np_r)^k exp\{-Np_r\}(1 + o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < L$. Тогда равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале для целых неотрицательных k*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-{u_r}^2/2}(1 + o(1)).$$

Теорема 3. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to L, \quad N\,(L - n/N)^3 \to \infty$. Тогда для целых неотрицательных k:*
1. при фиксированном r равномерно относительно $u_r = (k - Np_r) / (\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-{u_r}^2/2}(1 + o(1));$$

2. при $r \to \infty$ равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!}(Np_r)^k exp\{-Np_r\}(1 + o(1)).$$

Ниже приводятся леммы 1–4, с помощью которых будут доказаны сформулированные теоремы.

Вспомогательные утверждения

Пусть r – натуральное число. Введем независимые вспомогательные случайные величины $\xi_i^{(r)}$, $i = 1, ..., N$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \neq r\}. \tag{10}$$

Положим

$$\zeta_N = \xi_1 + ... + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + ... + \xi_N^{(r)}.$$

Обозначим также $m_r = \mathbf{E}\,\xi_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\,\xi_1^{(r)}$. Из (1), (8) и (10) вытекают следующие соотношения:

$$m_r = \frac{m - rp_r}{1 - p_r},$$

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1-p_r)^2}\left(1 - p_r - p_r\frac{(m-r)^2}{\sigma^2}\right). \quad (11)$$

Пусть $\varphi(u), \varphi^{(r)}(u)$, $\varphi_S^{(r)}(u)$ – характеристические функции случайных величин ξ_1, $\xi_1^{(r)}$, $(\zeta_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ соответственно. Используя (1), (2) и (10), нетрудно получить, что

$$\varphi(u) = \frac{t(\lambda R^{iu})}{t(\lambda)}, \varphi^{(r)}(u) = \frac{\varphi(u) - p_r e^{iur}}{1 - p_r}. \quad (12)$$

В условиях обобщенной схемы размещения, как показано в [Колчин, 2004], удобно использовать следующую лемму, которая является следствием соотношения (5).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} =$$

$$\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p_r^k (1-p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 1 показывает, что для изучения предельного поведения μ_r достаточно изучить предельное поведение сумм независимых случайных величин ζ_N и $\zeta_N^{(r)}$ и биномиальных вероятностей $\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} p_r^k (1-p_r)^{N-k}$.

Из соотношений (1) – (4) и (6) – (8) нетрудно получить утверждения следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* $N, n \to \infty$.
1. Если $n/N \to 1$, *то*

$$\lambda = (n/N - 1)(1 + o(1)), \quad \sigma^2 = 2\lambda(1 + o(1)).$$

2. Если $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < L$, *то*

$$0 < C_1 \leqslant \lambda \leqslant C_2 < R, \quad \sigma^2 = 2\lambda(1 + o(1)).$$

3. Если $n/N \to L$, *то*

$$\lambda = R - \frac{4}{9a_2^2}\left(1 - \frac{n}{LN}\right)^2 (1 + o(1)),$$

$$\sigma^2 = (3a_2)/(4a_0)R^2(R-L)^{-1/2}(1 + o(1)).$$

При выполнении условий теорем 1–3 из (8) и (11) видим, что

$$\sigma_r = \sigma(1 + o(1)). \quad (13)$$

Леммы 3 и 4 будем доказывать для случая $r \to \infty$, поскольку для фиксированного r их утверждения следуют из результатов работ [Колчин, 2003; Павлов, 2005].

Лемма 3. *Пусть* $N, n \to \infty$ *так, что выполнено одно из условий:*
1. $n/N \to 1, \quad n - N \to \infty, \quad r \geqslant 2$;
2. $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < L$;
3. $n/N \to L, \quad N\,(L - n/N)^3 \to \infty$.

Тогда при $S = N(1-p_r)(1+o(1))$ *равномерно по* u *в любом конечном интервале*

$$\varphi_S^{(r)}(u) \to e^{-u^2/2}.$$

Доказательство. В дальнейшем нам потребуется явный вид третьей производной $(\ln\varphi^{(r)}(u))'''_u$. Для удобства обозначим $\rho(u) = \varphi(u) - p_r e^{iur}$. Из (12) получаем, что

$$(\ln\varphi^{(r)}(u))''' = (\varphi'''(u) + ir^3 p_r e^{iur})\rho^{-1}(u)$$
$$- 3(\varphi'(u) - irp_r e^{iur})(\varphi''(u) + r^2 p_r e^{iur})\rho^{-2}(u)$$
$$+ 2(\varphi'(u) - irp_r e^{iur})^3 \rho^{-3}(u). \quad (14)$$

Используя (1), (2), (4), (8), (11), (13) и лемму 2, можно убедиться в выполнении соотношения

$$\sigma_r\sqrt{S} \to \infty \quad (15)$$

при каждом из условий леммы 2.

Поскольку

$$\varphi_S^{(r)}(u) = exp\left\{-\frac{iSm_r u}{\sigma_r\sqrt{S}}\right\}\left(\varphi^{(r)}\left(\frac{u}{\sigma_r\sqrt{S}}\right)\right)^S,$$

справедливо равенство

$$\ln\varphi_S^{(r)}(u) = -\frac{iSm_r u}{\sigma_r\sqrt{S}} + S\ln\varphi^{(r)}\left(\frac{u}{\sigma_r\sqrt{S}}\right). \quad (16)$$

При достаточно малых u имеет место разложение

$$\ln\varphi^{(r)}(u) = u\left(\frac{\partial\ln\varphi^{(r)}(u)}{\partial u}\right)_{u=0}$$
$$+ \frac{u^2}{2}\left(\frac{\partial^2\ln\varphi^{(r)}(u)}{\partial u^2}\right)_{u=0} + \frac{u^3}{3!}Q(u)$$
$$= ium_r - \frac{u^2\sigma_r^2}{2} + \frac{u^3}{6}Q(u), \quad (17)$$

где

$$|Q(u)| \leqslant 2\max_{|\tau|\leqslant|u|}|\ln\varphi^{(r)}(\tau)'''_\tau|. \quad (18)$$

Отсюда и из (15) – (18) следует, что при выполнении условий леммы при любом фиксированном u справедливо соотношение

$$\ln \varphi_S^{(r)}(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6\sigma_r^3\sqrt{S}} Q\left(\frac{u}{\sigma_r\sqrt{S}}\right). \quad (19)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что второе слагаемое равенства (19) стремится к нулю.

Из (18) следует, что

$$\left|\frac{u^3}{6\sigma_r^3\sqrt{S}} Q\left(\frac{u}{\sigma_r\sqrt{S}}\right)\right| \leqslant \frac{|u|^3}{3} Q_1(u), \quad (20)$$

где

$$Q_1(u) = \max_{|\tau| \leqslant |u/(\sigma_r\sqrt{S})|} |\ln \varphi^{(r)}(\tau)'''_\tau| / (\sigma_r^3\sqrt{S}). \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < L$. Из (1), (2) и (12) следует, что производные $\varphi'(u), \varphi''(u), \varphi'''(u)$ ограничены, а $r^3 p_r \to 0$ при $r \to \infty$. Отсюда, из (11), (13) – (15) и (19) – (21) получаем, что

$$\ln \varphi_S^{(r)}(u) = (-u^2/2)(1 + o(1)). \quad (22)$$

Пусть теперь

$$n/N \to 1, \quad n - N \to \infty, \quad r \geqslant 2.$$

Из (1) и (11), применяя лемму 2, нетрудно вывести, что

$$\sigma_r^3\sqrt{S} = \sqrt{8}(n-N)^{3/2} N^{-1}(1 + o(1)). \quad (23)$$

Из (2) и (12) получаем выражения:

$$\varphi(u) = 1 + O(\lambda), \varphi'(u) = i + O(\lambda),$$
$$\varphi''(u) = -1 + O(\lambda), \varphi'''(u) = -i + O(\lambda).$$

Ясно, что при $r \geqslant 2$ из (1) следует, что $p_r \to 0$. Таким образом, из (14) получаем, что $\ln \varphi^{(r)}(u)'''_u = O(\lambda)$. Откуда, применяя (23), получаем соотношение

$$\ln \varphi^{(r)}(u)'''_u / (\sigma_r^3\sqrt{S}) = (n-N)^{-1/2}(1 + o(1)),$$

а значит из (19) – (21) следует (22).

Осталось рассмотреть случай

$$n/N \to L, \quad N\,(L - n/N)^3 \to \infty.$$

Аналогично (23), делаем вывод, что в этом случае

$$\sigma_r^3\sqrt{S} = (3a_2)/(4a_0)^{3/2} R^3 (R-L)^{-3/4}(1 + o(1)). \quad (24)$$

Из (1), (2) и (12) следует, что $\varphi'(u) \to \mathrm{const}, \varphi''(u) \to \infty, \varphi'''(u) \to \infty$, а

$$t'''(\lambda)/(\sigma^3\sqrt{N}) \asymp ((L - n/N)N)^{-1/2}.$$

Тогда из (19) – (21) и (24) получаем (22). □

Ниже приводится лемма 4, в которой устанавливается локальная сходимость распределения суммы $\zeta_S^{(r)}$ к нормальному закону.

Лемма 4. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что выполнено одно из условий леммы 3. Тогда при $S = N(1-p_r)(1+o(1))$*

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_S^{(r)} = l\right\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}} e^{-z^2/2}\,(1 + o(1))$$

равномерно по l, для которых $z = (l - Sm_r)/\sigma_r\sqrt{S}$ находится в любом фиксированном конечном интервале.

Доказательство. Следуя классическому доказательству локальных предельных теорем, представим рассматриваемую вероятность по формуле обращения в виде интеграла

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_S^{(r)} = l\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sqrt{S}} \int\limits_{-\pi\sigma_r\sqrt{S}}^{\pi\sigma_r\sqrt{S}} e^{-izt}\varphi_S^{(r)}(t)dt. \quad (25)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} e^{-t^2/2} dt, \quad (26)$$

разность

$$R_s = \sqrt{2\pi}\left(\sigma_r\sqrt{2\pi S}\,\mathsf{P}\left\{\zeta_S^{(r)} = l\right\} - e^{-z^2/2}\right)$$

можно представить в виде суммы

$$R_s = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (27)$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-izt}\left(\varphi_S^{(r)}(t) - e^{-t^2/2}\right) dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{A < |t| \leqslant \varepsilon\sigma_r\sqrt{S}} e^{-izt}\varphi_S^{(r)}(t)dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{S} < |t| \leqslant \pi\sigma_r\sqrt{S}} e^{-izt}\varphi_S^{(r)}(t)dt,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A < |t|} e^{-izt - t^2/2} dt,$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее. Для доказательства леммы достаточно показать, что разность R_s можно сделать сколь угодно малой при больших n, N.

Из (26) следует, что $|I_4| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-t^2/2}dt$, и, выбрав достаточно большое A, мы можем сделать I_4 сколь угодно малым.

Оценим I_3. Пусть $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < L$. Поскольку максимальный шаг распределения $\xi_1^{(r)}$ равен 1, $0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < R$, при $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ выполняется неравенство

$$\left|\varphi^{(r)}(t)\right| \leqslant e^{-C_5}. \qquad (28)$$

Здесь и далее $C_5, C_6, ...$ означают некоторые положительные постоянные. Поэтому

$$|I_3| \leqslant 2 \int\limits_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{S}}^{\pi\sigma_r\sqrt{s}} e^{-C_5 S}dt \leqslant C_6\sigma_r\sqrt{S}e^{-C_5 S}$$

и $I_3 \to 0$ при $S \to \infty$ и постоянном $\varepsilon > 0$. При условии $n/N \to L, \quad N\left(L - n/N\right)^3 \to \infty$, выполнено (28), поэтому, проводя аналогичные выкладки, находим, что $|I_3| \to 0$ и в этом случае.

Пусть теперь $n/N \to 1, \quad n - N \to \infty$. Из (2), (3), (12) и того, что $p_r \to 0$, получаем соотношение $|\varphi^{(r)}(t)|^S \leqslant e^{-C_8\lambda S}$. Тогда по лемме 2

$$|I_3| \leqslant C_9\sigma_r\sqrt{S}e^{-C_8\lambda S}$$

и $I_3 \to 0$ при $S \to \infty$ и постоянном $\varepsilon > 0$.

Оценим теперь I_1 и I_2 при фиксированных ε и A. По лемме 3 слабая сходимость к нормальному распределению равномерна на любом конечном интервале и, следовательно, интеграл $I_1 \to 0$ при $S \to \infty$. Для интеграла I_2 справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|t|\leqslant\varepsilon\sigma_r\sqrt{S}} |\varphi_S^{(r)}(t)|dt.$$

При каждом из условий леммы 3 и $t < \varepsilon\sigma_r\sqrt{S}$ из леммы 2, (20) и (21) следует выполнение следующего неравенства:

$$\left|\frac{t}{3\sigma_r^3\sqrt{S}} Q\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right)\right| \leqslant C_{10}\varepsilon,$$

тогда из (19):

$$|\varphi_S^{(r)}(t)| < e^{-C_7 t^2}.$$

Отсюда делаем вывод, что интеграл I_2 может быть сделан сколь угодно малым при достаточно большом A.

$\square$

Доказательства теорем

В работе [Берникович, Павлов, 2011] было показано, что для суммы ζ_N при выполнении условий теорем 1 – 3 выполняется соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_N = n\right\} = (\sigma\sqrt{2\pi N})^{-1}(1 + o(1)) \qquad (29)$$

равномерно относительно n.

При выполнении условий теоремы 1 $p_r \to 0$. Поэтому, как известно, для целых положительных k

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r}(1 + o(1)) \qquad (30)$$

равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом конечном интервале. Для оценки вероятности $\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\right\}$ используем лемму 4, полагая $S = N - k$ и $l = n - kr$:

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\right\} = \left(\sigma_r\sqrt{2\pi(N-k)}\right)^{-1}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(n - kr - (N-k)m_r)^2}{2\sigma_r^2\,(N-k)}\right\}(1 + o(1)).$$

Заметим, что $N - k = N(1 - p_r - u\sqrt{p_r/N})$. Отсюда, из леммы 2, (8), (9), (11), (13), вытекает, что

$$\frac{(n - kr - (N-k)m_r)^2}{2\sigma_r^2\,(N-k)} \to 0,$$

следовательно,

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\right\} =$$

$$\left(\sigma\sqrt{2\pi(N-k)}\right)^{-1}(1 + o(1)).$$

Отсюда и из (29) получаем, что

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\right\} / \mathsf{P}\left\{\zeta_N = n\right\} \to 1. \qquad (31)$$

Для завершения доказательства осталось применить лемму 1 и (30).

Для доказательства теоремы 2 заметим, что

$$k = Np_r + u_r\sigma_{rr}\sqrt{N}, \quad N - k = N(1-p_r)(1+o(1)), \qquad (32)$$

где $u_r \leqslant C < \infty$. Используя нормальное приближение для биномиального распределения при $Np_r(1-p_r) \to \infty$, находим, что

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\} \qquad (33)$$

равномерно относительно

$$(k-Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$$

в любом фиксированном конечном интервале. Поскольку из (8) и (9) следует, что $\sigma_{rr}^2 \leqslant p_r(1-p_r)$, то равенство (33) справедливо равномерно и по $(k-Np_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$.

По лемме 4 при $S = N-k$ и $l = n-kr$, из (8), (9), (11) и (32) можно установить, что

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n-kr\right\} = \left(\sigma_r\sqrt{2\pi N(1-p_r)}\right)^{-1}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(m-r)^2 p_r u_r^2}{2\sigma^2\left(1-p_r+(u_r\sigma_{rr})/\sqrt{N}\right)}\right\}(1+o(1)). \qquad (34)$$

Нетрудно получить, что

$$\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)} + \frac{(m-r)^2 p_r u_r^2}{2\sigma^2(1-p_r)} = \frac{u_r^2}{2}.$$

Отсюда, из (29), (33) и (34), применяя лемму 1, получаем утверждение теоремы 2.

Утверждения теоремы 3 очевидным образом следуют из лемм 1 и 4, (29) – (31), (33).

Литература

Берникович Е. С., Павлов Ю. Л. О максимальном объеме дерева случайного непомеченного некорневого леса // Дискретная математика. 2011. Т. 23, № 1. С. 3–20.

Колчин А. В. Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 4. С. 148–157.

Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2004. 256 с.

Павлов Ю. Л., Лосева Е. А. Предельные распределения максимального объема дерева в случайном рекурсивном лесе // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 1. С. 60–74.

Павлов Ю. Л. Предельные теоремы для объемов деревьев в случайном непомеченном лесе // Дискретная математика. 2005. Т. 17, № 2. С. 70–86.

Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 326 с.

Хворостянская Е. В. Об условии возникновения гигантского дерева в случайном непомеченном лесе // Дискретная математика. 2002. Т. 19, № 3. С. 35–50.

Pavlov Yu. Random forests. Utrecht: VSP, 2000.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Берникович Елена Сергеевна
аспирант лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: bern@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 761218

Bernikovich, Elena
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: bern@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 761218