Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2011. С. 18–27

УДК 517.977.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НАБЛЮДЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. В. Заика

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается задача определения фазового состояния нелинейной динамической системы по известной траекторной информации. В качестве операторов обработки измерений приняты линейные интегральные функционалы. Показано, что в аналитическом случае можно обеспечить устойчивость решения обратной задачи по отношению к малым вариациям весовых функций.

Ключевые слова: наблюдаемость, устойчивость, аналитические системы.

Yu. V. Zaika. STABILITY OF INTEGRAL OBSERVABILITY OPERATORS OF ANALYTICAL SYSTEMS

The observability problem of determining the phase state of a nonlinear dynamic system from known information about the path is considered. Linear integral functionals are taken as operators of measurements processing. We show that in the analytic case one can ensure the stability of the inverse problem solution with respect to small variations of weight functions.

Key words: observability, stability, analytic systems.

Критерии наблюдаемости нелинейных систем

Постановка задачи

Рассмотрим в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ нелинейную систему наблюдения

$$\dot{x} = f(x),\ y = g(x), \quad g : U \to \mathbb{R}^m,\ m < n, \quad (1)$$

моделирующую закон движения и доступную информацию о движении. Вектор-функции f, g считаем гладкими. Для доказательства основных результатов потребуется вещественная аналитичность: $f, g \in C^\omega(U)$. Задан промежуток наблюдения $[0, T]$ и область возможных конечных состояний $U_T = \{x(T)\} \subseteq U$. Решения $x(\cdot\,; x, T)$ $\big(x(T\,; x, T) = x \in U_T\big)$ продолжимы на отрезок $[0, T]$. Задача наблюдения состоит в определении по информации

$$y(\cdot\,; x, T) = g\big(x(\cdot\,; x, T)\big) : [0, T] \to \mathbb{R}^m$$

фазового вектора $x = x(T) \in U_T$. Запись $y(\cdot\,; x, T)$ означает, что известная на отрезке времени $[0, T]$ вектор-функция измерений $y(\cdot)$ однозначно определяется искомым неизвестным состоянием x в момент T. Предполагается, что задачу необходимо решать систематически. Поэтому нас интересуют операции вычисления по любой возможной реализации $y(\cdot)$ соответствующего $x(T)$ из области U_T. Можно ставить задачу в терминах неизвестных начальных данных $x^0 = x(0) \in U_0$. Но обычно интересуются фазовым состоянием к моменту окончания наблюдения. В рамках модели по данным $x(T)$ (x^0) можно численно восстановить решение и траекторию движения.

Установить наблюдаемость пары (f, g) (биекцию $y(\cdot) \leftrightarrow x(T) \in U_T$) непосредственно по соответствию $x \mapsto y(\,\cdot\,; x, T)$ затруднительно, поскольку речь идет об обращении отображения в пространство вектор-функций. Поэтому обычно переходят к исследованию так называемого отображения наблюдаемости

$$H : x \mapsto y(\,\cdot\,; x, T) \mapsto z \in \mathbb{R}^p,$$

вычисляя значения p функционалов на $y(\cdot)$. Наблюдаемость (f, g) в множестве $V \subseteq U_T$ на отрезке времени $[0, T]$ означает биекцию $y(\,\cdot\,; x, T) \leftrightarrow x \in V$. Если H инъективно на множестве $V \subseteq U_T$ $\big(H(x) \leftrightarrow x \in V\big)$, то (f, g) наблюдаема в V и вектор $x = x(T) \in V$ однозначно определяется по $z = H(x) \in H(V)$. Здесь значения z известны после обработки измерений $y(\cdot)$ (вместе с дополнительной информацией $x_T \in V$, если строго $V \subset U_T$). Возможные способы построения H $(p = \ell\, m)$:

$a)$ $x \mapsto \big(y'(T),\, \dot{y}'(T),\, \ldots,\, y^{(\ell-1)\prime}(T)\big)' \in \mathbb{R}^p;$

$b)$ $x \mapsto \big(y'(t_1),\, \ldots,\, y'(t_\ell)\big)',\ t_i \in [0, T];$

$c)$ $x \mapsto \big(\langle k_1, y\rangle,\, \ldots,\, \langle k_p, y\rangle\big)',\ \langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2};$

$d)$ $x \mapsto \Big(\int_0^T k_1(\tau, y)\, d\tau, \ldots, \int_0^T k_p(\tau, y)\, d\tau\Big)'.$

Достаточные условия наблюдаемости обычно получают на основе анализа инъективности отображения $H \in C^1\big(U_T, \mathbb{R}^p\big)$ в подобласти $V \subseteq U_T$ при $p = n$ (см. [Никайдо, 1972; Ортега, Рейнболдт, 1975; Кирин, 1993]). При этом не только на H, но и на V накладываются ограничения. При построении H можно использовать как способы a)—d), так и их комбинации (p функционалов вида $y_i^{(r)}(s)$, $y_j(t_k), \ldots$). При этом критерии 1)—4) можно применять не только к H, но и к MH, $\det M \neq 0$.

С целью упрощения обозначений и без существенного для дальнейшего изложения ограничения общности можно считать $m = 1$.

Приведем некоторые результаты аналитической теории наблюдения. Ее развитие можно проследить в серии статей К. Е. Старкова в журнале «Автоматика и телемеханика» (80—90-е гг.). Для полиномиальной пары (f, g) при определении $x_T = x(T) \in U_T$ вместо $y(\cdot)$ достаточно ограничиться вычислением конечного числа производных $y^{(i)}(t_*)$, $t_* \in [0, T]$ [Inoye, 1977]. Но их количество $p = p(f, g, U_T)$ может оказаться сколь угодно большим, хотя семейство $\big\{y(\,\cdot\,; x, T) \big|\, x \in U_T\big\}$ «всего лишь» n-параметрическое. Для стационарной наблюдаемой вещественной аналитической пары (f, g) без потери информации об искомом x_T вместо $y(\cdot)$ можно ограничиться набором $2n + 1$ значений $y(t_j)$ [Козеренко, 1987]. Моменты времени t_j фиксируются и не зависят от $y(\cdot)$. Но в общем случае множество «удачных» программ наблюдений $\{t_1, \ldots, t_{2n+1}\}$ не открыто в $[0, T]^{2n+1}$. С учетом погрешностей задания t_j это может привести к потере наблюдаемости. Устойчивые к возмущениям дискретные программы рассмотрены в [Заика, 1999]. Интегральные операторы наблюдения исследуются в [Zaika, 2003]. Применение аналитической теории к простейшей модели движения центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости изложено в [Заика, 1988].

Если на измерение значений функции $y(t)$ существенное влияние оказывают различного рода неконтролируемые помехи, то предпочтительнее использовать интегральные операции обработки информации $y(t)$. Основы соответствующего математического аппарата в линейном случае изложены в книге [Красовский, 1968]. Напомним известный результат, который будет взят за основу обобщения. Пусть $f = Fx$, $g = Gx$, где F, G — матрицы $n \times n$, $m \times n$. Если в сопряженной системе

$$\dot{V}(t) = -F'V(t) + G'k(t),\ V(0) = 0, \qquad (2)$$

построить управление $k(\cdot)$ из условия $V(T) = h$, то по $y(\cdot)$ вычисляется проекция неизвестного $x_T = x(T)$ на вектор h: $h'x_T = \langle k, y\rangle_{L_2}$ $\forall\, x_T \in \mathbb{R}^n$. Совокупность всех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых по любой возможной реализации $y(\cdot)$ однозначно восстанавливается проекция $h'x_T$, описывается множеством достижимости $\mathcal{D}_T = \{V(T)\}$. Этот подход Н. Е. Кириным [Иванов, Кирин, 1988; Кирин, 1993] обобщен на нелинейный случай. Построение оператора восстановления по $y(\cdot)$ значений данной функции $\varphi : U_T \to \mathbb{R}$ в интегральной форме

$$\varphi(x_T) = \int_0^T k\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau\ \ \forall\, x_T = x(T) \in U_T \quad (3)$$

сводится к следующей задаче управления. В сопряженной системе

$$v_t(t, x) + v_x(t, x)\cdot f(x) = k\big(t, g(x)\big),\ v(0, x) = 0,$$

требуется выбрать функцию $k(\,\cdot\,,\cdot)$ из условия $v(T, x) = \varphi(x)$, $x \in U_T$. В линейном случае $(f, g) = (F, G)$, $k(t, y) = k'(t)y$ получаем $v(t, x) = V'(t)x$, где вектор-функция $V(t)$ удовлетворяет соотношениям (2). Нелинейная задача построения операции наблюдения для области фазового пространства является распределенной. Важно, что сопряженное уравнение линейное по паре функций (k, v) и возможно применение теории управления и методов решения линейных граничных задач.

Сведения из комплексного анализа

1. Аналитические подмножества. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$. Множество $A \subseteq \Omega$ называется (комплексным) аналитическим подмножеством Ω [Чирка, 1985], если для каждой точки $a \in \Omega$ найдутся ее окрестность U и голоморфные в ней функции $f_1, \ldots, f_N$, такие, что $A \cap U = \{z \in U | \, f_1(z) = \ldots = f_N(z) = 0\}$. Локально множество A определяется общими нулями конечных наборов голоморфных функций и замкнуто в Ω. В изложении [Эрве, 1965] такие A называются аналитическими множествами в Ω (без приставки «под»). Можно оставить лишь требование открытости Ω, не меняя определения. В [Чирка, 1985] понятие аналитического множества «занято» несколько иным объектом ($a \in A$).

Теорема 1 ([Чирка, 1985])**.** *Если $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное семейство аналитических подмножеств Ω, то $A = \cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ — тоже аналитическое подмножество Ω, причем для любого K с компактным замыканием в Ω ($K \Subset \Omega$) найдется конечное подмножество $J \subseteq I$, такое, что $A \cap K = \left(\cap_{\alpha \in J} A_\alpha\right) \cap K$.*

2. Ростки голоморфных функций. Рассмотрим кольцо I_n степенных рядов от n комплексных переменных, сходящихся в заданной открытой окрестности U фиксированной точки $z_0 \in \mathbb{C}^n$. Идеалом J в I_n называется всякая аддитивная подгруппа I_n, удовлетворяющая условию $I_n J = J$ ($a \in I_n$, $b \in J \Rightarrow ab \in J$). Кольцо I_n, как известно, нётерово. Это означает, что в произвольном идеале $J \subseteq I_n$ найдутся такие элементы $b_1, \ldots, b_p$ (конечный базис J), что любой элемент $b \in J$ представим в виде линейной комбинации $b = \sum_{i=1}^{p} a_i b_i$, $a_i \in I_n$.

Если окрестность U не фиксировать, то приходим к понятию кольца $\mathcal{H}_n$ ростков голоморфных функций в точке $z_0 \in \mathbb{C}^n$ [Эрве, 1965]. Приведем определения. Заданные и голоморфные в открытых окрестностях U_1, U_2 точки $z_0 \in \mathbb{C}^n$ функции f_1, f_2 эквивалентны, если в некоторой открытой окрестности $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ точки z_0 они тождественны. Ростками голоморфных функций в точке z_0 называются классы эквивалентности функций, определенных и голоморфных в открытых множествах, содержащих z_0. Две функции, голоморфные в открытых окрестностях z_0, совпадают в некотором поликруге $P = \{z : |z_k - z_{0k}| < r_k \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\},\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ тогда и только тогда, когда они имеют одно и то же тейлоровское разложение в z_0. Поэтому $\mathcal{H}_n$ изоморфно кольцу сходящихся степенных рядов. Сходимость ряда означает, что существует открытый поликруг P, в котором ряд сходится. Росток, порожденный функцией f, обозначаем $\widehat{f}$. Сложение и умножение ростков определяются их представителями: $\widehat{f_1} + \widehat{f_2}$ — росток, порожденный функцией $f_1 + f_2$, а росток $\widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2}$ порожден функцией $f_1 \cdot f_2$. Кольцо $\mathcal{H}_n$ нётерово. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 ([Эрве, 1965], с. 44)**.** *Для любого идеала J кольца $\mathcal{H}_n$ можно указать:*

(I) *в некоторой открытой окрестности U точки z_0 конечное множество голоморфных функций $h_1, \ldots, h_r$ с ростками в z_0 из J;*

(II) (*базис векторов в пространстве $\mathbb{C}^n$ и*) *последовательность открытых поликругов $\{P_i, i \geqslant 1\}$ с центром в точке z_0 и радиусами, монотонно стремящимися к нулю* $\left(\overline{P}_1 \subset U,\ r_k = r_k(i) > r_k(i+1) > 0\right)$;

(III) *числа $\varrho_i > 0$, $i \geqslant 1$, со следующим свойством: для каждой голоморфной в поликруге P_i функции h с ростком $\widehat{h} \in J$ существуют такие голоморфные в P_i функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что в P_i имеет место разложение*

$$h(z) = \sum\nolimits_{j=1}^{r} \alpha_j(z) h_j(z), \tag{4}$$

$$\|\alpha_j\|_{P_i} = \sup\nolimits_{z \in P_i} |\alpha_j(z)| \leqslant \varrho_i \, \|h\|_{P_i} \ \forall j.$$

При переходе к первоначальному базису $\mathbb{C}^n$ вместо поликругов P_i получим последовательность окрестностей U_i точки z_0.

Следствие. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейства функций, голоморфных в открытой окрестности U точки $z_0 \in \mathbb{C}^n$. Тогда можно указать* (*открытый*) *поликруг $P \subseteq U$ с центром в z_0 и набор функций $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{F}$, обладающие следующим свойством: для каждой $f \in \mathcal{F}$ существуют такие голоморфные в поликруге P функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, что в P справедливо представление $f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_N f_N$.*

В поликруге P множество общих нулей функций $f \in \mathcal{F}$ совпадет с множеством общих нулей конечного подмножества $\mathcal{F}$.

3. Число определяющих функций. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство функций, голоморфных в открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$. Тогда множество их общих нулей Z есть аналитическое подмножество в Ω, причем существуют такие голоморфные в Ω функции $g_0, \ldots, g_n \in \mathcal{O}(\Omega)$, что множество их общих нулей совпадает с множеством Z [Чирка, 1985](с. 54).

Схема доказательства следующая. Пусть Ω_i — связные компоненты Ω, не принадлежащие Z, и $a_i \in \Omega_i \setminus Z$ — произвольно выбранные точки. Для каждого i найдется функция f_{α_i}, такая, что $f_{\alpha_i}(a_i) \neq 0$. Представим Ω в виде такого счетного объединения $\Omega = \cup D_j$, что D_j — ограниченные открытые множества, $D_j \subset D_{j+1}$, $K_j = \overline{D}_j \subset \Omega$, и для каждого компакта $K \subset \Omega$ найдется s из условия $K \subset K_s$. Подберем индукцией по j числа c_j так, чтобы выполнялись следующие два неравенства:

$$\big|c_j f_{\alpha_j}(z)\big| < 2^{-j} \ \forall z \in K_j, \ \forall i \leqslant j,$$

$$\Big|\sum\nolimits_{k=1}^{j} c_k f_{\alpha_k}(a_i)\Big| > 2^{-1}\big|c_i f_{\alpha_i}(a_i)\big|. \qquad (5)$$

Ряд $\sum c_i f_{\alpha_i}$ равномерно на компактах сходится в Ω к голоморфной функции, которую обозначим g_n. По построению выполнено

$$g_n(a_i) \neq 0 \ \forall i \ \Rightarrow \ \dim(Z_{g_n} \cap \Omega_i) < n,$$

где множество Z_{g_n} — нули g_n в Ω, $\Omega \not\subset Z$. Остальные функции $g_{n-1}, \ldots, g_0$ строятся в [Чирка, 1985] по индукции в форме (счетных) линейных комбинаций некоторых функций f_α аналогичным образом: $g_s\big|_Z \equiv 0$ и все неприводимые компоненты множества $Z_{g_n} \cap \ldots \cap Z_{g_s}$ размерности $\geqslant s$ в Ω принадлежат Z. Множество общих нулей $g_0, \ldots, g_n$ совпадает с Z.

Наблюдение по проекциям в L_2

Остановимся на линейных операторах (3):

$$\varphi(x_T) = \langle k, y\rangle_{L_2}, \ x_T = x(T) \in U_T,$$

где $L_2 = L_2[0,T]$, $m = 1$. Допустимые весовые функции $k(\cdot)$ обработки измерений $y(\cdot)$ считаем кусочно непрерывными на отрезке времени $[0,T]$. Функционалы $y(\cdot) \mapsto \langle k, y\rangle$ и сами числа (моменты) $\langle k, y\rangle$ будем называть проекциями. С вычислительной точки зрения важно иметь конечномерное представление функции $y(\cdot)$. Можно ли подобрать такие $k_1(\cdot), \ldots, k_p(\cdot)$, чтобы сужение $y(\cdot)$ до значений конечного числа функционалов $J_i[y(\cdot)] = \langle k_i, y\rangle_{L_2}$ не приводило к потере информации об искомом $x(T)$? Имеется в виду биективное соответствие

$$y(\,\cdot\,; x_T, T) \leftrightarrow \big(J_1[y(\cdot)], \ldots, J_p[y(\cdot)]\big), \ x_T \in U_T.$$

В случае успеха «запоминание» $y(\cdot)$ сводится к интегрированию функций $k_i(t)y(t)$ по мере поступления измерений $y(t)$, что сравнительно легко осуществляется техническими средствами. Иной акцент вопроса: возможна ли ситуация, когда пара (f,g) наблюдаема $\big($инъективно отображение $x_T \mapsto y(\cdot)\big)$, но по конечному числу проекций $\langle k_i, y\rangle$ однозначно определять x_T невозможно? Здесь функции $k_i(\cdot)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, фиксируются одни и те же для всех возможных $y(\cdot)$, $x_T \in U_T$. Если указанные наборы $k_i(\cdot)$ существуют, как выбрать по возможности минимальным p? Пусть $k(\cdot)$ фиксирована. Цепочка $x_T \mapsto y(\cdot) \mapsto \langle k, y\rangle$ порождает функцию $\varphi(x_T) = \langle k, y\rangle$. Как дать аналитическое описание $\varphi(\cdot)$? Важен и в определенном смысле обратный вопрос. Обычно измеряется часть фазовых координат, требуется лишь восстанавливать оставшиеся или, более общо, значения заданных функций $\varphi(x_T)$. Как для заданной функции φ подобрать k, чтобы выполнялось представление (3) с требуемой точностью? Изложим некоторые результаты в случае аналитичности f, g по x.

Определение 1. Функцию $\varphi\colon U_T \to \mathbb{R}$ назовем наблюдаемой в множестве $M \subseteq U_T$, если существует функционал Λ из условия $\varphi(x) = \Lambda[y(\cdot)]$, где $x = x_T \in M$, $y(\cdot) = y(\,\cdot\,; x_T, T)$.

Такие функции φ будем также называть *наблюдаемыми компонентами* пары (f,g). Наблюдаемость φ в M означает, что ее значения $\varphi(x)$ на неизвестном априори фазовом векторе $x = x(T)$ однозначно восстанавливаются по доступной в результате измерений информации $y(\,\cdot\,; x, T)$, если дополнительно известно включение $x \in M$. Наблюдаемость пары (f,g) эквивалентна наблюдаемости всех координат $\varphi(x) = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в области U_T. Когда исследуется наблюдаемость функции φ в M и φ задана лишь на подмножестве N $\big(M \subseteq N \subseteq U_T\big)$, то считаем ее доопределенной в $U_T \backslash N$ произвольно. Обозначим через $\Phi(M)$ множество всех наблюдаемых в M функций φ. Очевидно, $\Phi(N) \subseteq \Phi(M)$ при $M \subseteq N$.

Определение 2. Базисом множества $\Phi(M)$ наблюдаемых в множестве M функций назовем такую конечную совокупность $\varphi_i \in \Phi(M)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, что имеет место функциональная зависимость: $\forall \varphi \in \Phi(M)$, $\forall x \in M$,

$$\varphi(x) = F_\varphi[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)].$$

В записи F_φ индекс отражает зависимость функции F от φ. Множество $\Phi(M)$ является нелинейной (функциональной) оболочкой базисных наблюдаемых функций. Вычислив по измерениям $y(\,\cdot\,; x, T)$ $(x \in M)$ значения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$, дополнительной информации о неизвестном векторе $x = x(T)$ из $y(\cdot)$ уже извлечь невозможно. Наблюдаемость (f,g) в $M \subseteq U_T$ означает биекцию $\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\big) \leftrightarrow x \in M$. Если последним свойством обладает один из базисов, то это же справедливо и для любого другого (при условии их существования). Действительно, пусть Λ_i — функционалы, соответствующие базисным $\varphi_i \in \Phi(M)$ согласно определению 1, $\{k_i,\, i \geqslant 1\}$ — полная в $L_2 = L_2[0,T]$ система, т. е. $\big\{\langle \varphi, k_i\rangle,\, i \geqslant 1\big\} \leftrightarrow \varphi(\cdot) \in L_2$. Тогда

$$\psi_i \in \Phi(U_{\scriptscriptstyle T}) \subseteq \Phi(M),\;\; \psi_i(x) \equiv \big\langle k_i,\, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle.$$

Знак тождества $\equiv$ используем также в смысле равенства по определению в зависимости от контекста. Базисность означает, что

$$\psi_i(x) = F_i[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)]\;\forall\, i \geqslant 1,\, \forall\, x \in M.$$

Поэтому по значениям $\varphi_i(x) = \Lambda_i[y(\,\cdot\,; x, T)]$, $1 \leqslant i \leqslant p$, числа $\psi_i(x)$, $i \geqslant 1$, определяются однозначно. В силу полноты $\{k_i,\, i \geqslant 1\}$ имеем

$$\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\big) \leftrightarrow y(\,\cdot\,; x, T),\;\; x \in M,$$

и вместо функций $y(\cdot)$ можно оперировать векторами $\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\big)$, $x \in M$. Эти же функции φ_i образуют базис $\Phi(N)$ $\forall\, N \subseteq M$.

Функционалы Λ_i в определении 1 могут быть различной природы, в частности, $\Lambda_i[y(\cdot)] = y(t_i)$, $\Lambda_i[y(\cdot)] = y^{(i)}(t_*)$. Ограничимся классом линейных интегральных операций обработки измерений $\Lambda[y(\cdot)] = \langle k, y\rangle$. Очевидно, функции $\psi(x) = \big\langle k, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle$ наблюдаемы в любом подмножестве области $U_{\scriptscriptstyle T}$, т. е. $\psi \in \Phi(M)$ $\forall M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$. При необходимости класс допустимых весовых функций $k(\cdot)$ можно расширить до пространства L_2.

Теорема 3. *Пусть система наблюдения (f, g) вещественная аналитическая: $f \in C^{\,\omega}(U, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^{\,\omega}(U, \mathbb{R})$. Тогда для любого множества M с компактным замыканием в области $U_{\scriptscriptstyle T}$ ($M \Subset U_{\scriptscriptstyle T}$) из произвольной полной в $L_2[0,T]$ системы допустимых весовых функций $\big\{k_i,\, i \geqslant 1\big\}$ можно выделить такие $k_{i_\nu}(\cdot)$ ($1 \leqslant \nu \leqslant p$), что базис множества $\Phi(M)$ образуют компоненты*

$$\varphi_\nu \colon U_{\scriptscriptstyle T} \to \mathbb{R},\;\; \varphi_\nu(x) \equiv \big\langle k_{i_\nu}, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle.$$

Доказательство. Определим в $U_{\scriptscriptstyle T} \times U_{\scriptscriptstyle T}$

$$\Delta\psi_i\big(x^1, x^2\big) = \psi_i\big(x^1\big) - \psi_i\big(x^2\big)$$
$$= \big\langle k_i, y\big(\cdot\,; x^1, T\big) - y\big(\cdot\,; x^2, T\big)\big\rangle,\;\; x^j \in U_{\scriptscriptstyle T}.$$

Включение $\psi \in C^{\,\omega}(U, \mathbb{R})$ означает, что функция ψ в некоторой окрестности каждой точки области U представима сходящимся степенным рядом. По теореме Пуанкаре решение $x(t; x, T)$ аналитически зависит от начальных данных $x = x(T)$. Поэтому (см. [Эрве, 1965], с. 14) функции $\Delta\psi_i$ голоморфны в $U_{\scriptscriptstyle T} \times U_{\scriptscriptstyle T}$. В силу леммы Абеля о сходимости степенных рядов можем считать, что $\Delta\psi_i$ заданы и голоморфны в $W = U^c_{\scriptscriptstyle T} \times U^c_{\scriptscriptstyle T} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$, где комплексная область $U^c_{\scriptscriptstyle T}$ является достаточно малой окрестностью области $U_{\scriptscriptstyle T}$ в $\mathbb{C}^n$. Это продолжение можно задать формулой

$$\Delta\psi_i\big(z^1, z^2\big) = \big\langle k_i, y\big(\cdot\,; z^1, T\big) - y\big(\cdot\,; z^2, T\big)\big\rangle,$$

$z^j \in U^c_{\scriptscriptstyle T}$. Смысл записи $y(\,\cdot\,; z, T)$ ($z \in U^c_{\scriptscriptstyle T}$) сохраняется, поскольку решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ можно рассматривать и при комплексных условиях Коши $x(T) = z \in U^c_{\scriptscriptstyle T} \subseteq \mathbb{C}^n$. Продолжимость таких решений на отрезок времени $[0, T]$ гарантируется для достаточно малой комплексной окрестности $U^c_{\scriptscriptstyle T}$ исходной области $U_{\scriptscriptstyle T} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Обозначим через Z_i множество нулей функции $\Delta\psi_i$ в области W. Тогда общие нули $\Delta\psi_i$ образуют аналитическое подмножество $Z = \cap_{j=1}^{\infty} Z_j$ области W и существуют такие номера $i_1, \ldots, i_p$, что

$$Z \cap (M \times M) = \big(\cap_{\nu=1}^{p} Z_{i_\nu}\big) \cap (M \times M).$$

Из $\Delta\psi_{i_\nu}\big(x^1, x^2\big) = 0$ для $1 \leqslant \nu \leqslant p$, $x^j \in M$ следует $\Delta\psi_i\big(x^1, x^2\big) = 0$, $i \geqslant 1$, и в силу полноты системы $\big\{k_i,\, i \geqslant 1\big\}$ получаем равенство $y\big(\cdot\,; x^1, T\big) = y\big(\cdot\,; x^2, T\big)$. Отсюда $\forall\, x \in M$

$$\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\big) =$$
$$= \big(\langle k_{i_1}, y\rangle, \ldots, \langle k_{i_p}, y\rangle\big) \leftrightarrow y(\,\cdot\,; x, T),$$
$$\varphi(x) = \Lambda[y(\,\cdot\,; x, T)] = F_\varphi[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)],$$

$\forall\, \varphi \in \Phi(M)$. Согласно определению функции φ_i образуют конечный базис $\Phi(M)$. □

Проблему поиска базиса наблюдаемых компонент пары (f, g) можно сформулировать в алгебраических терминах. Рассмотрим в кольце $\mathcal{O}(W)$ голоморфных в $W = U^c_{\scriptscriptstyle T} \times U^c_{\scriptscriptstyle T} \subseteq \mathbb{C}^n$ функций идеал, порожденный $\{\Delta\psi_i,\, i \geqslant 1\}$. Элементы этого идеала — конечные линейные комбинации функций $\Delta\psi_i$ с коэффициентами из кольца $\mathcal{O}(W)$. Конечный базис этого идеала (когда он существует) и определяет номера базисных проекций $\langle k_i, y\rangle$ для множества $M = U_{\scriptscriptstyle T}$ ($\Rightarrow \forall M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$). В частности ([Эрве, 1965], с. 50), $\forall\, \bar{x} \in U_{\scriptscriptstyle T}$ существует окрестность

$$P_\varepsilon = \big\{z \in \mathbb{C}^n \colon \|z - \bar{x}\| = \max_i |z_i - \bar{x}_i| < \varepsilon\big\} \subseteq U^c_{\scriptscriptstyle T}$$

$\big(P_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}\big)$ и конечный набор функций $\Delta\psi_{i_1}, \ldots, \Delta\psi_{i_q}$ из условий: $\big(z^1, z^2\big) \in P_\varepsilon \times P_\varepsilon$,

$$\Delta\psi_j\big(z^1, z^2\big) = \sum\nolimits_{\nu=1}^{q} \alpha_{j\nu}\big(z^1, z^2\big) \Delta\psi_{i_\nu}\big(z^1, z^2\big),$$

$j \geqslant 1$, $\alpha_{j\nu} \in \mathcal{O}\big(P_\varepsilon \times P_\varepsilon\big)$. Тогда справедливо

$$\Delta\psi_{i_\nu}\big(x^1, x^2\big) = 0,\ 1 \leqslant \nu \leqslant q,\ x^j \in M = P_\varepsilon \cap U_{\scriptscriptstyle T}$$

$$\Rightarrow \Delta\psi_i\big(x^1, x^2\big) = 0,\ i \geqslant 1 \Rightarrow y(\cdot\,; x^1) = y(\cdot\,; x^2).$$

Базисом множества $\Phi(M)$ будут функции $\varphi_\nu(x) = \psi_{i_\nu}(x) = \big\langle k_{i_\nu}, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle$:

$$\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_q(x)\big) \leftrightarrow y(\,\cdot\,; x, T), \quad x \in M.$$

Если нет ограничений на весовые функции $\big($в смысле включения $k(\cdot) \in \{k_i\}\big)$, то результат можно усилить $\big(M = U_{\scriptscriptstyle T},\ p = 2n+1\big)$.

Теорема 4. *Пусть* $\big\{k_i,\ i \geqslant 1\big\}$ *— полная в* $L_2[0, T]$ *система непрерывных функций,* $f \in C^\omega(U, \mathbb{R}^n)$*,* $g \in C^\omega(U, \mathbb{R})$*. Тогда существует семейство наборов из* $2n+1$ *функций* $\{r_i(\cdot)\}$*, для которых наблюдаемые компоненты*

$$\varphi_i(x) = \big\langle r_i, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle,\ 0 \leqslant i \leqslant 2n,$$

образуют базис $\Phi(U_{\scriptscriptstyle T})$ $\big($*и* $\Phi(M)\,\forall M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}\big)$*. Каждая* $r_j(\cdot)$ *представима равномерно сходящимся на* $[0, T]$ *рядом по элементам* $\{k_i\}$*.*

Доказательство. Рассмотрим голоморфные в области $\Omega = W = U^c_{\scriptscriptstyle T} \times U^c_{\scriptscriptstyle T} \subseteq \mathbb{C}^{2n}$ функции

$$\Delta\psi_i : W \to \mathbb{C}, \quad \Delta\psi_i\big(z^1, z^2\big) = \psi_i\big(z^1\big) - \psi_i\big(z^2\big).$$

Они определяются аналитическим продолжением функций $\psi_i(x)$ из области $U_{\scriptscriptstyle T}$ в достаточно малую окрестность (область) $U^c_{\scriptscriptstyle T} \supset U_{\scriptscriptstyle T}$ в $\mathbb{C}^n$:

$$\psi_i(z) = \big\langle k_i,\ y(\,\cdot\,; z, T)\big\rangle,\ z = x(T) \in U^c_{\scriptscriptstyle T}.$$

Коррекция составления линейных комбинаций состоит в том, что коэффициенты c_j (см. неравенства (5)) будем подбирать из условия

$$\begin{aligned}
&\big|\, c_j\, \Delta\psi_{\alpha_j}\big(z^1, z^2\big)\big| \\
&= \big|\big\langle\, c_j\, k_{\alpha_j},\ y\big(\cdot\,; z^1, T\big) - y\big(\cdot\,; z^2, T\big)\big\rangle\big| \\
&\leqslant \big\|\, c_j\, k_{\alpha_j}\big\|_{\scriptscriptstyle C} \cdot \big\|\, y\big(\cdot\,; z^1, T\big) - y\big(\cdot\,; z^2, T\big)\big\|_{L_1} \\
&< 2^{-j}\ \forall\, \big(z^1, z^2\big) \in K_j,
\end{aligned}$$

сохраняя при этом второе для c_j неравенство в (5). Эта модификация обеспечит не только сходимость ряда $\sum c_i \Delta\psi_{\alpha_i}$ в области W к голоморфной функции, но и сходимость ряда $\sum c_i k_{\alpha_i}$ в $C[0, T]$. Используя такие построения по индукции и обозначая суммы рядов через $r_{2n}, \ldots, r_0$, приходим к следующему утверждению. Множество общих нулей функций

$$q_i\big(z^1, z^2\big) = \big\langle r_i,\ y\big(\cdot\,; z^1, T\big) - y\big(\cdot\,; z^2, T\big)\big\rangle,$$

$0 \leqslant i \leqslant 2n$, в области W совпадает с $Z = \cap_{j=1}^{\infty} Z_j$ $\big(Z_j$ — нули $\Delta\psi_j$ в $W\big)$. В силу полноты системы $\big\{k_i,\ i \geqslant 1\big\}$ любые неравные на отрезке $[0, T]$ функции $y\big(\cdot\,; x^1, T\big) \neq y\big(\cdot\,; x^2, T\big)$, $x^j \in U_{\scriptscriptstyle T}$, имеют различный набор проекций:

$$\big\{\big\langle r_i,\ y\big(\cdot\,; x^1, T\big)\big\rangle\big\} \neq \big\{\big\langle r_i,\ y\big(\cdot\,; x^2, T\big)\big\rangle\big\}.$$

Из взаимно однозначного соответствия

$$y(\,\cdot\,; x, T) \leftrightarrow \big(\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{2n}(x)\big),\ x \in U_{\scriptscriptstyle T},$$

$\varphi_i(x) = \big\langle r_i,\ y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle$, следует базисность набора функций φ_i в множестве $\Phi(U_{\scriptscriptstyle T})$. Удачных наборов $\{r_j\}$ бесконечно много: имеется определенный произвол в выборе систем $\{k_i\}$ и коэффициентов рядов для функций r_j. □

Если брать $k_i(t) = t^i$, то можно построить $r_j(t)$ вещественными аналитическими в форме степенного ряда. Допустимо использование и разрывных $k_i(t)$, если доказывать сходимость рядов для $r_j(t)$ в пространстве L_2.

Наблюдаемость пары (f, g) в $M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$ $\big(y(\,\cdot\,; x, T) \leftrightarrow x \in M\big)$ характеризуется тем, что для полной в L_2 $\big($или хотя бы в $\mathcal{Y} = \{\,y(\cdot)\}\big)$ системы $\{k_i,\ i \geqslant 1\}$ множество общих нулей функций $\Delta\psi_i\big(x^1, x^2\big)$ в $M \times M$ совпадает с диагональю $\{(x, x) |\, x \in M\}$. Для базисных $r_j(\cdot)$ вектор $x_{\scriptscriptstyle T} \in M$ однозначно определяется по набору $2n+1$ проекций $\mu_i = \langle r_i, y\rangle$. Если (f, g) не является полностью наблюдаемой, поиск базиса $\Phi(M)$ $(M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T})$ сохраняет прикладное значение, поскольку для «отслеживания» значений $u(x(t))$ заданной функции $u(x)$ по предыстории измерений на $[t-T, t]$ нет необходимости в промежуточном восстановлении полного фазового вектора $x(t)$. Если какая-либо из базисных весовых функций $k(\cdot)$ не удовлетворяет ограничениям реализации $|k(t)| \leqslant \overline{k} = \text{const}$, то вместо нее следует взять $\alpha k(\cdot)$ с малым множителем α. Важны лишь «проекции на направления».

Устойчивость интегральных операторов наблюдения

Прежде чем переходить к уточнению понятия устойчивости операторов наблюдения, исследуем аналитическую структуру элементов множества достижимости $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \{v(T, \cdot)\}$ линейной сопряженной системы управления. В стационарном линейном случае, когда $\dot{x} = Fx$, $y = Gx$, имеем $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \{V(T)\} = \mathcal{L}(\mathcal{K})$, где $\mathcal{L}$ — линейная оболочка столбцов матрицы управляемости $\mathcal{K} = \big(G', F'G', \ldots, F'^{n-1}G'\big)$. Попытаемся найти аналог такого конечного описания в общем (бесконечномерном) случае.

Локальное представление элементов $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$

Рассмотрим вещественную аналитическую систему наблюдения (f,g): $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\dot{x} = f(x),\ y = g(x), \quad y(\cdot)\colon [0,T] \to \mathbb{R}.$$

С целью упрощения обозначений пишем $f, g \in C^\omega(U)$ и считаем $m = 1$, т. е. остановимся на анализе наблюдаемости по скалярным измерениям на отрезке $[0,T]$. Это сужение задачи в дальнейшем непринципиально. Кроме того, ограничимся линейными весовыми функциями $k(t,y) = k(t)y$. Допустимы $k(\cdot) \in C[0,T]$ (при необходимости $k(\cdot) \in KC$).

Перейдем к задаче представления элементов множества достижимости

$$\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \big\{v(T,\cdot)\colon U_{\scriptscriptstyle T} \to \mathbb{R},$$
$$k(t,y) = k(t)y,\ v(T,x) = \big\langle k, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle\big\}$$

в форме линейных комбинаций конечного числа функций $L_f^i g$, где $L_f^0 g(x) = g(x)$,

$$L_f^{i+1} g(x) = \partial_x\big(L_f^i g(x)\big)\cdot f(x),\ x \in U.$$

В приложениях обычно компоненты вектор-функций f, g являются суперпозициями элементарных функций, тогда и $L_f^i g$ таковые. В операторных терминах производные

$$L_f^i g = \mathcal{A}^i B\ \big(B = g,\ \mathcal{A} = \partial_x(\cdot) f\big)$$

представляют аналог столбцов матрицы управляемости: $(f,g) = (F,G) \Rightarrow L_f^i g(x) = GF^i x$, $F'^{j-1}G'$ – j-й столбец $\mathcal{K}$. Производные выхода $y^{(i)}(t)$ равны $L_f^i g\big(x(t)\big)$. Теоретически удобно исследовать разрешимость системы уравнений $L_f^i g(x) = y^{(i)}(T)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, относительно $x = x_{\scriptscriptstyle T}$ в области $U_{\scriptscriptstyle T}$. Но последовательное дифференцирование измерений $y(t)$ практически неприемлемо. В этом контексте интегральные операторы корректны: каждая операция производится независимо от другой и происходит сглаживание измерений.

Последующие построения носят локальный характер. Фиксируем произвольную точку $\bar{x} \in U_{\scriptscriptstyle T}$ и достаточно малый куб $\overline{\Pi} \subset U_{\scriptscriptstyle T}$,

$$\Pi = \big\{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x-\bar{x}\| = \max|x_i-\bar{x}_i| < \delta\big\} \subset U_{\scriptscriptstyle T}.$$

В силу теоремы единственности для вещественных аналитических функций выполнено $y|_{[0,T]} \leftrightarrow y|_{[t_1,t_2]}$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$. Поэтому для теоретического анализа наблюдаемости без существенного ограничения общности можно считать отрезок наблюдения таким, что функция $y(t;x,T)$ на множестве $\{(t,x)\} = (-\varepsilon, T+\varepsilon) \times \Pi$, $\varepsilon > 0$, разлагается в ряд по степеням $(t-T)$ и компонент вектора $x - \bar{x}$. Степенные ряды по $x - \bar{x}$ в кубе Π для производных и элементов множества достижимости

$$L_i(x) = L_f^i g(x) = y^{(i)}(T; x, T),\ w(x) = v(T,x)$$

определяют такие голоморфные функции $L_i^c : P \to \mathbb{C}$, $w^c : P \to \mathbb{C}$, что

$$L_i^c\big|_\Pi = L_i\big|_\Pi,\ w^c\big|_\Pi = w\big|_\Pi,$$

$P = \big\{z \in \mathbb{C}^n\colon \|z-\bar{x}\| = \max|z_i - \bar{x}_i| < \delta\big\}$. По непрерывности L_i^c, w^c продолжаются на замыкание $\overline{P}$ (иначе уменьшим значение $\delta > 0$).

Рассмотрим идеал J в кольце $\mathcal{H}_n$ ростков голоморфных функций в точке $\bar{x}$, порожденный $\{L_i^c : P \to \mathbb{C},\ i \geqslant 0\}$. Элементы J — конечные линейные комбинации ростков $\hat{L}_j^c$ с коэффициентами из $\mathcal{H}_n$. Пусть окрестности Q_i точки $z_0 = \bar{x}$ (поликруги P_i в подходящем базисе $\mathbb{C}^n$), базисные функции $h_1, \ldots, h_r$, константы ϱ_i , $i \geqslant 1$, выбраны согласно теореме 2.

Фиксируем номера $s \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ из условий $\overline{Q}_s \subset P$ и справедливости в достаточно малой окрестности Q_s $\forall j \geqslant p$ представлений

$$L_j^c(z) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{p-1} \beta_{j\nu}(z) L_\nu^c(z), \tag{6}$$
$$\|\beta_{j\nu}\|_{Q_s} \leqslant \varrho\, \|L_j^c\|_{Q_s},\ \beta_{j\nu} \in \mathcal{O}\big(Q_s, \mathbb{C}\big),$$

$0 \leqslant \nu \leqslant p-1$, $j \geqslant p$, $\varrho > 0$. Это возможно, поскольку все функции L_j^c в окрестностях Q_i, $i \geqslant 1$, являются линейными комбинациями голоморфных функций $h_1, \ldots, h_r$. Последние, в свою очередь, в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ представимы комбинациями конечного числа L_ν^c по определению идеала J (коэффициенты — голоморфные функции). Существование константы ϱ, независящей от номеров ν и j, следует из оценок в теореме 2.

Итак, без существенного ограничения общности полагаем, что на множестве $\{(t,x)\} = (-\varepsilon, T+\varepsilon) \times \Pi$ $(\varepsilon > 0)$ $y(t;x,T) =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-T)^j}{j\,!}\, y^{(j)}(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-T)^j}{j\,!}\, L_j(x)$$
$$= \sum_{j, i_1, \ldots, i_n \geqslant 0} b_{j, i_1, \ldots, i_n} \cdot (t-T)^j \prod_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \bar{x}_\nu)^{i_\nu}.$$

Тогда для $w(x) = v(T,x) = \big\langle k, y(\,\cdot\,; x, T)\big\rangle$ при $x \in \Pi$ справедливо представление

$$w(x) = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} c_j L_j(x), \quad c_j = \big\langle k, (\tau - T)^j\big\rangle / j\,!.$$

По теореме Абеля о сходимости степенных рядов из полученных разложений следует, что в открытом поликруге P определены функции

$$w^c(z) = \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} c_j L_j^c(z),\ z \in P,$$

$w^c\big|_\Pi = w\big|_\Pi$, $L_j^c\big|_\Pi = L_j\big|_\Pi$. Используя представление (6), получим в окрестности Q_s

$$w^c(z) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j L_j^c + c_p \sum_{\nu=0}^{p-1} \beta_{p\nu} L_\nu^c + \ldots, \qquad (7)$$

а при вещественных значениях аргумента:

$$\eta_{i\nu}(x) \equiv \operatorname{Re} \beta_{i\nu}(x),\ w(x) = \sum_{j=0}^{p-1} c_j L_j(x)$$

$$+\, c_p \sum_{\nu=0}^{p-1} \eta_{p\nu}(x) L_\nu + c_{p+1} \sum_{\nu=0}^{p-1} \eta_{p+1,\nu}(x) L_\nu + \ldots .$$

Вещественная часть голоморфной функции $\beta_{i\nu}(x)$ является вещественной аналитической в пересечении $\mathcal{O}_s \cap \mathbb{R}^n \subset \Pi$.

Лемма 1. *Ряд в представлении* (7) *сходится абсолютно и равномерно в* Q_s.

Доказательство. Достаточно доказать абсолютную и равномерную в области Q_s сходимость рядов $c_\nu + c_p \beta_{p\nu}(z) + c_{p+1}\beta_{p+1,\nu}(z) + \ldots$, конечной линейной комбинацией которых и получается разложение (7). Сходящийся степенной ряд для $y(t;x,T)$ определяет голоморфную функцию $\eta(\zeta,z)$, где $|\zeta - T| < T + \varepsilon$, $z \in P$, $\eta\big|_A = y\big|_A$, $A \equiv (-\varepsilon, 2T+\varepsilon) \times \Pi$. Для каждого $z \in P$ в силу неравенств Коши

$$\frac{\left|L_j^c(z)\right|}{j!} \leqslant \max_\zeta \frac{|\,\eta(\zeta,z)|}{\widetilde{T}^j},\ \ |\zeta - T| = \widetilde{T},\ T < \widetilde{T},$$

$$\widetilde{T} < T + \varepsilon,\ \left\|L_j^c\right\|_P \leqslant j! L \widetilde{T}^{-j},\ L \equiv \sup_{\zeta,z} |\,\eta(\zeta,z)|\,,$$

$|\zeta - T| = \widetilde{T}$, $z \in P$, где $L < +\infty$ в силу $\overline{\Pi} \subset U_{\scriptscriptstyle T}$, $\overline{P} \subset U_{\scriptscriptstyle T}^c$ (δ достаточно мало). С учетом

$$|c_i|\,i! = \left|\int_0^T k(\tau)(\tau - T)^i\,d\tau\right| \leqslant T^i \ell\,,\ \ell = \text{const},$$

в окрестности Q_s получаем последовательность оценок: $q = T\widetilde{T}^{-1} < 1$,

$$|c_\nu| + |c_p|\,|\beta_{p\nu}| + |c_{p+1}|\,|\beta_{p+1,\nu}(z)| + \ldots$$
$$\leqslant |c_\nu| + |c_p|\,\|\beta_{p\nu}\|_{Q_s} + |c_{p+1}|\,\|\beta_{p+1,\nu}\|_{Q_s} + \ldots$$
$$\leqslant |c_\nu| + \varrho\,|c_p|\,\left\|L_p^c\right\|_P + \varrho\,|c_{p+1}|\,\left\|L_{p+1}^c\right\|_P + \ldots$$
$$\leqslant |c_\nu| + \varrho\ell L q^p + \varrho\ell L q^{p+1} + \ldots .$$

□

Заменим при $t \in (-\varepsilon, T+\varepsilon)$, $x \in Q_s \cap \mathbb{R}^n$ в представлении $y(t;x,T) =$

$$= L_0(x) + (t-T)L_1(x) + 0.5(t-T)^2 L_2(x) + \ldots$$

производные L_j, $j \geqslant p$, линейными комбинациями согласно разложениям (6) и «соберем коэффициенты» при функциях $L_0, \ldots, L_{p-1}$:

$$y(t;x,T) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i(t,x) L_i(x),\ L_i \equiv L_f^i g, \qquad (8)$$

$$v(T,x) = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i(x) L_i(x),\ \sigma_i(x) \equiv \big\langle k, \gamma_i(\cdot,x)\big\rangle,$$

$x \in Q_s \cap \mathbb{R}^n$, $t \in (-\varepsilon_0, T+\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, $T+\varepsilon_0 < \widetilde{T} < T+\varepsilon$. В силу леммы абсолютная и равномерная сходимость комплексных функциональных рядов обеспечивает возможность перегруппировки слагаемых и вещественную аналитичность функций $\gamma_i(t,x)$, $\sigma_i(x)$. Результат является следствием неравенств Коши и оценок в окрестности Q_s коэффициентов $\beta_{j\nu}$ из представлений (6) с константой $\varrho \neq \varrho(\nu, j)$.

В локальной постановке задачи наблюдения неопределенность в начальных данных $x(T)$ мала и требуется исследовать наблюдаемость в окрестности опорного движения с $x(T) = \bar{x}$. Поэтому сформулируем итог проведенных рассуждений в следующей форме.

Теорема 5. *Пусть* $f, g \in C^\omega(U)$, *отрезок времени наблюдения* $[0,T]$ *и область* $U_{\scriptscriptstyle T} = \{x(T)\}$ *достаточно малы* $(U_{\scriptscriptstyle T} : \|x - \bar{x}\| < \delta)$. *Тогда в* $U_{\scriptscriptstyle T}$ *элементы множества достижимости* $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \{v(T,\cdot)\,|\,k(t,y) = k(t)y\}$ *имеют представление* (8), *где функции* $\gamma_i(t,x)$ *являются вещественными аналитическими в области* $(t', t'') \times U_{\scriptscriptstyle T} \supset [0,T] \times U_{\scriptscriptstyle T}$, *а функции* $\sigma_i(x)$ — *в области* $U_{\scriptscriptstyle T}$ $\big(\gamma_i \neq \gamma_i(k)\big)$.

В отличие от линейного случая, в полученном конечном разложении элементов множества достижимости по «столбцам матрицы управляемости» $\mathcal{A}^i B = L_f^i\, g$ коэффициенты σ_i являются функциями фазового состояния. Если у набора $L_0, \ldots, L_{p-1}$ имеются два различных общих нуля в области $U_{\scriptscriptstyle T}$, то пара (f,g) заведомо неполностью наблюдаема в $U_{\scriptscriptstyle T}$. При $m > 1$ имеем $\langle k, y\rangle_{L_2^m} = \langle k_1, y_1\rangle + \ldots + \langle k_m, y_m\rangle$ и представление вида (8) останется в силе, только σ_i — строки $(\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{im})$.

Результат обобщает следующие построения. При $f = Fx$, $g = Gx$ имеем $y(t;x,T) =$

$$= G\exp\big\{(t-T)F\big\}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-T)^i}{i!}\, GF^j x.$$

Для номеров $j \geqslant p$, $p = \operatorname{rank}(G', \dots, F'^{n-1}G')$, можно строки GF^j выразить как линейные комбинации p строк $G, GF, \dots, GF^{p-1}$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$y(t;x,T) = \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_j(t) GF^j x = \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_j(t) L_j(x),$$

$$v(T,x) = \langle k, y \rangle = \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_j L_j(x), \ \sigma_j = \langle k, \gamma_j \rangle_{L_2}.$$

Коэффициенты $\gamma_j(t)$ обладают свойством $\gamma(T) = \big(\gamma_0(T), \dots, \gamma_{p-1}(T)\big)' = e_1$, $\dot{\gamma}(T) = e_2$, $\dots$, $\gamma^{(p-1)}(T) = e_p$, как и $\gamma_j(t,x)$, построенные в (8): $\gamma(T,x) = e_1$, $\gamma_t(T,x) = e_2, \dots$, $\{e_i\}$ — канонический базис $\mathbb{R}^n$. Впрочем, суммированием рядов заниматься необязательно. Достаточно воспользоваться представлением матричной экспоненты $\exp\{Ft\} = \alpha_0(t)E + \dots + \alpha_{p-1}(t)F^{p-1}$. Здесь (как и при $m > 1$) в качестве p можно взять степень характеристического или минимального аннулирующего полинома матрицы F. Поиск $\alpha_j(t)$ сводится к решению линейного однородного скалярного дифференциального уравнения p-го порядка.

Вариации весовых функций

Перейдем к вопросу об устойчивости локального базиса наблюдаемых компонент к малым вариациям весовых функций $k(\cdot)$, что существенно с вычислительной точки зрения. Для этого установим важное свойство коэффициентов $\gamma_i(t,x)$. Само представление вида (8) неединственно: можно формально увеличить значение p (полагая соответствующие $\gamma_j = 0$), изменить γ_i добавлением нетривиальной тождественной нулю комбинации производных L_j и т. п. Фиксируем в разложении (8) именно те коэффициенты $\gamma_j(t,x)$, которые построены выше (T, $U_{\scriptscriptstyle T}$ достаточно малы):

$$\gamma_j(t,x) = \frac{(t-T)^j}{j!} + \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{(t-T)^\nu}{\nu!}\, \eta_{\nu j}(x),$$
$$0 \leqslant j \leqslant p-1, \ \eta_{\nu j}(x) = \operatorname{Re} \beta_{\nu j}(x),$$

$t \in (-\varepsilon_0, T + \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, $x \in U_{\scriptscriptstyle T}$, $m = 1$. Фиксируем произвольную полную в $L_2[0,T]$ систему $\{k_i, i \geqslant 1\}$. Тогда для элементов $w_i(x) = v_i(T,x) = \big\langle k_i, y(\,\cdot\,;x,T)\big\rangle$, $x \in U_{\scriptscriptstyle T}$, получим $(w_1(x), w_2(x), \dots)' =$

$$= \begin{pmatrix} \langle k_1, \gamma_0 \rangle & , \dots , & \langle k_1, \gamma_{p-1} \rangle \\ \langle k_2, \gamma_0 \rangle & , \dots , & \langle k_2, \gamma_{p-1} \rangle \\ \dots & , \dots , & \dots \end{pmatrix}$$
$$\times (L_0, \dots, L_{p-1})'. \qquad (9)$$

Лемма 2. *В представлении (9) элементов множества достижимости $w_i \in \mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$, $i \geqslant 1$, среди строк матрицы $\Gamma = \big\{\langle k_i, \gamma_j(\cdot, x)\rangle\big\}$ при любом фиксированном $x \in U_{\scriptscriptstyle T}$ можно найти p линейно независимых строк.*

Без ограничения общности предполагаем, что базис строк матрицы находится среди p первых строк. В матричной записи получаем представление $\Gamma' = (M, MN)$, $M = M_{p \times p}$. Предположим противное:

$$\operatorname{rank} M < p \Rightarrow \Gamma c = 0, \ c = (c_0, \dots, c_{p-1})' \neq 0,$$

$x = \hat{x} \in U_{\scriptscriptstyle T}$. Тогда выполняется $\langle k_i, c'\gamma \rangle = 0$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1})'$. В силу полноты системы $\{k_i, i \geqslant 1\}$ в L_2 имеем $\forall\, t \in [0,T]$ $c'\gamma(t, \hat{x}) =$

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(t-T)^j}{j!}\, c_j + \frac{(t-T)^p}{p!} \sum_{j=0}^{p-1} \eta_{pj}(\hat{x}) c_j + \dots = 0.$$

Отсюда все $c_j = 0$ и получаем противоречие.

Пусть пара (f,g) вещественно аналитична в $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Фиксируем T и окрестность Q некоторой опорной точки $\bar{x} \in U$, для которых справедливо конечное представление (8), а также любую полную в $L_2[0,T]$ систему $\{k_i, i \geqslant 1\}$ допустимых весовых функций.

Теорема 6. *Если область неопределенности $U_{\scriptscriptstyle T}$ ($\bar{x} \in U_{\scriptscriptstyle T} \subseteq Q$) достаточно мала, то можно выделить такие $k_{i_1}, \dots, k_{i_q}$, что:*

1) *элементы $w_{i_\nu}(x) = v_{i_\nu}(T,x) = \langle k_{i_\nu}, y \rangle$ $\big(x \in U_{\scriptscriptstyle T}, 1 \leqslant \nu \leqslant q\big)$ образуют базис множества достижимости $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$ $\big($и $\Phi(U_{\scriptscriptstyle T})\big)$;*

2) *базис множества $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$ образуют также функции $\widetilde{w}_{i_\nu}(x) = \langle k_{i_\nu} + \xi_{i_\nu}, y \rangle$ при достаточно малых возмущениях $\|\xi_{i_\nu}\|_{L_1} < \tilde{\varepsilon}$.*

Доказательство. Считаем $U_{\scriptscriptstyle T}$ окрестностью опорной точки $\bar{x} \in U$ (требование малости $U_{\scriptscriptstyle T}$ далее уточним). Рассмотрим идеал $\tilde{J} \subset \mathcal{H}_{2n}$ ростков голоморфных функций в точке $(\bar{x}, \bar{x}) \in U_{\scriptscriptstyle T} \times U_{\scriptscriptstyle T}$, порожденный множеством $\big\{\Delta L_i^c : P \times P \to \mathbb{C}, \ i \geqslant 0\big\}$, $\Delta L_i^c\big(x^1, x^2\big) = L_i^c\big(x^1\big) - L_i^c\big(x^2\big)$. Используем построения из доказательства теоремы 5. Представления

$$\Delta L_j^c\left(z^1, z^2\right) = \textstyle\sum_{\nu=0}^{q-1} \widetilde{\beta}_{j\nu}\big(z^1, z^2\big) \Delta L_\nu^c, \qquad (10)$$
$$\|\widetilde{\beta}_{j\nu}\|_{\widetilde{Q}_s} \leqslant \widetilde{\varrho}\, \|\Delta L_j^c\|_{\widetilde{Q}_s}, \quad \widetilde{\varrho} \neq \widetilde{\varrho}(\nu, j), \quad j \geqslant q,$$

справедливые в некоторой комплексной окрестности $\widetilde{Q}_s$ точки $(\bar{x}, \bar{x})$ в произведении $P \times P$, доказывается аналогично разложениям (6). Считаем, что $U_{\scriptscriptstyle T} \times U_{\scriptscriptstyle T} \subset \widetilde{Q}_s \cap \mathbb{R}^{2n}$. Точно так же (только удваиваем размерность) приходим к выражениям (9) с заменой элементов $w_i(x)$ на разности $\Delta w_i(x^1, x^2) = w_i(x^1) - w_i(x^2) = \langle k_i, y(\cdot\,; x^1, T) - y(\cdot\,; x^2, T)\rangle$, заменой функций $L_\nu(x)$ на разности $\Delta L_\nu(x^1, x^2) = L_\nu(x^1) - L_\nu(x^2)$ и номера p на q. Для этого в разложении в функциональный ряд

$$\Delta y = y(t; x^1, T) - y(t; x^2, T) \\ = \Delta L_0 + (t-T)\Delta L_1 + 0.5(t-T)^2\Delta L_2 + \ldots$$

следует заменить ΔL_j, $j \geqslant q$, линейными комбинациями функций $\Delta L_0, \ldots, \Delta L_{q-1}$ по формуле (10) и поменять порядок суммирования.

Фиксируем теперь номера $i_1, \ldots, i_q$ линейно независимых в точке $(\bar{x}, \bar{x})$ строк соответствующей матрицы Γ: $(\Delta w_{i_1}, \ldots, \Delta w_{i_q}) =$

$$= (\Delta L_0, \ldots, \Delta L_{q-1})R, \quad x^{1,2} \in U_{\scriptscriptstyle T}.$$

При этом $\det R(\bar{x}, \bar{x}) \neq 0$. Элементы матрицы R имеют вид скалярных произведений $\langle k_{i_\nu}, \gamma_j(\cdot\,, x^1, x^2)\rangle$ $(0 \leqslant j \leqslant q-1,\ 1 \leqslant \nu \leqslant q)$. Поэтому при достаточно малых допустимых возмущениях $\|\xi_{i_\nu}\|_{L_1[0,T]} < \tilde{\varepsilon}$ матрица $\widetilde{R}$ с элементами $\langle k_{i_\nu} + \xi_{i_\nu}, \gamma_j\rangle$ останется невырожденной в точке $(\bar{x}, \bar{x})$ и ее окрестности $U_{\scriptscriptstyle T} \times U_{\scriptscriptstyle T}$. Здесь, если необходимо, снова уменьшаем область $U_{\scriptscriptstyle T}$. Окончательно получаем

$$(\Delta\widetilde{w}_{i_1}, \ldots, \Delta\widetilde{w}_{i_q}) = (\Delta L_0, \ldots, \Delta L_{q-1})\widetilde{R}, \quad (11)$$

$$(x^1, x^2) \in U_{\scriptscriptstyle T} \times U_{\scriptscriptstyle T},\ \det\widetilde{R} \neq 0,\ \|\xi_{i_\nu}\|_{L_1} < \tilde{\varepsilon},$$

$$\Delta\widetilde{w}_{i_\nu}(x^1, x^2) = \langle k_{i_\nu} + \xi_{i_\nu}, \Delta y\rangle.$$

Из $\Delta\widetilde{w}_{i_\nu}(x^1, x^2) = 0$, $\nu \leqslant q$, следует $\Delta L_j(x^1, x^2) = 0$, $j \leqslant q-1$, и $\Delta L_j = 0$, $j \geqslant 0$, $y(\cdot\,; x^1, T) = y(\cdot\,; x^2, T)$. Поэтому

$$(\widetilde{w}_{i_1}(x), \ldots, \widetilde{w}_{i_q}(x)) \leftrightarrow y(\cdot\,; x, T), \quad x \in U_{\scriptscriptstyle T}.$$

Функции $\widetilde{w}_{i_\nu}$ образуют базис множества достижимости $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$ сопряженной системы и множества $\Phi(U_{\scriptscriptstyle T})$ наблюдаемых функций φ. □

Следствие. *Если дополнительно пара (f, g) наблюдаема в области $U_{\scriptscriptstyle T}$, то фазовый вектор $x(T) \in U_{\scriptscriptstyle T}$ однозначно определяется по q проекциям $\mu_\nu = \langle k_{i_\nu}, y\rangle$ из системы уравнений $v_{i_\nu}(T, x) = \mu_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant q$. Однозначность восстановления $x(T)$ останется при малом возмущении весовых функций $k_{i_\nu}(\cdot)$.*

Литература

Заика Ю. В. Вычисление фазовых переменных ЛА по результатам траекторных измерений // Методы восстановления и анализа динамики управляемых процессов. М.: МО, 1988. Вып. 1. С. 57–71.

Заика Ю. В. Устойчивые дискретные программы наблюдений в аналитических динамических системах // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 2. С. 194–201.

Иванов А. П., Кирин Н. Е. Сопряженные задачи теории управления. Л.: ЛГУ, 1988. 88 с.

Кирин Н. Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб.: СПбГУ, 1993. 308 с.

Козеренко К. В. О числе замеров // ДАН СССР. 1987. Т. 296, № 5. С. 1069–1071.

Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.

Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая эконимика. М.: Мир, 1972. 523 с.

Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений. М.: Мир, 1975. 560 с.

Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985. 270 с.

Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1965. 265 с.

Inoye Y. On the observability of autonomous nonlinear systems // Journal of Math. Analysis and Applications. 1977. Vol. 60, N. 1. P. 236–247.

Zaika Yu. Integral observability operators of nonlinear dynamical systems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2003. N. 55. P. 3519–3538.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Заика Юрий Васильевич
зав. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Zaika, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312