Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2011. С. 33–37

*УДК 517.977*

# ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ

**А. Н. Кириллов**

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассмотрена многомерная нелинейная динамическая система, описывающая процесс биологической очистки. Построены инвариантные множества системы. Предложен метод стабилизации процесса, основанный на приведении траекторий в эти множества.

Ключевые слова: инвариантное множество, динамическая система, управление, биологическая очистка.

## A. N. Kirillov. INVARIANT SETS OF A BIOLOGICAL TREATMENT PROCESS CONTROL SYSTEM

A multidimensional nonlinear dynamic system used to describe the biological treatment process is considered. Invariant sets of the system are built. A process stabilization method based on routing the trajectories into these sets is proposed.

Key words: invariant sets, dynamic system, control, biological treatment.

## Введение

Задача стабилизации процесса биологической очистки сточных вод играет важную роль в проблеме охраны окружающей среды. От ее успешного решения зависит качество питьевой воды, количество которой в расчете на одного человека в период с 1970 по 2002 гг., по данным Центра экологической политики России, уменьшилось вдвое [Данилов-Данильян, 2009]. Сложность процесса биоочистки, ограниченная возможность проведения натурных экспериментов [Евилевич, Брагинский, 1979] приводят к необходимости активно использовать математическое моделирование для управления этим процессом. В 1987 г. была создана так называемая модель ASM1 очистки сточных вод с помощью активного ила [Henze et al., 1987], которая стимулировала использование математического моделирования в практике инженерных расчетов. Модель ASM1 представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитическое и качественное исследование которой практически невозможно. Имеется достаточно большое количество работ, связанных с упрощением данной модели. При этом используют линеаризацию, декомпозицию, уменьшение размерности [Steffens et al., 1997; Chachuat et al., 2003; Smets et al., 2003]. Следует заметить, что несмотря на сложность, в модели ASM1 не учтена многовидовость состава микроорганизмов активного ила.

Процессы, происходящие в системе биоочистки, до сих пор мало изучены, поэтому построение адекватной модели, учитывающей различные стороны этого процесса, в настоящее время невозможно. Видимо, следует сосредоточиться на разработке комплекса достаточно простых и приемлемых с инженерной точки зрения моделей, применение которых для повышения эффективности процесса биоочистки не вызывало бы больших затруднений.

В настоящей работе предлагается метод стабилизации процесса биоочистки, основанный на построении инвариантного множества в динамической системе управления. В качестве трофической функции используется функция Моно [Brune, 1985; Вавилин, 1986]. При этом учтен многовидовой состав сообщества микроорганизмов. Управляющим воздействием является скорость возвратного потока ила. Допустимые управления – кусочно-постоянны и принимают всего два значения, что упрощает практическую реализацию алгоритма стабилизации.

## Модель и постановка задачи

Будем рассматривать процесс биологической очистки, выделив из его технологической схемы аэротенк и вторичный отстойник. Рассмотрим сообщество микроорганизмов, находящееся в аэротенке. Пусть происходит параллельное потребление субстратов [Вавилин, 1986], т. е. $i$-й микроорганизм потребляет $i$-й субстрат, $i = 1, ..., n$. При этом используем трофическую функцию Моно. Таким образом, получаем динамическую систему, описывающую процесс биологической очистки

$$\dot{x}_i = ua_{1i} + f_i(x_i, s_i) - (b + u)x_i, \qquad (1)$$

$$\dot{s}_i = ba_{2i} - d_i f_i(x_i, s_i) - (b + u)s_i, \qquad (2)$$

$$i = 1, ..., n,$$

где

$$f_i(x_i, s_i) = \frac{\mu_i x_i s_i}{k_i + s_i},$$

$x_i, s_i$ – концентрация $i$-х видов микроорганизма и субстрата, соответственно; $d_i = \frac{1}{Y_i}$, $Y_i$ – коэффициент утилизации $i$-го вида субстрата в биомассу $i$-го вида микроорганизмов; $k_i, \mu_i$ – константа полунасыщения и максимальная удельная скорость роста, соответственно, микроорганизмов $i$-го вида; $u, a_{1i}$ – скорость и концентрация, соответственно, $i$-го вида микроорганизмов в возвратном потоке; $b, a_{2i}$ – скорость и концентрация, соответственно, $i$-го вида субстрата на входе. Параметры системы, если особо не оговорено, считаем постоянными. Будем полагать, что управлением является скорость возвратного потока $u$ как наиболее технически просто регулируемый параметр. При этом вводим ограничения

$$u \in [u_1, u_2],$$

где $u_1, u_2$ – граничные значения скорости $u$, $0 \leqslant u_1 < u_2$. Пусть допустимое управление является кусочно-постоянной функцией $u = u(x, s)$, $u = (u_1, ..., u_n)$, $s = (s_1, ..., s_n)$.

Задача стабилизации процесса биологической очистки сточных вод состоит в нахождении такого допустимого управления $u$, при котором, начиная с некоторого момента времени $t^*$, выполняются условия

$$x_i(t) \in [0, x_{im}], \quad s_i(t) \in [0, s_{im}], \qquad (3)$$
$$t \geqslant t^*, \quad i = 1, ..., n,$$

где $x_{im}, s_{im}$ – предельно допустимые концентрации $i$-го вида микроорганизмов и субстратов.

Множество $M$ является инвариантным для системы управления $\dot{z} = f(z, u)$, если найдется допустимое управление $u$ такое, что соответствующая траектория $x(t, u)$ принадлежит $M$ при всех $t \geqslant t_0$, если она начинается в точке $x(t_0, u) = x_0 \in M$. Таким образом, получаем задачу нахождения допустимого управления, при котором множество

$$M = \{(x, s) : x_i \in [0, x_{im}], s_i \in [0, s_{im}], i = \overline{1, n}\}$$

будет инвариантным для системы (1), (2). При этом также возникает задача перевода начальных точек в $M$ за конечное время. Дальнейшее изложение посвящено решению этих задач.

**Замечание 1.** Будем считать, что допустимое управление не только кусочно-постоянно, но принимает лишь граничные значения. Во-первых, такое управление технически проще реализовать, а во-вторых, добавление к граничным значениям точек из интервала $(u_1, u_2)$ не расширит возможностей стабилизации системы, что будет видно из дальнейшего изложения. Таким образом, метод управления обладает свойством релейности, т. е. является управлением типа «bang-bang control».

## Инвариантные множества

В работе [Кириллов, 1994] рассматривалась система типа (1), (2) для случая одного вида микроорганизма и субстрата и, в частности, решалась задача стабилизации положений равновесия. Следует отметить, что требование асимптотической устойчивости отдельных состояний сложной экологической системы излишне жестко и в реальности не осуществимо. Достаточно требовать устойчивость по Лагранжу концентраций субстратов и микроорганизмов. Для природных экологических систем, это впервые отмечено в работе [Свирежев, Логофет, 1978], где исследовалась динамика взаимодействия популяций. Таким образом, приходим к задаче построения инвариантных множеств системы (1), (2).

Следующая лемма 1 дает достаточное условие инвариантности множества $M$.

**Лемма 1.** *Множество*

$M = \{(x, s) : x_i \in [0, x_{im}], s_i \in [0, s_{im}]\}$,

*где* $i = \{1, ..., n\}$, *является инвариантным для системы (1), (2) при достаточно больших значений* $x_{im}, s_{im}$.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно рассмотреть значения знаков $\dot{x}_i, \dot{s}_i$ из системы (1), (2) для конкретного значения $i$ на границах множества (3), откуда получаем утверждение для конкретного значения $i$. Осталось заметить, что $M = M_1 \times ... \times M_n$. $\square$

Пусть $z_i = d_i x_i + s_i$, $D_i = d_i a_{1i} u + b a_{2i}$, $z = z_1 + ... + z_n$, $D = D_1 + ... + D_n$. Рассмотрим систему

$$\dot{z_i} = D_i - (b + u) z_i, \quad i = 1, ..., n. \qquad (4)$$

**Лемма 2.** *Множества*

$M_{iz} = \{(x, s) : z_i = \frac{D_i}{b+u}\}, \forall i \in \{1, ..., n\}$,

$M_z = \{(x, s) : z = \frac{D}{b+u}\}$

*являются инвариантными и асимптотически устойчивыми для системы (4).*

*Доказательство.* Понятие асимптотической устойчивости инвариантных множеств рассматривалось в [Зубов, 1982]. Умножив уравнение (1) на $d_i$ и прибавив его к уравнению (2), получим линейную систему (4), из вида которой следует утверждение леммы для множества $M_{iz}$. Сложив уравнения системы (4), получим уравнение $\dot{z} = D - (b + u)z$, откуда следует утверждение леммы для множества $M_z$. $\square$

Пусть $A(u_j) = (z_1(u_j), ..., z_n(u_j))$ – положение равновесия системы (1), (2), соответствующее управлению $u_j, j = 1, 2$. Рассмотрим параллелепипед

$$P = \{z : z_i \in [c_{1i}, c_{2i}], i = 1, ..., n\} \in R^n,$$

где $c_{1i}, c_{2i}$ – заданные постоянные, $P^0 = \{z : z_i \in (c_{1i}, c_{2i}), i = 1, ..., n\}$ – соответствующий открытый параллелепипед. Пусть $[A(u_1), A(u_2)] = \{z : z = \alpha A(u_1) + (1 - \alpha) A(u_2), \alpha \in [0, 1]\}$ – отрезок в $R^n$, с концами $A(u_1), A(u_2)$, $(A(u_1), A(u_2)) = [A(u_1), A(u_2)] \setminus \{A(u_1, A(u_2)\}$ – внутренность отрезка $[A(u_1), A(u_2)]$. Пусть $R^n_+$ – множество точек $z \in R^n$ с неотрицательными координатами.

**Теорема 1.** *Пусть*

$$P^0 \cap [A(u_1), A(u_2)] = [B_1, B_2],$$

*где* $B_1 \neq B_2, [B_1, B_2] \in (A(u_1), A(u_2))$.

*Тогда любую точку* $z_0 \in R^n_+$ *с помощью допустимого управления можно за конечное время перевести вдоль траекторий системы (4) в параллелепипед* $P$, *который является инвариантным множеством системы (4). При этом отрезок* $[B_1, B_2]$ *будет инвариантным асимптотически устойчивым множеством.*

*Доказательство.* Обозначим $A(u_1) \equiv A_1$, $A(u_2) \equiv A_2$. Для любой начальной точки $z_0$ положим $u = u_1$ (или $u = u_2$) до тех пор, пока траектория, начинающаяся в этой точке, не попадет в достаточно малую окрестность $U(A_1)$ точки $A_1$ (или $A_2$). Последнее очевидно в силу глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия $A_1$ системы (4) [Кириллов, 1994]. Траектории системы (4) – прямые. Действительно, из (4) следует, что

$$z_i(t) = w_{i0} \exp(-(b + u)(t - t_0)) + \frac{D_i}{b + u},$$

где $w_{i0} = z_i(t_0) - \frac{D_i}{b+u}$. Тогда любая траектория является прямой (лучом) $z = w_0 + \mathbf{D}\tau$, где $w_0 = (w_{10}, ..., w_{n0}), \mathbf{D} = (\frac{D_1}{b+u_j}, ..., \frac{D_n}{b+u_j})$, $\tau = \exp(-(b + u_j)(t - t_0))$. Очевидно, отрезок $[A_1, A_2]$ принадлежит траекториям, проходящим через точку $A_1$ при $u = u_2$ и через точку $A_2$ при $u = u_1$, соответственно. Пусть $l$ – прямая, которой принадлежит отрезок $[A_1, A_2]$. Расстояние от точи $z$ до прямой $l$ обозначим через $\rho(z, l) = min||z - y||$, где минимум нормы берется по всем точкам $y \in l$. Рассмотрим цилиндр $\bar{C}(\varepsilon) = \{z : \rho(z, l) \leqslant \varepsilon\}$ с осью $l$. Поскольку отрезок $[A_1, A_2]$ пересекает внутренность $P^0$ параллелепипеда $P$, то цилиндр $\bar{C}(\varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon$ также пересекает $P^0$. Пусть окрестность $U(A_1)$ настолько мала, что $U(A_1) \subset \bar{C}(\varepsilon)$.

После попадания траектории в описанную окрестность $U(A_1)$, что возможно в силу асимптотической устойчивости положения равновесия $A_1$ при $u = u_1$, переключаем управление на значение $u = u_2$. Тогда траектория, оставаясь в цилиндре $\bar{C}(\varepsilon)$, также пересечет $P^0$. Пусть $\hat{P} \equiv \bar{C}(\varepsilon) \cap P$, $\bar{B} \equiv \hat{P} \setminus P^0$. Траектория входит в параллелепипед $P$, точнее в область $\hat{P}$, пересекая ее границу $\bar{B}$. Переключим управление на значение $u = u_1$ в момент выхода траектории из области $\hat{P}$ через границу $\bar{B}$. Далее вторично переключаем управление при попадании траектории на границу $\bar{B}$. Получаем последовательность управлений и соответствующих отрезков траекторий $[R_k, R_{k+1}]$, где $R_k \in \bar{B}$. При этом $[R_k, R_{k+1}] \to [B_1, B_2]$ в том смысле, что $\rho([R_k, R_{k+1}], [B_1, B_2]) \to 0$ при $k \to \infty$, где $\rho([R_k, R_{k+1}], [B_1, B_2]) \equiv min||z-y||$ по всем $z \in [R_k, R_{k+1}]$, $y \in [B_1, B_2]$, $k = 0, 1, 2, ...,$. Действительно, если $z(t, t_0, z_0, u_j) \equiv z(t)$, $\tilde{z}(t, t_0, \tilde{z}_0, u_j) \equiv \tilde{z}(t)$, то

$$\rho([R_k, R_{k+1}], [B_1, B_2])$$
$$\leqslant ||z(t) - \tilde{z}(t)|| = ||z(t_{0k}) - \tilde{z}(t_{0k})||$$
$$\times \exp(-(b + u_j)(t - t_{0k}),$$

где $t \in [t_{0k}, t_{0(k+1)}]$, $t_{0k}$ – момент переключения управления, $z(t, t_0, z_0, u_j)$ – траектория системы (4), соответствующая управлению $u_j$ и удовлетворяющая начальному условию $z(t_0, t_0, z_0, u_j) = z_0$. Таким образом, отрезок $[B_1, B_2]$ – инвариантное асимптотически устойчивое множество системы (4).

□

**Замечание 2.** Как следует из доказательства теоремы 1, конкретный вид функций $f_i(x_i, s_i)$ не влияет на метод стабилизации, поэтому можно сформулировать утверждение, аналогичное теореме 1, но без конкретизации этих функций.

**Замечание 3.** В силу линейности системы (4), несложно получить оценку времени попадания траектории из любой начальной точки в $\hat{P}$.

**Замечание 4.** Построенный алгоритм стабилизации очевидным образом применим в случае, когда концентрации субстратов $a_{2i}$ на входе в очистную систему точно неизвестны, но известны промежутки, которым они принадлежат $a_{2i} \in [a_{2imin}, a_{2imax}]$. Для этого требуется соответствующим образом скорректировать построение цилиндра $\bar{C}(\varepsilon)$. При этом при небольших изменениях полученный результат можно использовать и в случае кусочно-постоянных $a_{2i}$.

**Замечание 5.** В теореме 1 доказана асимптотическая устойчивость множества $[B_1, B_2]$. Это означает, что при соответствующем управлении в системе (4), а вместе с тем и в системе (1), (2), возникает асимптотический периодический устойчивый режим. В работе [Матрос, 1987] исследовался вопрос о повышении эффективности химико-технологических процессов в результате искусственного введения периодических режимов их функционирования. Предложенный метод управления позволяет исследовать этот вопрос для процессов биологической очистки.

## Стабилизация

Вернемся к задаче стабилизации процесса биологической очистки, состоящей в приведении траектории системы (1), (2) за конечное время в область (3). Нижеследующее утверждение дает достаточные условия разрешимости этой задачи.

**Теорема 2.** *Пусть для всех $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2$*

$$a_{1i} - Y_i a_{2i} \neq 0,$$
$$\frac{D_i}{(b + u_j)d_i} \leqslant x_{im}, \quad \frac{D_i}{b + u_j} \leqslant s_{im}.$$

*Тогда для любого начального состояния $(x_0, s_0) \in R_+^{2n}$ через конечное время будут выполняться условия (3).*

*Доказательство.* Рассмотрим какую-либо одну подсистему (1),(2) при конкретном значении $i$, $(x_i, s_i) \in R_+^2$. Если выполняется первое условие теоремы, то две прямые $d_i x_i + s_i = \frac{D_i}{b+u_j}$, соответствующие $j = 1, 2$, не совпадают [Кириллов, 1994]. Второе и третье условия гарантируют, что отрезки обеих прямых, принадлежащие $R_+^2$, принадлежат прямоугольнику $\{(x_i, s_i) : x_i \in [0, x_{im}], s_i \in [0, s_{im}]\}$. Отсюда с использованием теоремы 1 следует заключение теоремы 2. □

**Замечание 6.** Условие теоремы 2 слишком жесткое. Его можно заменить условием, вытекающим из того факта, что траектории системы (4) с течением времени локализуются в сколь угодно малой окрестности отрезка $[B_1, B_2]$.

## Заключение

Получен метод решения задачи стабилизации процесса биологической очистки сточных вод. В его основе лежит приведение траекторий системы в инвариантное множество с помощью кусочно-постоянного управления, принимающего только два граничных значения. При этом структура системы (1), (2) позволяет свести решение задачи стабилизации к ее решению для линейной относительно $z \in R_+^n$ системы (4). Представляется перспективным применение предложенного метода для системы (1), (2) с переменной размерностью, что соответствует переменному видовому составу сообщества микроорганизмов. Соответствующая математическая модель разработана в работе [Кириллов, 2010], где размерность системы зависит от значения управляющего воздействия. Ранее такая зависимость была использована для управления системой «хищник-жертва» [Kirillov, 1997].

## Литература


*Вавилин В. А.* Время оборота биомассы и деструкция биомассы органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 144 с.

*Данилов-Данильян В. И.* Водные ресурсы мира и перспективы водохозяйственного комплекса России. М.: Институт устойчивого развития; Центр экологической политики России, 2009. 88 с.

*Евилевич М. А., Брагинский Л. Н.* Оптимизация биохимической очистки сточных вод. Л.: Стройиздат, 1979. 159 с.

*Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Наука, 1982. 286 с.

*Кириллов А. Н.* Задача стабилизации экологических систем // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1994. № 6. С. 883–892.

*Кириллов А. Н.* Метод динамической декомпозиции в моделировании процесса биологической очистки сточных вод // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. № 4. С. 496–505.

*Матрос Ю. Ш.* Каталитические процессы в нестационарных условиях. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.

*Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

*Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environtmental Technology Letters. 1985. Vol. 6. P. 467–476.

*Chachuat B., Roche N., Latifi M. A.* Reduction of the asm1 model for optimal control of small-size activated sludge treatment plants // Journal of water science. 2003. Vol. 16. P. 5–26.

*Henze M., Grady C., Gujer W. et al.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // Water research. 1987. Vol. 6. P. 505–515.

*Kirillov A. N.* The stabilization problem for certain class of ecological systems // International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering. 1997. Vol. 7. N. 2. P. 247–251.

*Smets I. Y., Hagebart J. V., Carrette R., Van Impe J. F.* Linearization of the activated sludge model ASM1 for fast and reliable predictions // Water research. 2003. Vol. 37. P. 1831–1851.

*Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing complex biological wastewater treatment model // Water science and technology. 1997. Vol. 31. P. 590–606.


## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:


**Кириллов Александр Николаевич**
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

**Kirillov, Alexandr**
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370