

УДК 517.93: 574.34

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

А. В. Ласунский

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Рассмотрено влияние линейной схемы введения пассивных переменных на устойчивость положений равновесия некоторых неавтономных систем дифференциальных уравнений. Полученные признаки устойчивости иллюстрируются на примере неавтономной модели изолированной популяции и модифицированной модели хищник-жертва

$$\dot{x} = \alpha(t)x(1 - yK^{-1}), \quad \dot{y} = \beta(t)y(xL^{-1} - 1).$$

Ключевые слова: пассивные стадии жизнедеятельности, устойчивость положения равновесия, первый метод Ляпунова.

A. V. Lasunsky. METHODS OF INVESTIGATING THE STABILITY OF EQUILIBRIUM POSITIONS IN THE NONAUTONOMOUS SYSTEMS, AND SOME APPLICATIONS THEREOF

We consider the effect of the linear scheme of introduction of passive variables on the stability of the equilibrium of some nonautonomous systems of differential equations. The detected signs of stability are illustrated by the example of a nonautonomous model of an isolated population and a modified predator-prey model.

Key words: passive stages of live, stability of equilibrium position, Liapunov's first method.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения задачи об устойчивости по первому приближению А. М. Ляпуновым [Ляпунов, 1956] был предложен метод характеристических показателей (первый метод Ляпунова). Одной из основных задач первого метода Ляпунова является оценка изменения характеристических (и других показателей) линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$A(t) \in \mathbb{C}[t_0, +\infty), \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| < M \quad (1)$$

при различных возмущениях. В теории линейных систем (1) большую роль играют введенные и изученные А. М. Ляпуновым правильные системы дифференциальных уравнений. Эти системы включают в себя приводимые и почти приводимые системы [Былов, 1962] и играют ведущую роль в теории устойчивости по первому приближению. Определение правильности по Ляпунову дается в терминах

характеристических показателей решений рассматриваемой системы. С практической точки зрения проверка правильности вызывает определенные затруднения, так как характеристические показатели системы в общем случае не известны. Неслучайно получение достаточных признаков правильности системы остается актуальным и в настоящее время. Интерес представляют результаты, которые удается сформулировать в терминах коэффициентов системы. Поведение траекторий в окрестности положений равновесия исследуется проще с помощью теорем об устойчивости и неустойчивости по первому приближению в автономном случае. Система первого приближения в этом случае всегда правильна, а характеристические показатели совпадают с вещественными частями собственных чисел матрицы коэффициентов. Для неавтономных систем применение аналогичных теорем вызывает затруднение в связи с отсутствием общих методов определения характеристических чисел системы первого приближения, а также установления правильности этой системы. Если мы обратимся к моделированию динамики численности биологических популяций, то ясно, что в реальных биологических сообществах коэффициенты рождаемости и смертности не постоянны. Интерес представляет случай периодического изменения мальтузианских коэффициентов, что соответствует сезонным изменениям в природе. В результате эволюции возникают различные биологические механизмы адаптации, которые позволяют повысить живучесть данного вида. Одним из таких процессов является способность биологических особей, как простейших, так и высокоразвитых переходить из активного состояния в пассивное при наступлении неблагоприятных условий (смена времени года, резкое уменьшение рациона питания и т. д.). Простейшая формализация этого явления может быть осуществлена введением пассивных переменных в математическую модель динамики численности биологических популяций. Взаимодействие активное состояние – пассивное состояние и наоборот можно смоделировать с помощью линейной надстройки к исходной нелинейной модели популяции. В работе [Ильичев, 1992] для автономных непрерывных моделей рассмотрена линейная схема описания механизма образования пассивных стадий (ПС-механизм), проведено исследование устойчивости положений равновесия изолированной и взаимодействующих популяций (конкуренция, хищничество и т. д.) с учетом данного фактора. Разумеется,

переход к пассивным стадиям жизнедеятельности – это сложный биологический процесс. Линейная надстройка с постоянными коэффициентами к исходной нелинейной модели динамики популяции является одной из попыток формализовать этот процесс. В настоящей работе получены признаки устойчивости положений равновесия неавтономных систем и рассмотрены их приложения с точки зрения влияния линейной схемы введения пассивных стадий жизнедеятельности на устойчивость положений равновесия некоторых неавтономных моделей биологических сообществ.

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ПОПУЛЯЦИИ И ПАССИВНЫЕ СТАДИИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Пусть численность изолированной популяции $x(t)$ некоторого биологического вида описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2)$$

Следуя работе [Ильичев, 1992], предположим, что данные организмы наряду с активным состоянием обладают еще и пассивным состоянием, находясь в котором они развиваются и не испытывают влияния других особей. Также предположим, что этот переход обладает свойством линейности. Модель (2) преобразуется к виду

$$\dot{x} = f(t, x) - qx + ps, \quad \dot{s} = qx - ps. \quad (3)$$

Здесь через $s(t)$ обозначена часть популяции, находящаяся в пассивном состоянии; p, q – положительные параметры, характеризующие переходы $s \rightarrow x$ и $x \rightarrow s$ соответственно. Отметим, что если x_0 – положение равновесия модели (2), то (x_0, s_0) – положение равновесия модели (3), где $s_0 = qp^{-1}x_0$. Обозначим $\partial f(t, x_0)/\partial x = \lambda(t)$. Это коэффициент перед $x - x_0$ в разложении $f(t, x)$ в ряд Тейлора. Какой экологический смысл имеет этот коэффициент? Одной из основных моделей роста популяций изолированных видов является логистическое уравнение [Coleman, 1979],

$$\dot{x} = r(t)x(t)(1 - x(t)K^{-1}(t)), \quad t \geq 0,$$

где $r(t)$ и $K(t)$ – положительные функции на $[0; +\infty)$. Коэффициент $r(t)$ характеризует скорость роста (размножения) популяции. Если $K(t) = K$, то логистическое уравнение имеет положительное положение равновесия $x_0 = K$. Для этого уравнения $\partial f(t, K)/\partial x = -r(t)$. Ясно, что коэффициент $\lambda(t)$ связан с мальтузианским коэффициентом роста популяции.

Исследуем положение равновесия (x_0, s_0) системы (3) на устойчивость с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [Демидович, 1967]. Система первого

приближения для (3) в окрестности положения равновесия (x_0, s_0) имеет вид

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \lambda(t) - q & p \\ q & -p \end{pmatrix} u = A(t)u. \quad (4)$$

Если существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda_0$, то система (4) почти приводима, а значит правильна [Адрианова, 1992]. Правильность системы (4) в этом случае можно проверить и по определению. Если $\lambda_0 < 0$, то характеристические показатели предельной системы $\dot{u} = A_0 u$ отрицательны, так как совпадают с действительными частями корней характеристического уравнения [Былов и др., 1966] $z^2 + (p + q - \lambda_0)z - p\lambda_0 = 0$. Если $\lambda_0 > 0$, то среди характеристических показателей предельной системы есть положительный и можно применить теорему Четаева о неустойчивости по первому приближению [Четаев, 1946]. Автономные линейные системы имеют устойчивые характеристические показатели [Адрианова, 1992]. Так как характеристические показатели линейной системы в случае их устойчивости инвариантны относительно бесконечно малых линейных возмущений [Адрианова, 1992], то убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 1. Если существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda_0$ и $\lambda_0 < 0$, то положение равновесия (x_0, s_0) системы (3) асимптотически устойчиво при любых положительных p и q .

Иными словами, введение ПС-механизма в модель (2) сохраняет асимптотическую устойчивость соответствующего положения равновесия.

Теорема 2. Если существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda_0$ и $\lambda_0 > 0$, то положение равновесия (x_0, s_0) системы (3) неустойчиво при любых положительных p и q .

Таким образом, неустойчивость положения равновесия неустраима за счет введения линейной модели ПС-механизма.

Применение метода вариации произвольных постоянных и неравенства Гронуолла-Беллмана позволяет убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть система (4) правильна и $\lambda(t) = \lambda_0 + \varepsilon(t)$. Если $\lambda_0 < 0$ и верхнее интегральное среднее функции $|\varepsilon(t)|$ достаточно мало, то положение равновесия (x_0, s_0) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Теорема 1 является частным случаем теоремы 3. Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то система (4) правильна, а интегральное среднее функции $|\varepsilon(t)|$ равно нулю.

Доказательство. Собственные числа матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 - q & p \\ q & -p \end{pmatrix},$$

$\lambda_0 < 0$, $p > 0$, $q > 0$ – различные отрицательные числа. Воспользуемся оценкой матричной экспоненты

$\|\exp A_0(t - \tau)\| \leq \|S\| \|S^{-1}\| \|\exp(J(t - \tau))\| \leq M \exp \Lambda(t - \tau)$, $t \geq \tau$, где в данном случае $\Lambda < 0$ – наибольшее собственное число матрицы A_0 [Адрианова, 1992]. Здесь S – матрица преобразования A_0 к канонической форме Жордана J , которая в нашем случае диагональная. Разумеется, значение постоянной M зависит от выбора матричной нормы. Систему (4) запишем в виде $\dot{u} = A_0 u + B(t)u$, где $B(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. По методу вариации для любого решения этой системы имеем

$$u(t) = \exp(A_0(t - t_0))u(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(A_0(t - \tau))B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq M \exp(\Lambda(t - t_0))\|u(t_0)\| \\ &+ \int_{t_0}^t M \exp(\Lambda(t - \tau))|\varepsilon(\tau)| \|u(\tau)\|d\tau, \\ \|u(t)\| \exp(-\Lambda t) &\leq M \exp(-\Lambda t_0)\|u(t_0)\| \\ &+ \int_{t_0}^t M \exp(-\Lambda\tau)|\varepsilon(\tau)| \|u(\tau)\|d\tau. \end{aligned}$$

По лемме Гронуолла-Беллмана [Адрианова, 1992] имеем

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \exp(-\Lambda t) &\leq M \exp(-\Lambda t_0)\|u(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t M|\varepsilon(\tau)|d\tau. \end{aligned}$$

Для характеристического показателя любого решения $u(t)$ системы (4) справедлива оценка

$$\chi[u(t)] \leq \Lambda + M \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_{t_0}^t |\varepsilon(\tau)| d\tau.$$

Так как $\Lambda < 0$, то при достаточно малом верхнем интегральном среднем функции $|\varepsilon(t)|$ показатели системы (4) отрицательны. В

частности, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_{t_0}^t |\varepsilon(\tau)| d\tau = 0$, то $\chi[u(t)] \leq \Lambda < 0$.

Посмотрим, какие достаточные условия отрицательности характеристических показателей дает применение метода замораживания [Адрианова, 1992] к системе (4). Воспользуемся следующей леммой из работы [Ласунский, 2009].

Лемма 1. Пусть матрица коэффициентов $A(t)$ системы (1) второго порядка такова, что

$$\det A(t) \geq \gamma_1 > 0, \quad \text{Sp } A(t) \leq -\gamma_2 < 0,$$

$$\|A(t_2) - A(t_1)\| \leq \delta |t_2 - t_1|$$

с достаточно малой постоянной Липшица δ , тогда характеристические показатели этой системы отрицательны.

Применительно к системе (4) приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть система (4) правильна, $-M \leq \lambda(t) \leq -\varepsilon < 0$ и дополнительно функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной Липшица, тогда положение равновесия (x_0, s_0) системы (3) асимптотически устойчиво.

Дадим экологическую интерпретацию полученных выше результатов. Насколько реальны для жизнедеятельности популяций условия предыдущих теорем. Условие $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda_0$ теорем 1 и 2 означает, что мальтузианские коэффициенты с течением времени стабилизируются. В теоремах 3 и 4 требуется правильность линейной системы. Так как линейные системы с периодической матрицей коэффициентов правильны, то это условие заведомо выполняется для случая периодического мальтузианского коэффициента $\lambda(t)$, что соответствует сезонным изменениям в природе. На первый взгляд может показаться (см. условия теоремы 4), что если функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной Липшица, то эта функция близка к постоянной функции. Это не так. Периодическая функция $\lambda(t) = -2 + \sin(\delta t)$ отделена от нуля и из теоремы Лагранжа следует, что она удовлетворяет условию Липшица с постоянной δ .

В заключение этого раздела отметим, что по коэффициентному критерию [Изобов, 1972] система (4) интегрально разделена, а следовательно, характеристические показатели этой

системы различны и устойчивы [Былов, 1965]. Необходимым условием правильности системы (4) является существование строгого интегрального среднего у функции $\lambda(t)$ [Демидович, 1967].

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОПУЛЯЦИИ И ПАССИВНЫЕ СТАДИИ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Действие ПС-механизма в случае двух популяций более сложно, чем в случае изолированной популяции. Даже в автономном случае ПС-механизм может «испортить» устойчивую динамику взаимодействующих популяций. Устойчивая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } A < 0, \quad \det A > 0$$

при расширении $B = \begin{pmatrix} a_{11} - q & a_{12} & p \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ q & 0 & -p \end{pmatrix}$ с параметрами $p, q > 0$ может стать неустойчивой. Действительно, характеристический многочлен для матрицы B имеет вид

$$\lambda^3 + (p + q - \text{Sp } A)\lambda^2$$

$$+ (\det A - p \text{Sp } A - qa_{22})\lambda + p \det A = 0.$$

Нетрудно найти элементы матрицы A и значения параметров p и q , для которых $\det A - p \text{Sp } A - qa_{22} < 0$. Например, можно взять $p = q = 0,5$, $a_{11} = -18$, $a_{12} = 24$, $a_{21} = 13$, $a_{22} = 17$. Так как не все коэффициенты характеристического многочлена для матрицы B одного знака, то матрица B неустойчива.

Рассмотрим действие ПС-механизма на примере модели хищник-жертва вида

$$\dot{x} = \alpha(t)x(1 - yK^{-1}), \quad \dot{y} = \beta(t)y(xL^{-1} - 1). \quad (5)$$

Модель отличается от классической модели Вольтерры [Свирежев, Логофет, 1978] тем, что мальтузианские коэффициенты $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ зависят от времени. Эта система исследована в работе [Ласунский, 2008]. Для нетривиального положения равновесия (L, K) теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению не применима, так как среди характеристических показателей решений системы первого приближения есть хотя бы один неотрицательный, что вытекает из неравенства Ляпунова для суммы характеристических показателей.

Если отношение мальтузианских коэффициентов $\alpha(t)/\beta(t) = m$ постоянно, то нетривиальное положение равновесия системы (5) можно исследовать на устойчивость вторым (прямым) методом Ляпунова. Заменой $x - L =$

$u, y - K = v$ переведем положение равновесия в начало координат для системы

$$\dot{u} = -m\beta(t)(u+L)vK^{-1}, \quad \dot{v} = \beta(t)(v+K)uL^{-1}.$$

Можно убедиться, что функция $F(u, v) = (u + L)(v + K)^m \exp(-uL^{-1} - mvK^{-1})$ является интегралом этой системы. Рассмотрим функцию $V(u, v) = F(u, v) - F(0, 0)$. Ясно, что $V(0, 0) = 0$. Производная от этой функции в силу системы тождественно равна нулю. Функция V отрицательно определена в некоторой окрестности начала координат, что следует из вида первых членов разложения функции V в ряд Тейлора в окрестности $(0; 0)$: $V(u, v) = -0,5K^mL^{-1}u^2 - 0,5mLK^{m-2}v^2 + \dots$ Положение равновесия (L, K) системы (5) устойчиво по Ляпунову [Меркин, 1976]. Отметим, что если интеграл $\int_0^t \alpha(u) du$ неограничен, то тривиальное положение равновесия неустойчиво, так как при y , тождественно равно нулю, мы имеем неограниченный рост x .

Исследуем введение ПС-механизма у жертв x и хищников y на характер положений равновесия. Введение ПС-механизма для популяции жертв в модели (5) приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)x(1 - yK^{-1}) - qx + ps, \\ \dot{y} = \beta(t)y(xL^{-1} - 1), \\ \dot{s} = qx - ps. \end{cases} \quad (6)$$

В случае постоянных коэффициентов α и β классическая модель Вольтерры хищник-жертва (5) имеет устойчивое (типа центр) положение равновесия (L, K) . Введение ПС-механизма позволяет положение равновесия сделать асимптотически устойчивым. Отметим, что В. Г. Ильичевым рассматривалась задача о возможности стабилизации неустойчивой динамики взаимодействующих популяций в автономном случае при подходящем выборе параметров p и q в ПС-механизме.

Теорема 5. Если существуют положительные пределы $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \alpha$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = \beta$, то нетривиальное положение равновесия $(L, K, qp^{-1}L)$ системы (6) асимптотически устойчиво при любых положительных p и q , тривиальное же положение равновесия неустойчиво при любых положительных p и q .

Доказательство. Система первого приближения $\dot{u} = A(t)u$ в окрестности нетривиального положения равновесия имеет вид

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} -q & -LK^{-1}\alpha(t) & p \\ KL^{-1}\beta(t) & 0 & 0 \\ q & 0 & -p \end{pmatrix} u. \quad (7)$$

Обозначим $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = A_0$. Матрица A_0 имеет следующее характеристическое уравнение $\lambda^3 + (p + q)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda + p\alpha\beta = 0$. Применение критерия Гурвица приводит к системе неравенств $p + q > 0$, $q\alpha\beta > 0$, $p\alpha\beta > 0$, следовательно, характеристические показатели предельной системы $\dot{u} = A_0u$ отрицательны. Система (7) почти приводима, а значит, правильна [Адрианова, 1992]. Показатели Ляпунова в случае их устойчивости инвариантны относительно линейных возмущений, стремящихся к нулю на $+\infty$, поэтому показатели системы (7) совпадают с отрицательными показателями предельной системы. По теореме Ляпунова положение равновесия асимптотически устойчиво.

Для тривиального положения равновесия системы (7) система первого приближения имеет вид

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} \alpha(t) - q & 0 & p \\ 0 & -\beta(t) & 0 \\ q & 0 & -p \end{pmatrix} u. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов этой системы следующее

$$(\lambda + \beta(t))(\lambda^2 + (p + q - \alpha(t))\lambda - p\alpha(t)) = 0.$$

Если функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ имеют положительные пределы при $t \rightarrow +\infty$, то система (8) правильна, причем среди ее характеристических показателей, которые совпадают с характеристическими показателями предельной системы, есть положительный показатель. По теореме Четаева тривиальное положение равновесия системы (6) неустойчиво при любых положительных p и q .

Теорема 6. Пусть система (7) правильна, коэффициенты $\alpha(t), \beta(t) \in [\varepsilon, M]$, $\varepsilon > 0$ и удовлетворяют условию Липшица с достаточно малой постоянной Липшица, тогда нетривиальное положение равновесия системы (6) асимптотически устойчиво при любых положительных p и q .

Доказательство. Для применения теоремы Ляпунова нужно убедиться, что характеристические показатели системы (7) отрицательны. Для этого воспользуемся оценкой сверху характеристических показателей, которую можно получить с помощью метода замораживания. Сначала убедимся, что величина $\gamma = \sup_{t \in R_+} \max_n \operatorname{Re} \lambda_n(t)$ отрицательна, где $\lambda_n(t)$, $n = 1, 2, 3$ – собственные числа матрицы $A(t)$. Характеристическое уравнение для матрицы $A(t)$ имеет вид

$$\lambda^3 + (p + q)\lambda^2 + \alpha(t)\beta(t)\lambda + p\alpha(t)\beta(t) = 0. \quad (9)$$

Из критерия Гурвица следует, что положительность $p, q, \alpha(t), \beta(t)$ влечет отрицательность вещественных частей собственных чисел матрицы $A(t)$ для всех $t \geq 0$, откуда следует лишь, что $\gamma \leq 0$. Но в случае $\gamma = 0$ оценка метода замораживания не проходит. Покажем, что если положительные функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ ограничены и отделены от нуля, то $\operatorname{Re} \lambda_n(t) \leq -\varepsilon < 0$, $n = 1, 2, 3$, а следовательно, $\gamma < 0$.

Из ограниченности коэффициентов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ следует ограниченность модуля любого корня $\lambda(t)$ уравнения (9). Так как свободный член уравнения (9) отделен от нуля и все его корни ограничены, то модуль любого корня отделен от нуля. Если все корни уравнения (9) действительны, то они отрицательны по критерию Гурвица и отделены от нуля. Рассмотрим случай $\lambda_1(t) \in \mathbb{R}$, $\lambda_{2,3}(t) = \sigma(t) \pm i\omega(t)$. Модули корней отделены от нуля, поэтому $\lambda_1(t) \leq -\varepsilon < 0$. Покажем, что $\sigma(t) \leq -\varepsilon < 0$. С одной стороны, верхний угловой минор второго порядка матрицы Гурвица для многочлена (9) равен

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+q & p\alpha(t)\beta(t) \\ 1 & \alpha(t)\beta(t) \end{vmatrix} = q\alpha(t)\beta(t)$$

и, следовательно, положителен и отделен от нуля. С другой стороны, выражая коэффициенты многочлена (9) через его корни $\lambda_1(t)$ и $\lambda_{2,3} = \sigma \pm i\omega$, для определителя Δ_2 получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -\lambda_1 - 2\sigma & -\lambda_1(\sigma^2 + \omega^2) \\ 1 & 2\sigma\lambda_1 + \sigma^2 + \omega^2 \end{vmatrix} \\ &= -2\sigma((\lambda_1 + \sigma)^2 + \omega^2) \geq \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Так как сомножитель $(\lambda_1 + \sigma)^2 + \omega^2$ ограничен, то функция $\sigma(t)$ отрицательна и отделена от нуля. Итак, постоянная $\gamma < 0$. Так как функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют условию Липшица с достаточно малой постоянной Липшица, то $\|A(t_2) - A(t_1)\| \leq \delta|t_2 - t_1|$ с достаточно малой постоянной $\delta > 0$. Из метода замораживания следует, что для характеристического показателя χ любого нетривиального решения системы (7) справедлива оценка $\chi \leq \gamma + C\delta^{1/3}$, где C – некоторая постоянная. Если постоянная δ достаточно мала, то $\chi < 0$ и нетривиальное положение равновесия системы (6) асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова для неавтономных систем.

Введение ПС – механизма для популяции хищников в модели (5) приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)x(1 - yK^{-1}), \\ \dot{y} = \beta(t)y(xL^{-1} - 1) - qy + ps, \\ \dot{s} = qy - ps, \end{cases} \quad (10)$$

которая имеет нетривиальное положение равновесия $(L, K, qp^{-1}K)$. Нетрудно проверить, что характеристическое уравнение для матрицы системы первого приближения в окрестности этого положения равновесия совпадает с уравнением (9). Для тривиального положения равновесия системы (10) соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - \alpha(t))(\lambda^2 + (p + q + \beta(t))\lambda + p\beta(t)) = 0$. Ясно, что справедливы утверждения, аналогичные теоремам 5 и 6 при линейной схеме перехода в пассивные стадии для популяции хищников. Условиям теорем 5 и 6 с экологической точки зрения можно придать интерпретацию, которая была дана для условий предыдущих теорем.

ЛИТЕРАТУРА

- Адрианова Л. Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1992. 240 с.
- Былов Б. Ф.* Почти приводимые системы дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 3. С. 333–359.
- Былов Б. Ф.* О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Мат. сб. 1965. Т. 67, № 3. С. 338–344.
- Былов Б. Ф. и др.* Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
- Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
- Изобов Н. А.* Коэффициентный признак устойчивости показателей Ляпунова двумерной линейной системы // Укр. мат. журн. 1972. Т. 24, № 3. С. 306–315.
- Ильичев В. Г.* Пассивные стадии – стабилизирующий фактор в динамических системах (на примере экологических систем) // Автоматика и телемеханика. 1992. № 12. С. 88–95.
- Ласунский А. В.* Устойчивость стационарных состояний некоторых популяционных моделей с переменными коэффициентами // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 5. С. 69–77.
- Ласунский А. В.* Состояния равновесия неавтономной модели Лотки-Вольтерры при наличии убежища для жертвы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 445–448.
- Ляпунов А. М.* Собр. соч. в 6 томах. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.
- Мержин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
- Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
- Coleman B. D.* Nonautonomous logistic equations as models of the adjustment of populations to environmental changes // Mathematical Biosciences. 1979. Vol. 45. P. 159–173.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ласунский Александр Васильевич
доцент кафедры высшей математики
Новгородский государственный университет имени
Ярослава Мудрого
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Нов-
город, Россия, 173003
эл. почта: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
lasunskim@mail.ru
тел.: (8162) 629 968

Lasunsky, Alexandr
Novgorod State University
41, B.Saint Petersburgskaya St., 173003, Veliky Novgorod,
Russia
e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru lasunskim@mail.ru
tel.: (8162) 629 968