Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2011. С. 86–96

*УДК 519.2*

# О ТИПИЧНОЙ СТРУКТУРЕ КОНФИГУРАЦИОННОГО ИНТЕРНЕТ-ГРАФА С ИЗВЕСТНЫМ ЧИСЛОМ СВЯЗЕЙ

**Ю. Л. Павлов**

*Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Рассматривается конфигурационная модель случайного графа с $N$ вершинами. Степени вершин выбираются независимо из степенного закона распределения с показателем $\tau \in (1, 2)$ при условии, что сумма степеней вершин равна $n$. Показано, что если $N, n \to \infty$ так, что $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$, где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана, то предельная структура графа не отличается от типичной структуры случайного графа без условия на сумму степеней.

Ключевые слова: случайные графы, Интернет, конфигурационная модель, случайная структура.

## Yu. L. Pavlov. ON THE TYPICAL STRUCTURE OF CONFIGURATION INTERNET GRAPH WITH KNOWN NUMBER OF LINKS

We consider the configuration model of random graph consisting of $N$ vertices. The degrees of vertices are drawn independently from power-law distribution with the exponent $\tau \in (1, 2)$ under the condition that the sum of vertex degree is equal to $n$. We show that if $N, n \to \infty$ in such a way that $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$, where $\zeta(x)$ is the Rimann‘s zeta-function, then the limit structure of the graph is the same typical structure as the random graph without the condition on the sum of degrees.

Key words: random graph, Internet, configuration model, random structure.

## Введение

За последние 10–15 лет специалисты по случайным графам уделяют значительное внимание разработке моделей сложных телекоммуникационных и социальных сетей, в частности, сети Интернет (см. например, [Durrett, 2007]). В настоящей работе мы рассмотрим одну из наиболее известных таких моделей, получившую название конфигурационной модели со случайными степенями (см. [Reittu, Norros, 2004; Durrett, 2007; Hofstad, 2011]). Пусть граф содержит $N$ вершин, занумерованных числами от 1 до $N$. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \ldots, \eta_N$ такими, что

$$\mathsf{P}\{\eta_1 \geqslant k\} = k^{-\tau}, \tag{1}$$

где $\tau$ – положительный параметр. Если сумма $\nu_N = \eta_1 + \cdots + \eta_N$ нечетна, то в граф вводится дополнительная вершина с единичной степенью. Формирование графа происходит в два этапа. На первом этапе определяются степени вершин в соответствии с распределением (1), при этом считается, что из вершин выходят «полуребра» [Reittu, Norros, 2004], т. е. ребра, для которых смежные вершины еще не определены (все полуребра графа различны). На втором этапе полуребра соединяются равновероятно для образования ребер.

В ряде работ (см. [Faloutsos et al., 1999; Reittu, Norros, 2004; Durrett, 2007]) показано, что типичные для многих реальных сетей значения параметра $\tau$ распределения (1) принадлежат интервалу (1,2). Поскольку такие значения характерны и для сети Интернет, соответствующие графы иногда называются графами Интернет-типа или Интернет-графами.

Предельное поведение структуры и различных числовых характеристик Интернет-графов изучалось во многих публикациях (см. [Reittu, Norros, 2004; Durrett, 2007] и ссылки в них). Обнаружено, что граф имеет единственную гигантскую компоненту связности, число вершины которой пропорционально $N$, а объемы других компонент бесконечно малы по сравнению с $N$. Найдена асимптотика математического ожидания объема гигантской компоненты и получена оценка сверху ее диаметра. Предельное распределение объема гигантской компоненты получено в [Павлов, 2007].

В графах Интернет-типа сумма степеней вершин $\nu_N$ является случайной величиной. Однако представляют интерес и условные графы такого вида при условии, что величина $\nu_N$ известна и равна $n$. Такие графы полезны для моделирования сетей, в которых число связей можно оценить. Кроме того, результаты об условных графах можно использовать для нахождения предельных распределений числовых характеристик Интернет-графов без ограничений на $\nu_N$ путем усреднения условных распределений этих характеристик по распределению общего числа ребер графа. Изучение свойств условных случайных графов Интернет-типа начато в статьях [Павлов, Чеплюкова, 2008; Павлов, 2009]. Основным методом исследования в этих работах была обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и подробно изученная В. Ф. Колчиным (см., например, [Колчин,, 2000]).

Согласно (1),

$$p_k = \mathsf{P}\{\eta_1 = k\} = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau},\ k = 1, 2, ... \qquad (2)$$

Отсюда следует, как легко видеть, что

$$\mathsf{E}\,\eta_1 = \zeta(\tau), \qquad (3)$$

где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке $\tau$. Поэтому при изучении динамики структуры Интернет-графов типичным является случай $N, n \to \infty$ так, что $N/n \to \zeta(\tau)$. Естественно ожидать, что в этом случае конфигурация условного графа асимптотически эквивалентна структуре графа без ограничений на сумму $\nu_N$ и представляет интерес вопрос о том, при каких значениях $n$ такая ситуация сохраняется. В данной статье показано, что это имеет место при условии $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$. По-видимому, такое утверждение сохраняет силу и в более широкой зоне изменения параметров, однако этот вопрос требует дальнейшего исследования. Идеи, на которых основаны приведенные ниже результаты, близки к изложенным в работе [Reittu, Norros, 2004], однако необходимость учета условия $\nu_N = n$ потребовала изменения техники доказательств. Это стало возможным после получения предельных распределений максимальной степени и числа вершин заданной степени в условных Интернет-графах [Павлов, Чеплюкова, 2008; Павлов, 2009].

## Основной результат

Введем следующее распределение

$$q_k = (k+1)p_{k+1}\zeta^{-1}(\tau), \quad k = 0, 1, 2, ... \qquad (4)$$

Пусть $\varphi(z)$ и $F(z)$ означают производящие функции распределений (2) и (4) соответственно, следовательно,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad F(z) = \sum_{k=0} q_k z^k \qquad (5)$$

Обозначим также:

$$\alpha = \left[\frac{\ln\ln N}{-\ln(\tau-1)}\right],\ \beta = \left[\exp\left\{\frac{2w}{2-\tau}\right\}\right], \qquad (6)$$

где $[x]$ означает целую часть числа $x$, а $w = w(N)$ – медленно растущая функция [Ибрагимов, Линник, 1965], такая, что $w > 0$ и

$$w = o(\ln\ln\ln N), \quad \ln\ln\ln N = o(w). \qquad (7)$$

Обозначим $A_N$ некоторое событие, зависящее от $N$. Будем говорить, что событие $A_N$ *асимптотически достоверно* (а. д.), если $\mathsf{P}\{A_N\} \to 1$ при $N \to \infty$. Автор выражает благодарность А. М. Зубкову за обсуждение этого определения.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$. Тогда граф содержит компоненту связности объема $V$, для которой*

*$\mathsf{E}\,V/N \to 1-\varphi(q)$, где $q$ – вероятность вырождения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с распределением (4) числа прямых потомков каждой частицы. Диаметр этой компоненты а.д. не превосходит $2(\alpha+\beta)$.*

Ниже приводятся леммы 1–6, с помощью которых в конце статьи будет доказана сформулированная теорема.

Далее будем использовать символ $j$ (с индексом или без) для обозначения вершин графа. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, также будем обозначать номера вершин, отождествляя их с соответствующими вершинами.

## Связь между подмножествами вершин

Пусть $j$ – произвольная вершина графа, имеющая степень $d = d(N,n)$. Рассмотрим некоторое множество вершин $W$, сумма степеней которых равна $D = D(N,n)$. Пусть $j \notin W,\ d \leqslant D$. Обозначим $A$ событие, состоящее в том, что вершина $j$ соединена ребром с какой-нибудь вершиной множества $W$.

**Лемма 1.** *Пусть $N,n \to \infty$ $n-\zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

*1. Если $dD/n \to \infty$, то $\mathsf{P}\{A\} \to 1$.*

*2. Если $dD/n \to 0$, то $\mathsf{P}\{A\} \to 0$.*

*Доказательство.* Мы используем идею доказательства леммы 3.8 статьи [Reittu, Norros, 2004]. Пусть выполнено условие 1. Нетрудно видеть, что из множества $d$ ребер, выходящих из вершины $j$, можно выбрать подмножество из $d'$ ребер, удовлетворяющую в условиях леммы следующим соотношениям:

$$d' \leqslant d, \quad d'D/n \to \infty, \quad d'^2/n \to 0. \qquad (8)$$

Обозначим $A_1$ событие, состоящее в том, что все $d'$ ребер не идут в $W$ и не образуют петель, а через $A_2$ событие, состоящее в наличии петель, образованных какими-то из $d'$ ребер. Нетрудно видеть, что

$$\mathsf{P}\{\bar{A}\} \leqslant \mathsf{P}\{A_1\} + P\{A_2\} \leqslant$$

$$\frac{(n-d'-D)(n-d'-D-1)...(n-2d'-D+1)}{(n-1)(n-3)...(n-2d'+1)}$$

$$+1-\frac{(n-d')(n-d'-1)...(n-2d'+1)}{(n-1)(n-3)\dots(n-2d'+1)} <$$

$$\left(\frac{n-d'-D}{n-2d'+1}\right)^{d'} + 1 - \left(\frac{n-2d'+1}{n-1}\right)^{d'} = O\left(\frac{d'^2}{n}\right).$$

Отсюда и из (8) следует первое утверждение. Второе доказывается аналогично:

$$\mathsf{P}\{\bar{A}\} =$$

$$\frac{(n-d-D)(n-d-D-1)...(n-2d-D+1)}{(n-1)(n-3)...(n-2d+1)}$$

$$> \left(\frac{n-2d-D+1}{n-2d+1}\right)^{d} \to 1.$$

□

## Алгоритм построения графа

Рассмотрим один из возможных алгоритмов построения графа на втором этапе его формирования. Заметим, что для безусловных графов аналогичный алгоритм описан в [Reittu, Norros, 2004] (см. также [Павлов, 2007]). Идея алгоритма следующая. Граф строится с начальной вершины, например, с вершины 1. Далее для всех полуребер начальной вершины по очереди и равновероятно ищутся пары и, таким образом, образуются ребра, инцидентные первой вершине. Вершины, соединенные ребром с начальной (и не совпадающие с ней), называются вершинами первого поколения. Далее для всех свободных полуребер вершин первого поколения опять последовательно и равновероятно ищутся пары и образуются новые ребра. В результате вершины, соединенные путями длины 2 с начальной вершиной, образуют второе поколение. Этот процесс продолжается до тех пор, пока у вершин очередного поколения не окажется свободных полуребер. Обозначим $Z_t$ число вершин $t$-го поколения, $t = 0,1,2,\ldots$. Очевидно, что $Z_0 = 1$. Если $Z_t = 0$, а построенный граф еще не содержит все $N$ вершин, то завершено построение только одной компоненты связности и для продолжения формирования графа среди всех не рассмотренных вершин выбирается вершина с наименьшим номером в качестве начальной для построения следующей компоненты связности, и далее процедура осуществляется аналогично. Повторив, если нужно, эти действия несколько раз до исчерпания всех $N$ вершин, мы построим одну из возможных реализаций графа. Нетрудно видеть, что любая такая реализация возникает с вероятностью, равной соответствующей величине, индуцируемой вероятностным пространством, заданным на множестве рассматриваемых графов. Ниже приведем алгоритм построения одной компоненты связности. По ходу работы этого алгоритма составляется последовательность номеров вершин, которые одна за другой присоединяются к графу по мере образования ребер: $j_1, j_2, ..., j_s$, где $j_1$ – номер начальной частицы, $j_2$ – номер первой вершины, соединенной ребром с $j_1$, а $j_s$ – номер последней вершины последнего поколения данной компоненты связности. Процесс образования такой последовательности номеров подобен естественной нумерации частиц в ветвящихся процессах Гальтона – Ватсона (так называемая «история семейств», см. [Ватутин, 1993]). Отличие состоит в том, что номера частиц процесса не повторяются, а в последовательности $j_1, j_2, ..., j_s$ номера повторяться могут в силу возможности образования петель, циклов и кратных ребер.

В тексте алгоритма мы будем рассматривать вершины как $N$ различных ящиков, содержащих, соответственно, $k_1, ..., k_N$ различных шаров ($k_1 + ... + k_N = n$). Понятно, что эти шары обозначают полуребра вершин. Удаление двух шаров подряд подразумевает образование очередного ребра графа путем соединения соответствующих полуребер. В этом алгоритме $U$ означает последовательность номеров присоединяемых вершин.

Алгоритм

1. $U := \{j_1\}, \quad i = 1, \; k = 2.$
2. Удаляется первый шар из ящика $j_i$.
3. Выбирается равновероятно шар из оставшихся и удаляется, номер его ящика обозначается $j_k$.
4. $U := U \cup \{j_k\}$.
5. $k = k + 1$.
6. Если в $j_i$ есть еще шары, то переход на шаг 2.
7. $i = i + 1$.
8. Если в ящиках из $U$ есть еще шары, то переход на шаг 6.
9. Стоп.

## Древовидность компоненты связности

Далее мы покажем, что если $N, n \to \infty$, то при больших $t$ (и даже при $t \to \infty$, если это стремление происходит достаточно медленно) построенный по приведенному алгоритму подграф до поколения $t$ включительно является деревом, степени вершин которого сравнительно невелики. Следующие леммы 2 и 3 являются развитием соответствующих результатов работ [Reittu, Norros, 2004] и [Павлов, 2007]. Обозначим $A_t = A_t(h)$, $t = 0, 1, ...$, событие, состоящее в том, что такой подграф является деревом и в нем нет вершин, степень которых больше или равна $h$, где $h = h(N)$ – медленно растущая функция такая, что $h = O(\ln N)$.

**Лемма 2.** *Пусть* $N, n \to \infty$ *так, что* $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$, $t = o(\ln\ln h)$. *Тогда* $\mathsf{P}\{A_t\} = 1 + O(h^{-(\tau-1)^t})$.

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что

$$\mathsf{P}\{A_0\} = \mathsf{P}\{\eta_1 < h | \nu_N = n\}$$
$$= 1 - (\mathsf{P}\{\nu_N = n\})^{-1} \sum_{k \geqslant h} p_k \, \mathsf{P}\{\nu_{N-1} = n - k\}. \tag{9}$$

Согласно лемме 3 из [Павлов, 2007] при $N \to \infty$

$$\sup_k |N^{1/\tau}\, \mathsf{P}\{\nu_N = k\} - f((k - N\zeta(\tau))/N^{1/\tau})| \to 0, \tag{10}$$

где $f(x)$ – плотность устойчивого распределения с показателем $\tau$ и характеристической функцией

$$\exp\left\{\frac{\Gamma(2-\tau)}{\tau - 1}|t|^\tau \left(1 + i\frac{t}{|t|} tg\frac{\pi\tau}{2}\right)\cos\frac{\pi\tau}{2}\right\}.$$

Учитывая одновершинность устойчивых распределений [Ибрагимов, Линник, 1965] и (1), из (9) находим, что

$$\mathsf{P}\{A_0\} = 1 + O(h^{-\tau}),$$

следовательно, для $t = 0$ утверждение леммы 2 доказано.

Обозначим $\Psi(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\eta_1$. Из (2) нетрудно получить, что

$$\Psi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \tag{11}$$

где $\Phi(z, s, a)$ – транцендентная функция Лерча (см., например, [Flajolet, Sedgewick, 2009]), задаваемая соотношениями

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{(i+a)^s}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1 - ze^{-x}} dx, \tag{12}$$

$\Gamma(s)$ – значение гамма-функции в точке $s$. Используя (11) и формулу обращения для решетчатых распределений, можно уточнить (10) следующим образом:

$$\mathsf{P}\{\nu_N = k\}$$
$$= N^{-1/\tau}(f((k - N\zeta(\tau))/N^{1/\tau}) + O(N^{-1/\tau})), \tag{13}$$

причем это равенство выполняется равномерно относительно $k$ таких, что величина $(k - N\zeta(\tau))N^{-1/\tau}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Рассмотрим $\mathsf{P}\{A_1\}$. Ясно, что

$$\mathsf{P}\{A_1\} = \sum_{k<h} \mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = k\}. \tag{14}$$

Обозначим $\xi_1^{(1)}$ степень первой вершины первого поколения. Тогда

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 1\} = \sum_{s<h} \mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 1, \xi^{(1)} = s\}. \tag{15}$$

Пусть $\mu_r$ означает число вершин степени $r$ в графе. В теореме 6 статьи [Павлов, 2009] показано, что при $N, n \to \infty$ так, что $n-\zeta(\tau)N = o(N^{1/\tau})$ для целых неотрицательных $k$

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\}$$

$$= \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\} \tag{16}$$

равномерно относительно $\frac{(k-Np_r)}{\sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}}$ в любом фиксированном конечном интервале. Повторив доказательство этой теоремы при условии
$0 < C_1 \leqslant (n-\zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \leqslant C_2 < \infty$, здесь и далее символы $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные, легко получить, что для таких же $k$

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\}$$

$$= \frac{(1+o(1))f((n-\zeta(\tau)N)/(N(1-p_r))^{1/\tau})}{(1-p_r)^{1/\tau}\sqrt{2\pi N(1-p_r)}f((n-\zeta(\tau)N^{1/\tau})}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\}. \tag{17}$$

Учитывая соотношения $N^{-1/2} = o(N^{1/\tau-1})$, $n-\zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$, процедуру построения графа и свойства функции $h$, из (4), (16) и (17) получаем, что

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 1, \xi_1^{(1)} = 1\}$$

$$= p_1 N p_1 \frac{(n-3)(n-5)\ldots 3\cdot 1}{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}\left(1+O(N^{-1/2})\right)$$

$$= p_1^2\zeta^{-1}(\tau)(1+O(N^{1/\tau-1})) = p_1 q_0(1+O(N^{1/\tau-1})).$$

Рассуждая аналогично для $2 \leqslant s \leqslant h$, находим, что

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 1, \xi_1^{(1)} = s\} = p_1 q_{s-1}(1+O(N^{1/\tau-1})). \tag{18}$$

Отсюда и из (15) следует:

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 1\} = p_1(1-\sum_{s\geqslant h} q_{s-1})(1+O(N^{1/\tau-1})). \tag{19}$$

Из (2) при $k \to \infty$ получаем :

$$p_k \sim \tau/k^{\tau+1}, \tag{20}$$

поэтому с учетом (4),

$$\sum_{k\geqslant h} q_{s-1} \leqslant C_3 \sum_{s\geqslant h} s^{-\tau} \leqslant C_4 h^{1-\tau}. \tag{21}$$

Отсюда и из (19) вытекает :

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 1\} = p_1(1+O(h^{1-\tau})). \tag{22}$$

Подобным же образом можно рассмотреть поведение вероятности $\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2\}$. Тогда

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2\} = \sum_{s<h} \mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = s\}. \tag{23}$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = s\}$$

$$= \sum_{i<h} \mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = 1, \xi_2^{(1)} = i\}, \tag{24}$$

где $\xi_2^{(1)}$ – степень второй вершины первого поколения (такая вершина, очевидно, существует, поскольку событие $A_1$ подразумевает, что у начальной частицы нет петель). Легко видеть, опять учитывая (4), (16), (17) и условие $\nu_N = n$, что

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = 1, \xi_2^{(1)} = 1\}$$

$$= p_2 \begin{pmatrix} Np_1 \\ 2 \end{pmatrix} 2\frac{(n-5)(n-7)\ldots 3\cdot 1}{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}$$

$$\times \left(1+O(\frac{1}{\sqrt{N}})\right) = p_2 q_0^2(1+o(N^{1/\tau-1}))^2$$

и, аналогично, для $2 \leqslant i < h$

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = 1, \xi_2^{(1)} = i\}$$

$$= p_2 q_0 q_{i-1}\left(1+o\big(N^{1/\tau-1}\big)\right)^2.$$

Отсюда и из (21), (24) находим, что

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = 1\}$$

$$= p_2 q_0 \left(1+O\big(h^{1-\tau}\big)\right)\left(1+o\big(N^{1/\tau-1}\big)\right)^2.$$

Продолжая этот процесс, получаем, что при $2 \leqslant s < h$

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2, \xi_1^{(1)} = s\}$$

$$= p_2 q_{s-1}\left(1+O(h^{1-\tau})\right)\Big(1+o(N^{1/\tau-1})\Big)^2.$$

Поэтому из (21) и (23) следует, как легко видеть, что

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = 2\} = p_2\left(1+O(h^{1-\tau})\right)^2.$$

Теперь становится понятным, что для $k = 1, 2, ...$

$$\mathsf{P}\{A_1, \eta_1 = k\} = p_k\left(1+O(h^{1-\tau})\right)^k.$$

Отсюда и из (1), (3), (14) и (32) следует:

$$\mathsf{P}\{A_1\} = \sum_{k<h} p_k\left(1+O(kh^{1-\tau})\right) = 1+O(h^{1-\tau}) \tag{25}$$

Далее рассмотрим $\mathsf{P}\{A_1\}$. Проводя выкладки, подобные приведенным выше, находим, что

$$\mathsf{P}\{A_2, \eta_1 = 1\} = p_1\sum_{i<h} q_{i-1}\big(1-\sum_{s\geqslant h} q_s\big)^{i-1}$$

$$= p_1\zeta^{-1}(\tau)\sum_{i<h} ip_i\big(1-\sum_{s\geqslant h} q_s\big)^{i-1}. \tag{26}$$

Рассмотрим выражение

$$\zeta^{-1}(\tau)\sum_{i<h} ip_i\big(1-\sum_{s\geqslant h} q_s\big)^{i-1}$$

$$= \zeta^{-1}(\tau)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} ip_i\big(1-\sum_{s\geqslant h} q_s\big)^{i-1} - \sum_{i\geqslant h} ip_i\big(1-\sum_{s\geqslant h} q_s\big)^{i-1}\Big). \tag{27}$$

Обозначим $\lambda = 1-\sum\limits_{s\geqslant h} q_s$ и рассмотрим вспомогательную случайную величину $\xi$, имеющую распределение

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \lambda^k p_k(1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1))^{-1}, \tag{28}$$

где $k = 1, 2, ...,$ а $\Phi(\lambda,\tau,1)$ определено в (12). Нетрудно найти, что

$$\mathsf{E}\,\xi = \frac{\Phi(\lambda,\tau,1)-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)}{1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)}$$

и в наших условиях $\lambda \to 1, \mathsf{E}\,\xi \to \zeta(\tau)$. Для того, чтобы получить более точную оценку $\mathsf{E}\,\xi$, воспользуемся асимптотическим разложением $\Phi(\lambda,\tau,1)$ при $\lambda \to 1$ (см. [Flajolet, Sedgewick, 2009]):

$$\Phi(\lambda,\tau,1) = \lambda^{-1}(\zeta(\tau)+O((1-\lambda)^{\tau-1})).$$

Отсюда и из явного вида $\lambda$ находим:

$$\mathsf{E}\,\xi = \zeta(\tau)+O(h^{-(\tau-1)^2}). \tag{29}$$

Заметим, что в силу (20)

$$\sum_{i\geqslant h} ip_i\big(1-\sum_{s\geqslant h} q_s\big)^i < C_5\sum_{i\geqslant h} i^{-\tau} = O\big(h^{1-\tau}\big),$$

поэтому из (26) – (29) следует:

$$\mathsf{P}\{A_2, \eta_1 = 1\} = p_1\big(1+O(h^{(\tau-1)^2})\big).$$

Таким же образом находим, что для $i = 1, 2, ...$

$$\mathsf{P}\{A_2, \eta_1 = i\} = p_i\big(1+O(h^{-(\tau-1)^2})\big),$$

следовательно

$$\mathsf{P}\{A_2\} = 1+O(h^{-(\tau-1)^2}).$$

Учитывая (25) и продолжая этот процесс по индукции, получаем утверждение леммы. □

## Связь с ветвящимися процессами

Рассмотрим начинающийся с одной частицы ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона $G$, в котором число прямых потомков начальной частицы имеет распределение (2), а число прямых потомков остальных частиц имеет распределение (4). Обозначим $Z_t(G)$ число частиц $t$-го поколения. Связь между рассмотренными случайными графами и процессом $G$ можно описать следующим образом.

**Лемма 3.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$, $t = o(\ln N/\ln\ln N)$. Тогда для $m = 0, 1, 2, ...$*

$$\mathsf{P}\{Z_t = m\} = \mathsf{P}\{Z_t(G) = m\}(1+O(h^{-(\tau-1)^{t-1}})).$$

*Доказательство.* Ясно, что

$$\mathsf{P}\{Z_0 = 1\} = \mathsf{P}\{Z_0(G) = 1\} = 0.$$

Из леммы 2 и (13) следует :

$$\mathsf{P}\{Z_1 = m\} = \mathsf{P}\{\eta_1 = m|\nu_N = n\}$$

$$= p_m(1+O(N^{-1/\tau})), \tag{30}$$

поэтому, в силу равенства $\mathsf{P}\{Z_1(G) = m\} = p_m$, получаем утверждение леммы для $t = 1$. Пусть $t = 2$. Согласно лемме 2,

$$\mathsf{P}\{Z_2 = m\} = \mathsf{P}\{Z_2 = m, A_1\} + O(h^{1-\tau}). \tag{31}$$

Рассмотрим

$$\mathsf{P}\{Z_2 = m, A_1\} = \sum_{k<h} P\{\eta_1 = k, Z_2 = m, A_1\}. \tag{32}$$

Из (18) и (21) находим, что
$$P\{\eta_1 = 1, Z_2 = m, A_1\}$$
$$= p_1 q_{m-1}(1 + o(N^{1/\tau-1}))(1 + O(h^{1-\tau})).$$
Учитывая (16), (17) и условие $n - \zeta(\tau)N = o(N^{1/\tau})$, получаем :
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 0, A_1\} = p_2 2 \begin{pmatrix} Np_1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\times(1 + O(N^{-1/2}))\frac{(n-5)(n-7)...3\cdot 1}{(n-1)(n-3)...3\cdot 1}$$
$$= p_2 q_0^2\big(1 + o\big(N^{1/\tau-1}\big)\big). \qquad (33)$$
Нетрудно видеть далее, что
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 1, A_1\} =$$
$$2\sum_{1<k\leqslant h}\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 1, \xi_1^{(1)} = k, \xi_2^{(1)} = 1, A_1\}, \qquad (34)$$
где обозначения $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве леммы 2. Используя (16), (17), получаем:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 1, \xi_1^{(1)} = 2, \xi_2^{(1)} = 1, A_1\}$$
$$= p_2\begin{pmatrix} Np_1 \\ 2 \end{pmatrix} Np_2 4\frac{(n-7)(n-9)...3\cdot 1}{(n-1)(n-3)...3\cdot 1}$$
$$\times\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)^2 = p_2 q_1 q_0^2(1 + o(N^{1/\tau-1}))^3.$$
Подобным же образом для $2 \leqslant k \leqslant h$ приходим к равенствам:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 1, \xi_1^{(1)} = k, \xi_2^{(1)} = 1, A_1\}$$
$$= p_2 q_1 q_0 q_{k-1}(1 + o(N^{1/\tau-1}))^3,$$
поэтому из леммы 2 и (34) находим:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 1, A_1\}$$
$$= 2p_2 q_0 q_1(1 + o(N^{1/\tau-1}))^3(1 + O(h^{1-\tau})). \quad (35)$$
Дальнейшие рассуждения проводятся по той же схеме. Ясно, что
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, A_1\}$$
$$= 2\,\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, A_1\}$$
$$+\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 2, \xi_2^{(1)} = 2, A_1\}. \qquad (36)$$
Обозначим $\xi_1^{(2)}$ и $\xi_2^{(2)}$ первую и вторую вершины второго поколения. Нетрудно видеть, что
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, A_1\}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3,$$
$$\xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = k, A_1\}. \qquad (37)$$
Очевидно также, что
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = 1, A_1\}$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)}$$
$$= 1, \quad \xi_2^{(2)} = s, A_1\}. \qquad (38)$$
Далее получаем:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = 1,$$
$$\xi_2^{(2)} = s, A_1\} = p_2 q_0^2 q_2 q_{s-1}(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4,$$
поэтому из (38) следует:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = 1, A_1\}$$
$$= p_2 q_0^2 q_2(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4. \qquad (39)$$
Теперь рассмотрим
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = 2, A_1\}$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)}$$
$$= 1, \quad \xi_2^{(2)} = s\}. \qquad (40)$$
Как обычно, находим:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = 2,$$
$$\xi_2^{(2)} = s, A_1\} = p_2 q_0 q_1 q_2 q_{s-1}(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4$$
и из (40) получаем:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = 2,$$
$$A_1\} = p_2 q_0 q_1 q_2(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4. \qquad (41)$$
Продолжая этот процесс и учитывая (39), (41), видим, что
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, \xi_1^{(2)} = k, A_1\}$$
$$= p_2 q_0 q_2 q_{k-1}(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4,$$
поэтому из (37) следует равенство:
$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 3, \xi_2^{(1)} = 1, A_1\}$$
$$= p_2 q_0 q_2(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4. \qquad (42)$$

Рассматривая следующую вероятность по той же схеме, находим:

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, \xi_1^{(1)} = 2, \xi_2^{(1)} = 2, A_1\}$$
$$= p_2 q_1^2 (1 + o(N^{1/\tau - 1}))^4.$$

Отсюда и из (36), (42) вытекает:

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = 2, A_1\}$$
$$= (2p_2q_0q_2 + p_2q_1^2)(1 + o(N^{1/\tau-1}))^4. \qquad (43)$$

Подобно тому, как были получены равенства (33), (35) и (42), из леммы (2) находим:

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = 2, Z_2 = m, A_1\}$$
$$= p_2 \sum_{\substack{k_1, k_2 \geqslant 0,\\ k_1 + k_2 = m}} q_{k_1} q_{k_2} (1 + o(h^{\tau - 1})).$$

Аналогичным образом можно вывести, что

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = k, Z_2 = m, A_1\}$$
$$= p_k \sum_{\substack{k_1, ..., k_k \geqslant 0,\\ k_1 + ... + k_k = m}} q_{k_1} q_{k_2} ... q_{k_k} (1 + O(h^{1-\tau})).$$

Отсюда и из (1), (31), (32) следует:

$$\mathsf{P}\{Z_2 = m\}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{\substack{k_1, ..., k_k \geqslant 0,\\ k_1 + ... + k_k = m}} q_{k_1} q_{k_2} ... q_{k_k} (1 + O(h^{1-\tau})). \qquad (44)$$

Из определения ветвящегося процесса $G$ и (30), (44) ясно, что утверждение леммы верно при $t \leqslant 2$. Как и при доказательстве леммы 2, продолжим рассмотрение вероятностей $\mathsf{P}\{Z_t = m\}$ по индукциии и придем к утверждению леммы 3. □

## Ядро графа

В работе [Reittu, Norros, 2004] показано, что в Интернет-графе (без ограничений на число связей) вершины, имеющие достаточно большие степени, концентрируются вокруг вершины с максимальной степенью $j^*$ (если таких вершин несколько, то в качестве $j^*$ можно взять любую из них) и соединены с ней путями небольшой (порядка $\ln \ln N$) длины. Такой подграф получил название ядра. Не удивительно, что подобная структура возникает и в рассматриваемых условных графах.

Обозначим $g_1 = (\tau - 1)/\tau$, $\eta_{(N)}$ – степень вершины $j^*$, $\varepsilon = \varepsilon(N) = w/\ln N$, где $w$ определено в (7). Пусть $U_1$ означает множество вершин следующего вида:

$$U_1 = \{j : \ \eta_j \geqslant N^{g_1 + \varepsilon}\}. \qquad (45)$$

Согласно теореме 4 из [Павлов, 2009], в наших условиях при $r = (N/\gamma)^{1/\tau}(1 + o(1))$, где $\gamma$ – некоторая положительная постоянная, справедливо соотношение

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} \to e^{-\gamma}, \qquad (46)$$

откуда ясно, что $j^* \in U_1$. Нетрудно видеть, что

$$N^{\varepsilon} \to \infty. \qquad (47)$$

Учитывая (45) – (47), с помощью леммы 1 получаем, что любая вершина из $U_1$ а.д. соединена ребром с $j^*$. Обозначим

$$g_i = (\tau - 1)^i/\tau + \varepsilon \sum_{k=0}^{i-1} (\tau - 1)^k, \ \ i = 2, 3, ..., \qquad (48)$$

и пусть

$$U_i = \{j : N^{g_i + \varepsilon} \leqslant \eta_i < N^{g_{i-1} + \varepsilon}\}, \ \ i = 2, 3, ..., . \qquad (49)$$

Множество вершин графа

$$C = \bigcup_{i=1}^{\alpha} U_i \qquad (50)$$

назовем *ядром.*

**Лемма 4.** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Любая вершина ядра, принадлежащая множеству $U_{i+1}$, $i = 1, 2, ...,$ а.д. соединена ребром с какой-нибудь вершиной множества $U_i$.*
2. *Любая вершина ядра, не принадлежащая множеству $\bigcup_{i=1}^{s+2} U_i$, $s = 1, \ 2, ...,$ а.д. не имеет ребер, соединяющих ее с вершиной множества $U_s$.*

*Доказательство.* Из (1), (45), (49) нетрудно показать, что при $N \to \infty$ справедливо соотношение $\mathsf{P}\{j \in U_i\} \sim N^{-(g_i + \varepsilon)\tau}$. Используя известное приближение биномиального распределения нормальным, находим, что число вершин в $U_i$ асимптотически эквивалентно $N^{1-(g_i+\varepsilon)\tau}$. Отсюда и из (49) получаем, что сумма степеней вершин из $U_i$ а. д. пропорциональна $N^{1-(\tau-1)(g_i+\varepsilon)}$. Из (48) следует, что

$$g_{i+1} = (\tau - 1) g_i + \varepsilon, \qquad (51)$$

поэтому из (47), (49) с помощью леммы 1 и соотношения $n/N \to \zeta(\tau)$ приходим к первому утверждению леммы 4.

Как мы видим, число степеней вершин в $U_s$ пропорционально $N^{1-(\tau-1)(g_s+\varepsilon)}$. Из (49) следует, что степень любой вершины, не принадлежащей $\bigcup_{i=1}^{s+2} U_i$, меньше, чем $N^{g_{s+2}+\varepsilon}$. Отсюда с помощью (51) и леммы 1 получаем второе утверждение леммы 4. □

Из леммы 4 очевидным образом вытекают такие следствия.

**Следствие 1.** *Ядро а.д. состоит из непересекающихся слоев $U_1, U_2, ...,$ концентрически расположенных вокруг вершины $j^*$. Кратчайший путь из вершины $j^*$ в любую вершину ядра, принадлежащую слою $U_i$, $i = 2, 3, ...,$ проходит последовательно через вершины, принадлежащие слоям $U_1, U_2, ..., U_{i-1}$, и он не содержит ребер, соединяющих непосредственно вершины из слоев, номера которых отличаются больше, чем на 2.*

**Следствие 2.** *Длина кратчайшего пути, соединяющего любые две вершины ядра, а.д. не превосходит $2\alpha$.*

Хорошо известно [Севастьянов, 1971], что определенная в теореме вероятность вырождения $q$ удовлетворяет уравнению

$$q = F(q), \quad 0 < q < 1. \tag{52}$$

Выберем произвольную вершину $j^*$ и обозначим $D_j$ событие, состоящее в том, что эта вершина принадлежит компоненте связности, содержащей ядро.

**Лемма 5.** *Пусть $N \to \infty$. Тогда $\mathsf{P}\{D_j\} \to 1 - \varphi(q)$.*

*Доказательство.* Найдем сначала вероятность вырождения процесса $G$. Следуя [Севастьянов, 1971], введем обозначение

$$F_t(z, G) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{Z_t(G) = k\} z^k, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

Известно [Севастьянов, 1971], что $F_t(z, G) = \varphi(F_t(z, G))$. Полагая $z = 0$, отсюда получаем:

$$\mathsf{P}\{Z_{t+1}(G) = 0\} = \varphi(\mathsf{P}\{Z_t(G) = 0\}).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to \infty$ и учитывая (5), (52), находим вероятность вырождения $G$:

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z_t(\alpha) = 0\} = \varphi(q). \tag{53}$$

Обозначим $D_{j,t}$ событие, состоящее в том, что к моменту $t$ закончилось построение первой связной компоненты графа, не содержащей вершин из ядра, с помощью описанного выше алгоритма, работа которого началась с вершины $j$. Ясно, что в этом случае

$$\mathsf{P}\{D_{j,t}\} \leqslant \mathsf{P}\{Z_t = 0\}. \tag{54}$$

Положим $h = \ln N$, $t \leqslant \ln\ln\ln\ln N$. Из леммы 2 следует :

$$\mathsf{P}\{D_{j,t}\} \geqslant \mathsf{P}\{D_{j,t}, A_t\}$$

$$= \mathsf{P}\{Z_t = 0\} + O((\ln N)^{-(\tau-1)^2}). \tag{55}$$

Утверждение леммы 5 следует из леммы 3 и соотношений (53) – (55). □

В лемме 3 установлено соответствие между рассматриваемыми случайными графами и ветвящимся процессом $G$. С помощью этого соответствия ниже, в лемме 6, будет показано, что асимптотически эквивалентны события, состоящие в том, что процесс $G$ выродился и что соответствующий подграф, построенный с помощью алгоритма, не содержит вершин ядра.

**Лемма 6.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$. Если вершина графа принадлежит компоненте связности, содержащей ядро, то расстояние от нее до ядра, а. д. не превосходит $\beta$.*

*Доказательство.* Мы будем следовать схеме рассуждений, приведенных в [Reittu, Norros, 2004] при доказательстве аналогичного утверждения о безусловных случайных графах.

Для последовательности номеров вершин $j_1, j_2, ...,$ полученной с помощью алгоритма, введем обозначения:

$$\sigma = \sigma(j_1, j_2, ..., ) = \inf\{k : \ j_k = j_l, \ l < k\},$$

$$\Delta = \inf\{k : \ \sum_{i=1}^{k}(\eta_{j_i} - 1) \geqslant \beta\}, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_{j_i},$$
$$m = [4\beta / \mathsf{P}\{\eta_1 > 1\}].$$

Докажем, что

$$\mathsf{P}\{\Delta \leqslant m | \nu_N = n\} \to 1. \tag{56}$$

Действительно, нетрудно видеть, что в силу леммы 3 [Павлов, 2007] при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\eta_{j_1} > 1 | \nu_N = n\} \to \mathsf{P}\{\eta_1 > 1\}. \tag{57}$$

Обозначим $\mathbf{I}(A)$ индикатор события $A$. Для случайной величины $X$, имеющей биномиальное распределение с параметрами $n, p$, справедлива оценка [Феллер, 1984]:

$$\mathsf{P}\{X \leqslant np/2\} \leqslant 4(1 - p/2)/np, \tag{58}$$

поэтому с помощью (57), (58) находим, что

$$\mathsf{P}\{\Delta \leqslant m|\nu_N = n\}$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{I}(\eta_{j_i} > 1) > \beta|\nu_N = n\right\}$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{I}(\eta_{j_i} > 1) > m\,\mathsf{P}\{\eta_1 > 1\}/4|\nu_N = n\right\}$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{I}(\eta_{j_i} > 1) > m\,\mathsf{P}\{\eta_1 > 1|\nu_N = n\}/2|\nu_N\right.$$

$$\left. = n\right\} - \mathsf{P}\{\mathsf{P}\{\eta_1 > 1|\nu_N = n\} > \mathsf{P}\{\eta_1 > 1\}/2|\nu_N$$

$$= n\} \geqslant 1 - 8/m\,\mathsf{P}\{\eta_1 > 1|\nu_N = n\} + o(1) \to 1,$$

откуда и следует (56).

По определению $\Delta$ для любого $u$ эквивалентны неравенства $u \geqslant \Delta$ и $S_u \geqslant u + \beta$. Отсюда нетрудно видеть, что неравенства

$$u \geqslant \Delta \quad \text{и} \quad S_u \geqslant \Delta + \beta \tag{59}$$

также эквивалентны. Для всех $l = o(N)$

$$\mathsf{P}\{S_{\sigma-1} < l|\nu_N = n\}$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\mathsf{P}\{\sigma = i, S_{i-1} < l|\nu_N = m\}. \tag{60}$$

Используя лемму 3 [Павлов, 2007], находим, что

$$\mathsf{P}\{\sigma = i, S_{i-1} < l|\nu_N = n\} \leqslant C_1 l/n,$$

поэтому из (60) следует:

$$\mathsf{P}\{S_{\sigma-1} < l|\nu_N = n\} \leqslant C_1 l^2/n.$$

Отсюда и из (56), (59) получаем:

$$\mathsf{P}\{\sigma > \Delta|\nu_N = n\} = \mathsf{P}\{S_{\sigma-1} \geqslant \Delta + \beta|\nu_N = n\}$$

$$\geqslant \mathsf{P}\{S_{\sigma-1} \geqslant m+\beta|\nu_N = n\} - \mathsf{P}\{\Delta > m|\nu_N = n\}$$

$$\geqslant 1 - (m+\beta)^2/n - \mathsf{P}\{\Delta > m|\nu_N = n\} \to 1. \tag{61}$$

Обозначим $L = \inf\{i : j_i \in G\}$. Оценим эту величину сверху. Для того, чтобы вершина принадлежала ядру, необходимо (см. (6), (48), (50), (51)), чтобы ее степень была не меньше, чем $N^{g_\alpha+\varepsilon}$. Как легко видеть из (51), это значит, что при достаточно больших $N$ степень такой вершины должна превосходить $N^{(3-\tau)\varepsilon/(2-\tau)}$. Отсюда и из (1) следует, как нетрудно проверить, что для любой вершины $j$ справедливо соотношение $\mathsf{P}\{j \in G\} \sim N^{-(3-\tau)\tau\varepsilon/(2-\tau)}$. Учитывая нормальное приближение биномиального распределения, для случайной величины $v$, равной объему ядра, получаем неравенство $v \geqslant C_2 N^{1-(3-\tau)\tau\varepsilon/(2-\tau)}$, откуда следует, что число степеней вершин ядра больше, чем $C_3 N^{1-(\tau-1)(3-\tau)\varepsilon/(2-\tau)}$. Тогда из (6), (49) и условия $n/N \to \varsigma(\tau)$ находим:

$$\mathsf{P}\{j_1, ..., j_\beta\}\bigcap C = \varnothing|\nu_N = n\}$$

$$\leqslant (1 - C_4 N^{(1-\tau)(3-\tau)\varepsilon/(2-\tau)})^\beta \to 0,$$

откуда

$$\mathsf{P}\{L \leqslant \beta\} \to 1. \tag{62}$$

□

## Доказательство теоремы

Предположим, что построенный с помощью алгоритма и начинающийся с рассматриваемой вершины подграф содержит $\delta < \infty$ поколений вершин. Положим $h = o(N^{(3-\tau)\varepsilon/(2-\tau)})$. В силу лемм 2 и 3 это значит, что ветвящийся процесс $G$ к моменту $\delta$ выродился, а построенный подграф не содержит вершин ядра. Если же, наоборот, процесс $G$ не выродился до рождения $\beta$ частиц, то из (61) и определения $\sigma$ следует, что мы можем считать идентичными траекторию процесса до этого момента и соответствующую реализацию подграфа и, в силу (62), это значит, что ядро достигается.

Теперь нетрудно доказать теорему. Первое утверждение очевидным образом следует из леммы 5 и свойств биномиального распределения, а второе – из следствия 2 и леммы 6.

## Литература


*Ватутин В. А.* Распределение расстояния до корня минимального поддерева, содержащего все вершины данной высоты // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 2. С. 273–287.

*Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 424 с.

*Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

*Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 22–34.

*Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.

*Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.

*Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

*Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 527 с.

*Durrett R.* Random Graph Dynamics. N. Y.: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

*Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262.

*Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic Combinatorics. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 824 p.

*Hofstad R.* Random Graph and Complex Networks. Department of Mathematics and Computer Sciences. Eindhoven University of Thechnology. 2011. URL:http://www.uin.tue.nl/ rhofstad/ Notes RGGN.pdf (дата обращения: 11.04.2011)

*Reittu H., Norros I.* On the power-low random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N. 1. P. 3–23.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Павлов Юрий Леонидович**
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 761218

**Pavlov, Yury**
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 761218