Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2011. С. 111–114

УДК 519.23

ОБ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

С. В. Стафеев

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

В статье рассматривается модель факторного анализа с зависимыми остатками. Получены условия глобальной идентифицируемости и разработан метод проверки этих условий.

К л ю ч е в ы е с л о в а: факторный анализ, идентифицируемость, инварианты.

S. V. Stafeev. ON GLOBAL IDENTIFIABILITY CONDITIONS OF FACTOR ANALYSIS MODELS

A factor analysis model with dependent residuals is considered. Global identifiability conditions were obtained and a method for testing these conditions was developed.

K e y w o r d s: factor analysis, identifiability, invariants.

Введение

В статье рассматривается модель факторного анализа с зависимыми остатками [Стафеев, 2007]. В отличие от стандартной модели факторного анализа [Harman, 1976], в данной модели допускаются зависимости между остатками. Одной из основных проблем, возникающих при работе с моделями, содержащими латентные (скрытые) переменные, является проблема параметрической идентифицируемости, состоящей в ответе на вопрос о возможности однозначного восстановления параметров модели по матрице ковариаций наблюдаемых случайных величин. Отсутствие идентифицируемости приводит к невозможности состоятельного оценивания параметров модели. Рассматриваемая модель является частным случаем систем структурных уравнений с латентными переменными. Заметим, что в работе [Drton et al., 2011] были получены условия глобальной идентифицируемости для систем структурных уравнений, не содержащих латентные переменные. Ранее для различных моделей факторного анализа с зависимыми остатками были получены условия почти всюду (п.в.) локальной и глобальной идентифицируемости [Стафеев, 2005, 2007; Stafeev, 2007]. В данной работе получены достаточные условия глобальной идентифицируемости рассматриваемой модели, и разработан метод проверки этих условий по имеющимся данным.

Модель факторного анализа

Рассмотрим модель факторного анализа:

$$\mathbf{X} = A\mathbf{H} + \mathbf{Y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{X} = \{X_1, ..., X_n\}^t$ является вектором с матрицей ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij})$; $\mathbf{H} = \{H_1, ..., H_k\}^t$ есть множество независимых нормально распределенных латентных (скрытых) случайных величин с $\mathbf{M}(H_j) = 0$ и $\mathbf{Var}(H_j) = 1$,

$j = 1, ..., k$; $A = (a_{ij})$ – матрица факторных нагрузок. Вектор остатков $\mathbf{Y} = \{Y_1, ..., Y_n\}^t$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\Theta_G = (\theta_{ij})$. Векторы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{H}$ являются независимыми. Взаимосвязь между компонентами вектора $\mathbf{Y}$ представляется в виде ковариационной графовой модели со структурой $G = (V, E)$, где $V = \{1, .., n\}$ и $(i, j) \notin E$, если $\theta_{ij} = 0$.

Параметры модели (1) состоят из матрицы факторных нагрузок A и ненулевых элементов матрицы Θ_G.

Модель (1) называется глобально идентифицируемой, если по матрице Σ матрица A определяется с точностью до ортогонального вращения, а элементы матрицы Θ_G определяются однозначно.

Матрица ковариаций наблюдаемых случайных Σ величин допускает следующее представление:

$$\Sigma = AA^t + \Theta_G. \tag{2}$$

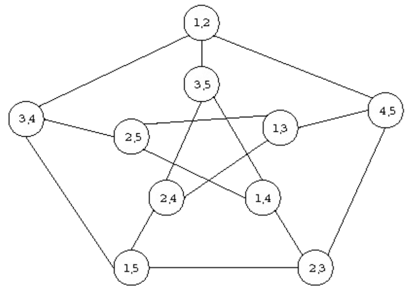
Пусть P_G – множество всех неотрицательно определенных $n \times n$ матриц, допускающих разложение (2). Наша задача состоит в нахождении множества $P'_G \subset P_G$ ковариационных матриц, которые соответсвуют глобально идентифицируемым моделям. Задача будет решаться путем наложения ограничений на элементы матрицы Σ и граф G.

Условия глобальной идентифицируемости

Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ – дополнительный для G граф. Определим граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, состоящий из множества вершин $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1, ..., i_k), 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant k\}$ и множества ребер $\mathbf{E} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (i_1, ..., i_k), \mathbf{j} = (j_1, ..., j_k), (i_s, j_l) \in \overline{E}, s, l = 1, ...k\}$. (Впервые граф $\mathbf{G}$ был определен в работе [Стафеев, 2007] в контексте п.в. локальной идентифицируемости. Граф $\mathbf{G}$ также играет ключевую роль при нахождении полиномиальных инвариантов модели 1 [Стафеев, 2010; Stafeev, 2010].) На рисунке представлен пример графа $\mathbf{G}$ для $k = 2$, $n = 5$ и некоррелированых остатков.

Каждому ребру графа $\mathbf{G}$ сопоставим в соответсвие детерминант $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$ матрицы $\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = (\sigma_{i_m, j_l})^k_{m,l=1}$. Данный $k \times k$ минор матрицы Σ будем называть весом ребра $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

В следующей теореме получены условия глобальной идентифицируемости модели (1).



Граф $\mathbf{G}$ для $k = 2$ и $n = 5$

Теорема 1. *Модель* (1) *является глобально идентифицируемой, если граф, полученный из графа* $\mathbf{G}$ *с помощью удаления ребер, соответствующих нулевым весам, содержит компоненту связности* $\mathbf{G}' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ *с нечетным простым циклом и* $\cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{V}'} \mathbf{i} = V$.

Доказательство. Введем обозначения: $\mathbf{a_i} = \{a_{i1}, ..., a_{ik}\}^t$, $A_\mathbf{i} = \{\mathbf{a}_{\mathbf{i}_1}, ..., \mathbf{a}_{\mathbf{i}_\mathbf{k}}\}$ и $\Psi = AA^t$.

Очевидно, что $\Psi_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ для $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathbf{E}$. В работе [Стафеев, 2010] показано, что

$$\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = \Psi_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = A_\mathbf{i}(A_\mathbf{j})^t, (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathbf{E}. \tag{3}$$

Так как граф $\mathbf{G}'$ не содержит ребер с нулевым весом, то все матрицы из набора

$$\Psi_{\mathbf{i},\mathbf{j}}, (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \mathbf{E}' \tag{4}$$

являются обратимыми. Докажем, что, используя множество (4), можно однозначно определить множество матриц

$$\Psi_{\mathbf{i},\mathbf{j}}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{V}'. \tag{5}$$

Предположим, что граф $\mathbf{G}'$ содержит простую цепь с множеством вершин $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ и множеством ребер $\{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2), (\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3), (\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4)\}$. Используя (3), получаем

$$\Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2}(\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{i}_2})^{-1}\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{i}_4}$$
$$= A_{\mathbf{i}_1}(A_{\mathbf{i}_2})^t[A_{\mathbf{i}_3}(A_{\mathbf{i}_2})^t]^{-1}A_{\mathbf{i}_3}(A_{\mathbf{i}_4})^t = A_{\mathbf{i}_1}(A_{\mathbf{i}_4})^t.$$

Таким образом, получаем, что

$$\Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2}(\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{i}_2})^{-1}\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{i}_4} = \Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_4}. \tag{6}$$

Теперь предположим, что граф $\mathbf{G}'$ содержит простой нечетный цикл с множеством вершин $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ и множеством ребер $\{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2), (\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3), (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3)\}$. Снова используя (3), получаем

$$\Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_2}(\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{j}_2})^{-1}\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{j}_1}$$
$$= A_{\mathbf{i}_1}(A_{\mathbf{i}_2})^t[A_{\mathbf{i}_3}(A_{\mathbf{i}_2})^t]^{-1}A_{\mathbf{i}_3}(A_{\mathbf{i}_1})^t = A_{\mathbf{i}_1}(A_{\mathbf{i}_1})^t.$$

Отсюда следует, что

$$\Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2}(\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{i}_2})^{-1}\Psi_{\mathbf{i}_3,\mathbf{i}_1} = \Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_1}. \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) допускают следующие обобщения. Пусть граф $\mathbf{G}'$ содержит простую цепь с четным числом вершин $\{\mathbf{i}_1, ..., \mathbf{i}_l\}$ и множеством ребер $\{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2), ..., (\mathbf{i}_{l-1}, \mathbf{i}_l)\}$. Получаем:

$$\Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_l} = [\prod_{s=1}^{s=l-3} \Psi_{\mathbf{i}_s,\mathbf{i}_{s+1}}(\Psi_{\mathbf{i}_{s+2},\mathbf{i}_{s+1}})^{-1}]\Psi_{\mathbf{i}_{l-1},\mathbf{i}_l}. \quad (8)$$

Теперь пусть граф $\mathbf{G}'$ содержит простой нечетный цикл с множеством вершин $\{\mathbf{i}_1, ..., \mathbf{i}_l\}$ и множеством ребер $\{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2), ..., (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_l)\}$. В этом случае получаем:

$$\Psi_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_1} = [\prod_{s=1}^{s=l-2} \Psi_{\mathbf{i}_s,\mathbf{i}_{s+1}}(\Psi_{\mathbf{i}_{s+2},\mathbf{i}_{s+1}})^{-1}]\Psi_{\mathbf{i}_l,\mathbf{i}_1}. \quad (9)$$

По условиям теоремы граф $\mathbf{G}'$ содержит нечетный цикл. Пусть $\mathbf{V}_1$ – множество вершин этого цикла и пусть $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}' \setminus \mathbf{V}_1$. Неизвестные матрицы множества (5) будем определять в три этапа. Очевидно, что в графе $\mathbf{G}'$ любые две различные вершины $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_1$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \notin \mathbf{E}'$, соединены простой цепью с четным числом вершин. Таким образом, используя (8), по набору (4) однозначно определяем множество матриц $\{\Psi_{\mathbf{ij}}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_1\}$.

Образуем граф $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{V}', \mathbf{E}_1)$, где $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}' \cup \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_1\}$. В графе $\mathbf{G}_1$ любые две вершины $\mathbf{i} \in \mathbf{V}_1$ и $\mathbf{j} \in \mathbf{V}_2$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \notin \mathbf{E}_1$, соединены простой цепью с четным числом вершин. Таким образом, мы однозначно определяем матрицы $\{\Psi_{\mathbf{ij}}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \mathbf{i} \in \mathbf{V}_1, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_2\}$.

Теперь образуем граф $\mathbf{G}_2 = (\mathbf{V}', \mathbf{E}_2)$, где $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 \cup \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \mathbf{i}\mathbf{V}_1, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_2\}$. По аналогии с предыдущими случаями, в графе $\mathbf{G}_2$ для любых двух различных вершин $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_2$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \notin \mathbf{E}_2$ мы определяем $\Psi_{\mathbf{ij}}$.

Образуем граф $\mathbf{G}_3 = (\mathbf{V}', \mathbf{E}_3)$, где $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2 \cup \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}), \mathbf{i} \neq \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{V}_2\}$. Легко видеть, что граф $\mathbf{G}_3$ полный. Теперь, используя (10), однозначно определяем множество матриц $\{\Psi_{\mathbf{ii}}, \mathbf{i} \in \mathbf{V}'\}$.

Используя набор матриц (4), мы нашли все элементы матриц из набора (5). Ввиду того, что по условию $\cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{V}'} \mathbf{i} = V$, получаем, что мы однозначно определи все элементы матрицы Ψ. Матрица Ψ имеет ранг равный k, поэтому матрица A определяется с точностью до ортогонального вращения. Зная матрицу Ψ, мы однозначно определяем матрицу $\Theta = \Sigma - \Psi$. Теорема доказана.

Верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbf{C} = (\mathbf{V_C}, \mathbf{E_C})$ *простой цикл графа* G. *Тогда*

$$\prod_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in \mathbf{E_C}} |\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}| \geqslant 0. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{V_C} = \{\mathbf{i}_1, ..., \mathbf{i}_l\}$ и $\mathbf{E_C} = \{(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2), ..., (\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_l)\}$. Используя (4), получаем

$$\prod_{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in \mathbf{E_C}} |\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}| = |\Sigma_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_s}| \prod_{s=1}^{l-1} |\Sigma_{\mathbf{i}_s,\mathbf{i}_{s+1}}|$$

$$= |A_{\mathbf{i}_1}(A_{\mathbf{i}_s})^t| \prod_{s=1}^{l-1} |A_{\mathbf{i}_s}(A_{\mathbf{i}_{s+1}})^t|$$

$$= \prod_{s=1}^{l} |A_{\mathbf{i}_s}(A_{\mathbf{i}_s})^t| \geqslant 0.$$

При доказательстве мы воспользовались тем, что матрица $A_{\mathbf{i}_s}(A_{\mathbf{i}_s})^t$ является неотрицательно определенной.

Утверждение 1 допускает следующее обобщение. Пусть $\mathbf{V}' = \{\mathbf{i}_1, ..., \mathbf{i}_L\}$. Определим элементы $L \times L$ матрицы D следующим образом:

$$d_{fm} = \begin{cases} sign|\Sigma_{\mathbf{i}_f,\mathbf{i}_m}|, & \text{если } (\mathbf{i}_f, \mathbf{i}_m) \in \mathbf{E}'; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Утверждение 2. *Для матрицы* D *найдется такая диагональная (с 1 и -1 на диагонали) матрица* $U = diag\{u_1, ..., u_L\}$ *, что матрица*

$$UDU \quad (11)$$

имеет только неотрицательные элементы.

Утверждение 2 является простым критерием для проверки возможности произвольной матрице быть матрицей ковариаций наблюдаемых случайных величин модели (1).

Проверка условий идентифицируемости

Пусть $S = (s_{ij})$ – выборочная (подправленная на несмещенность) матрица ковариаций, построенная по N независимым реализациям наблюдаемых случайных величин модели (1). Для проверки условий идентифицируемости нам необходимо проверять гипотезы, имеющие вид: $H_{\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}} : |\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}| \neq 0$. Для проверки таких гипотез можно использовать статистику $|S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$, которая является асимптотически несмещенной оценкой для $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$. Подправленная на несмещенность оценка для $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$ имеет следующий вид [Drton et al., 2008]:

$$|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}| = \frac{(N-1)^{k-1}}{(N-k)...(N-2)}|S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|. \quad (12)$$

Статистика $|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|$ ассимптотически (при $N \to \infty$) имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$ и дисперсией $\mathbf{Var}_{\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|$, которая является полиномом, зависящем от элементов матрицы Σ [Drton et al., 2007]. В работе [Drton et al., 2008] получен точный вид этой дисперсии:

$$\mathbf{Var}_{\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|$$
$$= C|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|^2\{\frac{(N+1)!}{(N+1-k)!} - \frac{(N-1)!}{(N-k-1)!}\}$$
$$+C|\Sigma_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j},\mathbf{i}\cup\mathbf{j}}|(\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)!\frac{(N+1)!}{(N+1-m)!}$$
$$\times(-1)^m tr\{(\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\Sigma^{\mathbf{i},\mathbf{j}})^{(m)}\}),$$

где $C = \frac{1}{(N-k)\dots(N-1)}$, $\Sigma^{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ – соответствующая подматрица матрицы $(\Sigma_{\mathbf{i}\cup\mathbf{j},\mathbf{i}\cup\mathbf{j}})^{-1}$, а матрица $(\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\Sigma^{\mathbf{i},\mathbf{j}})^{(m)}$ состоит из всех $m\times m$ миноров матрицы $\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\Sigma^{\mathbf{i},\mathbf{j}}$.

Заменяя в дисперсии $\mathbf{Var}_{\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|$ элементы матрицы $\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ соответствующими состоятельными оценками $S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$, мы получим состоятельную оценку $\mathbf{Var}_{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|$ для дисперсии статистики $|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|$. Легко видеть, что

$$\frac{|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}| - |\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|}{\sqrt{\mathbf{Var}_{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|\widetilde{S_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}|}} \qquad (13)$$

ассимптотически (при $N\to\infty$) имеет стандартное нормальное распределение.

Используя (13), построим приближенный α-доверительный интервал $[q_\alpha^1, q_\alpha^2]$ для $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$. Гипотеза $H_{\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}$ будет (на уровне значимости α) отвергаться, если интервал $[q_\alpha^1, q_\alpha^2]$ содержит 0. Проверка условий идентифицируемости заключается в следующем. Пусть $[\mathbf{E}]$ – число ребер графа $\mathbf{G}$. Задаемся уровнем значимости α. Затем строим $\alpha/[\mathbf{E}]$ – доверительные интервалы $[q_\alpha^1, q_\alpha^2]_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ для $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$, $(\mathbf{i},\mathbf{j})\in\mathbf{E}$. Если доверительный интервал $[q_\alpha^1, q_\alpha^2]_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ содержит 0, то удаляем соответствующее ребро из графа $\mathbf{G}$. Если после удаления ребер получившийся граф $\mathbf{G}'' = (\mathbf{V}'', \mathbf{E}'')$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то считаем, что гипотеза о том, что модель является глобально идентифицируемой, не отвергается на уровне значимости α.

Выборочный вариант критерия (11) выглядит следующим образом. Вместо графа $\mathbf{G}'$, для построения матрицы D используем граф $\mathbf{G}'' = (\mathbf{V}'', \mathbf{E}'')$, полученный при проверке условий идентифицируемости по имеющимся данным:

$$d_{fm} = \begin{cases} sign|S_{\mathbf{i}_f,\mathbf{i}_m}|, & \text{если } (\mathbf{i}_f,\mathbf{i}_m)\in\mathbf{E}''; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если получившаяся матрица не удовлетворяет условиям утверждения 2, то гипотеза о том, что выборка была сгенерирована моделью 1, на уровне значимости α отвергается.

Литература

Стафеев С. В. Факторный анализ с зависимыми остатками: проблема идентифицируемости и оценка параметров // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. 2005. Вып. 6. С. 119–130.

Стафеев С. В. О модели факторного анализа с зависимыми остатками // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14, вып. 6. С. 1058–1064.

Стафеев С. В. Полиномиальные инварианты для моделей с латентными переменными // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. 2010. № 3. С. 83–86.

Drton M., Sturmfels B., Sullivant S. Algebraic factor analysis: tetrads, pentads and beyond // Probability Theory and Related Fields. 2007. Vol. 138. P. 463–493.

Drton M., Massam H., Olkin I. Moments of minors of Wishart matrices // Annals of Statistics. 2008. Vol. 36(5). P. 2261–2283.

Drton M., Foygel R., Sullivant S. Global identifiability of linear structural equation models // Annals of Statistics. 2011. Vol. 39(2). P. 865–886.

Harman H. Modern Factor Analysis. University of Chicago Press, third edition, 1976. 450 p.

Stafeev S. On the parameter estimation of recursive "bow-free" models with latent variables // Proceedings of the Eighth International Minsk Conference Computer Data Analysis and Modeling: Complex Stochastic Data and Systems. Minsk, 2007. Vol. 1. P. 178–181.

Stafeev S. On the method for finding invariants of factor analysis models // Computer Data Analysis and Modeling. Proceedings of the Ninth International Conference. Minsk, 2010. Vol. 1. P. 211–214.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Стафеев Сергей Вячеславович
научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: stafeev@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Stafeev, Sergey
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: stafeev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370