Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2011. С. 120–124

УДК 519.7

МУЛЬТИНОМИАЛЬНЫЙ ЛОГИТ-АНАЛИЗ И КОНКУРЕНТНОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА РЫНКЕ

А. В. Щипцова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

В статье рассматривается применение мультиномиального логит-анализа для моделирования спроса на рынке одного товара, зависящего от цены и расстояния от потребителя до участника рынка. Исследуется конкурентное поведение игроков на рынке с помощью понятия равновесия по Нэшу. Представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: мультиномиальный логит-анализ, дуополия Хотеллинга на плоскости, равновесие по Нэшу.

A. V. Shchiptsova. MULTINOMIAL LOGIT ANALYSIS AND COMPETITIVE BEHAVIOUR IN THE MARKET

The paper considers application of the multinomial logit model for estimation of the customer demand for a product in the market. Customer demand depends on the price and distance from a customer to a market actor. We examine the players' competitive behaviour in the market using Nash equilibrium. Computational modeling with multinomial logit analysis is presented.

Key words: multinomial logit analysis, Hotelling's duopoly on the plane, Nash equilibrium.

Введение

Дуополия Хотеллинга [Hotelling, 1929] описывает поведение участников рынка – продавцов одного товара. В модели предполагается, что на величину потребительского спроса влияют установленная игроком цена и транспортные расходы потребителя, равные расстоянию от него до игрока. Хотеллинг нашел равновесные цены на линейном рынке и поставил задачу о размещении игроков на рынке. В дальнейшем было доказано [d'Aspremont et al., 1979], что в такой постановке равновесие в задаче о размещении не существует.

Салоп [Salop, 1979] распространил дуополию Хотеллинга на модель «кругового» города, где участники рынка располагаются вдоль окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. В работе [Mazalov, Sakaguchi, 2003] показано, что решение задачи о размещении существует на плоском рынке с квадратичными транспортными расходами.

В работах [Щипцова, 2009; Мазалов и др., 2010] исследовалась модель дуополии Хотеллинга на плоскости. Ценовое равновесие и решение задачи о размещении были построены для случая рыночной конкуренции между двумя участниками рынка. Увеличение числа игроков в модели Хотеллинга ведет к существенному усложнению задачи.

Данная статья посвящена задаче поиска ценового равновесия для n игроков в рамках мультиномиальной логит-модели, предложенной МакФадденом [McFadden, 1973]. Товар, предлагаемый участником рынка, является одной из потребительских альтернатив. Как и в дуополии Хотеллинга, будем считать, что выбор потребителя зависит от цены и расстояния между ним и участником рынка.

Мультиномиальная логит-модель

Пусть на рынке есть m потребителей из множества $I = \{1 \dots m\}$. Каждый потребитель делает выбор из конечного множества альтернатив $J = \{1 \dots n\}$. Альтернатива для потребителя состоит в приобретении товара у j-го участника рынка. Выбор i-го потребителя опишем с помощью решающей функции $d(i) : I \to J$.

Будем считать, что i-й потребитель стремится максимизировать полезность u_{ij}, которую он получает от приобретения товара у j-го участника рынка. Функция полезности u_{ij} имеет вид

$$u_{ij} = V_{ij} + \varepsilon_{ij},$$

где V_{ij} – детерминированная составляющая, зависящая от свойств самой альтернативы и предпочтений потребителя, ε_{ij} – стохастическая.

Вероятность выбора i-м потребителем альтернативы j равна вероятности того, что полезность u_{ij} наибольшая из возможных. Таким образом,

$$\begin{aligned} &P\left(d(i) = j\right) \\ &= P\left(u_{ij} \geqslant u_{ir}, \forall r \in \{1 \dots n\} : r \neq j\right) \\ &= P\left(u_{ij} = \max_{r \in \{1 \dots n\}} u_{ir}\right). \end{aligned}$$

МакФадден [McFadden, 1973] предложил мультиномиальную логит-модель, в которой стохастические составляющие функции полезности ε_{ij} есть независимые случайные величины, распределенные по закону Гумбеля (экстремальное распределение I-го типа) с соответствующими функциями распределения и плотности

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= e^{-e^{-\beta(\varepsilon-\alpha)}}, \beta > 0, \\ f(\varepsilon) &= \beta e^{-\beta(\varepsilon-\alpha)e^{-e^{-\beta(\varepsilon-\alpha)}}}. \end{aligned}$$

Тогда в предположении о независимости ε_{ij} вероятность выбора альтернативы j представима в явном виде

$$P\left(d(i) = j\right) = \frac{e^{V_{ij}}}{\sum\limits_{r=1}^{n} e^{V_{ir}}}. \qquad (1)$$

Формула вероятности выбора делает мультиномиальную логит-модель привлекательной для практического применения. Увеличение числа альтернатив не ведет к усложнению модели.

Ценовое равновесие в мультиномиальной логит-модели

Пусть рынок потребительских услуг представлен кругом радиуса единица с равномерным распределением населения. Плотность населения равна единице. Каждый из участников рынка в точке (x_j, y_j) $(j = 1 \dots n)$ предлагает потребителям один и тот же товар по цене p_j и стремится получить наибольшую прибыль от продажи. Спрос является абсолютно неэластичным. Без потери общности будем считать, что себестоимость товара для участников рынка равна нулю.

Как и в дуополии Хотеллинга, будем предполагать, что кроме цены за приобретение товара потребитель также уплачивает транспортные расходы за его доставку. Таким образом, полезность приобретенного товара у j-го участника рынка представима в виде

$$u_j(p_j, x, y) = -\beta_1 p_j - \beta_2 \rho_j(x, y) + \varepsilon_j,\ j = 1 \dots n,$$

где $\beta_1, \beta_2 \geqslant 0$ – некоторые константы, $\rho_j(x, y) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$ – расстояние от потребителя до продавца и ε_j – стохастическая составляющая полезности, одинаковая для всех потребителей. Будем предполагать, что ε_j – независимые случайные величины, распределенные по закону Гумбеля.

Каждый потребитель стремится получить максимальную полезность при выборе j-го участника рынка.

Таким образом, из (1) вероятность приобретения товара у j-го участника при установленных ценах $p_1, \dots p_n$ для потребителя в точке (x, y) составит

$$\begin{aligned} P_j(x, y) &= \frac{e^{-\beta_1 p_j - \beta_2 \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-\beta_1 p_i - \beta_2 \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}}}, \\ &\qquad j = 1 \dots n-1, \\ P_n(x, y) &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i(x, y). \end{aligned} \qquad (2)$$

Доля потребителей, выбирающих товар j-го игрока, будет равна

$$S_j = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} P_j(x,y)dxdy, \quad j = 1 \dots n-1, \qquad S_n = \pi - \sum_{i=1}^{n-1} S_i. \tag{3}$$

Мы определили бескоалиционную игру

$$\Gamma = \Big\langle \{1 \dots n\}, \{p_j \in [0,+\infty), \, j = 1 \dots n\}, \big\{H_j = p_j S_j, \, j = 1 \dots n-1, \; H_n = \pi - \sum_{i=1}^{n-1} S_i\big\} \Big\rangle. \tag{4}$$

Из вида (2) получаем, что

$$\frac{\partial P_j(x,y)}{\partial p_j} = -\beta_1 P_j(x,y)(1 - P_j(x,y)).$$

Точка равновесия по Нэшу $(p_1^*, \dots, p_n^*)$ в игре (4) удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_j}{\partial p_j} = S_j + p_j \frac{\partial S_j}{\partial p_j} = 0, \, j = 1 \dots n-1, \\ \frac{\partial H_n}{\partial p_n} = \pi - \sum\limits_{i=1}^{n-1} S_i + p_n \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial S_i}{\partial p_i} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из (2), (3) и (5) получаем, что равновесие на рынке потребительских услуг, территория которого представлена единичным кругом, отвечает условиям

$$\begin{cases} \frac{\partial H_j}{\partial p_j} = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} P_j(x,y)\Big(1 - \beta_1 p_j \big(1 - P_j(x,y)\big)\Big) dxdy = 0, \, j = 1 \dots n-1, \\ \frac{\partial H_n}{\partial p_n} = \pi - \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i(x,y)\Big(1 + \beta_1 p_n \big(1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i(x,y)\big)\Big) dxdy = 0. \end{cases}$$

Моделирование

Мультиномиальная логит-модель использовалась при проведении численного моделирования конкурентного поведения игроков на двух типах рынков: рынке по предоставлению парикмахерских услуг (цена на мужскую модельную стрижку) и рынке услуг АЗС (цена на дизельное топливо). Расстояние между потребителем и поставщиком услуги рассчитывалось в евклидовой метрике.

Рынок парикмахерских услуг рассматривался в рамках одного городского микрорайона (мкр. Древлянка г. Петрозаводска) с количеством игроков $n = 4$. Территория микрорайона была смоделирована кругом радиуса единица (рис. 1).

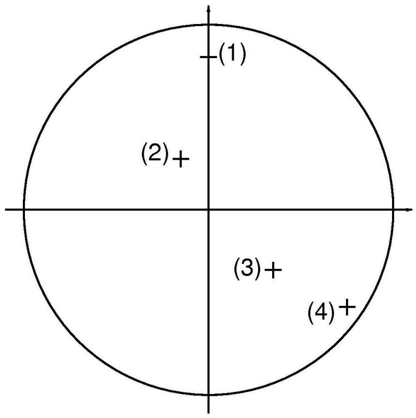

Рис. 1. Расположение игроков на рынке парикмахерских услуг ($n = 4$)

Конкурентное поведение игроков на рынке услуг АЗС ($n = 16$) исследовалось в пределах г. Петрозаводска (исключая мкр.-ны Соломенное, Сулажгора и Птицефабрика), модель города была представлена полукругом радиуса единица (рис. 2).

Ценовое равновесие было найдено как решение системы (5) для соответствующей области. Оценка параметров мультиномиальной логит-модели получена с помощью метода максимального правдоподобия. В качестве единицы цены было взято среднее отклонение от минимальной цены из существующих реальных цен, предлагаемых участниками рынка. Себестоимость услуги была принята как минимальная реальная цена.

Результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2. Полученные данные показывают, что поведение игроков на рынке парикмахерских услуг близко к оптимальному. Участники рынка услуг АЗС отклоняются от равновесия по Нэшу в рамках мультиномиальной логит-модели.

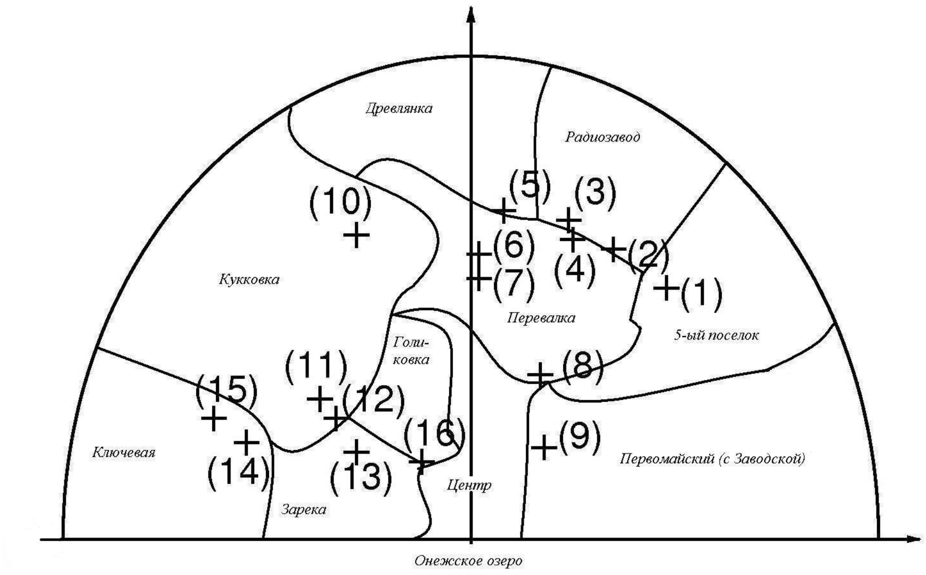

Рис. 2. Расположение игроков на рынке услуг АЗС ($n = 16$)

Таблица 1. Ценовое равновесие на рынке парикмахерских услуг($n = 4$, $\beta_1 = 292,755$, $\beta_2 = 292,609$)

Игрок	Координаты	Цена в равновесии	Реальная цена (руб.)	Модельная цена (руб.)
1	(0, 0,825)	0,449006	230	212,348
2	(–0,15, 0,275)	0,433218	250	211,913
3	(0,35, –0,325)	0,447982	230	212,32
4	(0,75, –0,525)	0,214147	200	205,89

Таблица 2. Ценовое равновесие на рынке услуг АЗС ($n = 16$, $\beta_1 = 702,496$, $\beta_2 = 702,405$)

Игрок	Координаты	Цена в равновесии	Реальная цена (дизель) (руб.)	Модельная цена (руб.)
1	(0,48, 0,52)	0,158352	26,10	25,35
2	(0,35, 0,6)	0,0580351	26,95	25,25
3	(0,24, 0,66)	0,0452477	26,30	25,25
4	(0,25, 0,62)	0,0237764	26,00	25,20
5	(0,08, 0,68)	0,111941	26,10	25,30
6	(0,02, 0,59)	0,289	26,10	25,50
7	(0,02, 0,54)	0,125509	26,90	25,35
8	(0,17, 0,34)	0,0540679	26,00	25,25
9	(0,18, 0,19)	0,123205	25,60	25,35
10	(–0,28, 0,63)	0,20681	27,30	25,40
11	(–0,37, 0,29)	0,0804116	25,40	25,30
12	(–0,33, 0,25)	0,111806	26,30	25,30
13	(–0,28, 0,18)	0,0952577	26,25	25,30
14	(–0,55, 0,2)	0,0459539	26,00	25,25
15	(–0,63, 0,25)	0,0883109	25,20	25,30
16	(–0,12, 0,16)	0,142341	26,30	25,35

Заключение

В статье найдены условия, которым удовлетворяет оптимальное по Нэшу конкурентное поведение игроков на рынке одного товара. Применение мультиномиального логит-анализа для моделирования потребительского спроса позволило получить условия ценового равновесия для произвольной размерности задачи по количеству участников рынка ($n \geqslant 2$). Проведено численное моделирование для рынка потребительских услуг при $n = 4$ и $n = 16$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (10-01-00089-а) и Отделения Математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Литература

Мазалов В. В., Щипцова А. В., Токарева Ю. С. Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, вып. 4. С. 91–100.

Шандор З. Мультиномиальные модели дискретного выбора // Квантиль. 2009. № 7. С. 9–19.

Щипцова А. В. Задача о размещении // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН. 2009. Вып. 9. С. 53–69.

d'Aspremont C., Gabszewicz J., Thisse J. F. On Hotelling's "Stability in competition" // Econometrica. 1979. Vol. 47, N. 5. P. 1145–1150.

Heiss F. Structural choice analysis with nested logit models // The Stata Journal. 2002. Vol. 2, N. 3. P. 227–252.

Hotelling H. Stability In Competition // The Economic Journal. 1929. Vol. 39. Issue 153. P. 41–57.

Mazalov V. V., Sakaguchi M. Location Game On The Plane // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, N. 1. P. 1–13.

McFadden D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior / Ed. P. Zarembka // Frontiers in econometrics. New York: Academic Press, 1973. P. 105–142.

Salop S. Monopolistic competition with outside goods // Bell journal of Economics. 1979. Vol. 10. P. 141–156.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Щипцова Анна Владимировна
аспирантка
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: ann_sh@inbox.ru
тел.: (8142) 766312

Shchiptsova, Anna
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: ann_sh@inbox.ru
tel.: (8142) 766312