Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 18–21

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

М. Е. Галахова[1], **А. Н. Кириллов**[2]

[1] *Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров*
[2] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Рассмотрена задача управляемости динамических систем со структурными изменениями. Предложен метод управления дискретным состоянием линейной последовательной системы.

Ключевые слова: управление, переменная структура, гибридная система.

M. E. Galakhova, A. N. Kirillov. THE LINEAR VARIABLE STRUCTURE SYSTEM CONTROL

The problem of controllability of variable structure dynamical systems is considered. A method for controlling the discrete state of a linear sequential system is proposed.

Key words: control, variable structure, hybrid system.

Введение

Проблема управляемости динамических систем является одной из наиболее важных в теории управления и далека от своего решения. Для линейных стационарных систем управления известен критерий полной управляемости Р. Калмана, а для нестационарных – достаточный признак Н. Н. Красовского при условии непрерывной дифференцируемости матриц коэффициентов вплоть до $(n-1)$-го порядка, где n – порядок системы. Имеется критерий устойчивости линейных систем с аналитическими коэффициентами [4]. Для нелинейных систем известны результаты по локальной управляемости. Общих результатов, разрешающих проблему, как в линейном случае, нет и, скорее всего, их невозможно получить. Надо учитывать качественные свойства динамических систем, классификация которых нереальна. Для гибридных систем, к которым относятся системы с изменяющейся структурой, даже в линейном стационарном случае результатов, сравнимых по завершенности с критерием Калмана, нет. Это связано со сложностью исследуемого объекта и продолжающимся формированием самого понятия гибридной системы. Неясно также, что понимать под управляемостью гибридной системы, сочетающей непрерывное и дискретное поведение. Некоторые результаты в этом направлении для линейных гибридных систем представлены в [3]. В настоящей статье рассмотрена задача управления дискретным состоянием линейной системы с переменной структурой. Предложен метод построения управления, целенаправленно изменяющего структуру системы.

Замечание 1. Авторы не стремятся к обобщающим построениям, поэтому не будет рассматриваться громоздкая модель системы со структурными изменениями. Наоборот, специфика задач управляемости систем с переменной структурой будет показана на относительно простой модели гибридной системы.

S-линейная система

Сложные динамические системы, состоящие из подсистем, характеризуются тем, что их состав и взаимосвязи между подсистемами изменяются в процессе функционирования. В [1, 2] был предложен подход для описания динамики структурных изменений в системе. Предположим, что в состав системы S могут входить подсистемы $S_i \in \{S_1, \dots, S_n\}$, подключаясь к S или отключаясь от нее. При этом подсистемы, входящие в S, взаимодействуют между собой. Введем вектор $\gamma(t) = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ такой, что $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S, $\gamma_i(t) = 0$ – в противном случае. Вектор $\gamma(t)$ называется внешней структурой системы S в момент времени t. Для задания динамики структуры $\gamma(t)$ в [1] предложено понятие системы со структурными изменениями (ССИ), которую можно отнести к классу гибридных систем. При этом для реализации ССИ был разработан метод динамической декомпозиции. Суть его состоит в том, что для описания динамики системы, помимо фазовых переменных, вводятся дополнительные переменные, задаваемые дифференциальными уравнениями. При достижении этими переменными некоторых пороговых значений происходит отключение или подключение подсистемы к системе. Тем самым система переходит в другое фазовое пространство, возможно, не мгновенно, а через некоторое время. Если допустимы только структуры вида $\gamma = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где первые k элементов вектора структуры равны 1, а остальные – 0, и переход между структурами происходит добавлением $(k+1)$-й единицы или исключением k-й единицы, то система S называется последовательной ССИ, или S-системой. Если возможны произвольные структуры и переходы между ними, то S называется параллельной ССИ, или P-системой. Будем говорить, что S-система находится в состоянии $S(k)$, если она имеет структуру $\gamma = (1, \dots, 0, \dots, 0)$ с единицами на k первых местах. Рассмотрим линейную S-систему [1], которая при условии

$$y(t) \in \Delta_k = (y_k, y_{k+1}) \tag{1}$$

задается уравнениями

$$\dot{X}_k = A_k X_k, \qquad \dot{y} = B_k^T X_k + u, \tag{2}$$

где $X_k^T = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ – состояние системы, $\mathbb{R} \ni y(t)$ – эволюционное время [1], A_k – квадратная матрица порядка k с постоянными элементами a_{ij}, $B_k^T = (b_1, ..., b_k) \in \mathbb{R}^k$ – постоянный вектор, u – управление, y_k – заданные постоянные (пороговые значения), $k = 1, ..., n$, $y_1 = -\infty$, $y_{n+1} = +\infty$. Система S, задаваемая уравнениями (1), (2), находится в состоянии $S(k)$.

Далее, пусть при попадании траектории системы (1), (2) из области $\mathbb{R}^k \times \Delta_k$ на плоскость $y = y_k$ в некоторый момент времени t_k происходит переход из состояния $S(k)$ в состояние $S(k-1)$, $2 \leqslant k \leqslant n$, а при попадании на плоскость $y = y_{k+1}$ в момент времени t_{k+1} происходит переход в состояние $S(k+1)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. При этом отображения $\varphi_{k,k\pm1}$, осуществляющие переход из $S(k)$ в $S(k+1)$, имеют вид:

$$\varphi_{k,k-1} : Z_k \to C(k-1,k)Z_k + E_{k-1}(-\varepsilon),$$

где $Z_k = (x_1, ..., x_k, y_k)^T$, $E_{k-1}(-\varepsilon) = (0, ..., 0, -\varepsilon)^T$, $-\varepsilon)$ на k-ом месте, причем

$$0 \leqslant \varepsilon < min_k(y_{k+1} - y_k), k = 1, ..., n-1,$$

$C(k-1,k)$ – матрица размерности $k \times (k+1)$ с постоянными элементами c_{ij}, причем $c_{k,k+1} = 1$, $c_{k,j} = 0$, $j = 1, ..., k$, $c_{i,k+1} = 0$, $i = 1, ..., k-1$,

$$\varphi_{k-1,k} : Z_{k-1} \to D(k,k-1)Z_{k-1} + E_{k1}(\varepsilon),$$

где $D(k,k-1)$ – матрица размерности $(k+1) \times k$, с элементами d_{ij}, $d_{k+1,k} = 1$, $d_{k+1,j} = 0$, $j = 1, ..., k-1$, $d_{i,k} = 0$, $i = 1, ..., k$. При этом $\varphi_{k,k-1}(Z_k)$, $\varphi_{k-1,k}(Z_{k-1})$ – начальные данные для систем S_k, S_{k-1}, соответственно, а переключение происходит мгновенно.

Задача: построить управление u, переводящее систему S за конечное время из состояния S_k в состояние S_m, $k \neq m, k, m = 1, ..., n$.

Замечание 2. Рассмотренная задача отличается от традиционной задачи управления, состоящей в переводе системы из одного фазового состояния в другое. Данная система характеризуется как непрерывным состоянием (X_k, y), так и дискретным – $S(k)$. Управление происходит по дискретному состоянию.

Управление

Ниже будет предложен алгоритм построения допустимого управления вида $u = p_1 x_1 + ... + p_{k(t)} x_{k(t)}$, для которого коэффициенты p_i будут определяться в явном виде. Здесь $k(t)$–

целочисленная функция, принимающая значения из множества $\{1, ..., n\}$. Перейдем к построению управления. Надо показать, что с помощью допустимого управления траектория может из любой начальной точки $M_{k0} = (X_{k0}, y_0)$, такой, что $y_0 \in \Delta_k$, попасть на гиперплоскость $y = y_k$ или $y = y_{k+1}$. Тогда, переходя от S_k к $S_{k\pm1}$, придем к терминальной системе S_m.

Будем полагать, что $X_k = 0$ – единственное асимптотически устойчивое положение равновесия системы $\dot{X}_k = A_k X_k$. Тогда $det A_k \neq 0$. Пусть $X_{k0} \neq 0$. Подставив допустимое управление в (2), получим

$$\dot{y} = (b_1 + p_1)x_1 + ... + (b_k + p_k)x_k. \quad (3)$$

Нетрудно показать [2], что система (1), (3) имеет интегральные плоскости $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} y = c$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $(\alpha_1, ..., \alpha_{k+1})$ – ненулевое решение системы

$$a_{1i}\alpha_1 + ... + a_{ki}\alpha_k + (b_i + p_i)\alpha_{k+1} = 0, \quad (4)$$

где $i = 1, ..., k$. Если $\alpha_{k+1} = 0$, то, в силу условия $det A_k \neq 0$, получим $\alpha_i = 0$, $i = 1, ..., k$, поэтому в ненулевом решении $\alpha_{k+1} \neq 0$. Идея построения управления, решающего задачу, состоит в нахождении вектора $(p_1, ..., p_k)$, обеспечивающего такое положение интегральной плоскости, при котором она пересекала бы ось Y при $y > y_{k+1}$ (или при $y < y_k$). Тогда в силу асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1) траектории, приближаясь к нему, пересекут плоскость $y = y_{k+1}$ или $y = y_k$. В результате произойдет переход к системе S_{k+1} (или S_k).

Пусть $y = \bar{y}$ при $X_k = 0$. Тогда из уравнения интегральной плоскости

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} y =$$

$$= \alpha_1 x_{10} + ... + \alpha_k x_{k0} + \alpha_{k+1} y_0$$

получаем

$$\bar{y} = y_0 - \frac{1}{\alpha_{k+1}}(\alpha_1 x_{10} + ... + \alpha_k x_{k0}). \quad (5)$$

Из системы (4) находим

$$\alpha_i = \alpha_{k+1}\frac{det A_{ki}}{det A_k},$$

где A_{ki} – матрица, полученная из A_k заменой в ней i-го столбца на $-(b_1 + p_1, ..., b_k + p_k)^T$. Тогда из (5) получаем

$$\bar{y} = y_0 - \frac{1}{det A_k}(det A_{k1} x_{10} + ... + det A_{kk} x_{k0}). \quad (6)$$

Далее

$$det A_{ki} = -\sum_{j=1}^{k}(b_j + p_j)\hat{A}_{(k-1),i}(j),$$

где $\hat{A}_{(k-1),i}(j)$ – алгебраическое дополнение элемента j-й строки, i-го столбца матрицы A_{ki} или, что то же самое, матрицы A_k, $k-1$ – порядок соответствующего минора. Тогда из (5) получаем

$$\bar{y} = y_0 + \frac{1}{det A_k}\sum_{i,j=1}^{k}(b_j + p_j)\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0}. \quad (7)$$

Предположим, что следует перейти из состояния S_k в S_{k+1}. Для этого надо найти решение $p_1, ..., p_k$ неравенства

$$y_0 + \frac{1}{det A_k}\sum_{i,j=1}^{k}(b_j + p_j)\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} > y_{k+1},$$

которое сводится к неравенству

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} >$$

$$> det A_k(y_{k+1} - y_0) - \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot \sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0}.$$

Лемма 1. *Существует* $j \in \{1, .., k\}$ *такое, что* $\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} \neq 0$.

Доказательство. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} = det A_k(j),$$

где матрица $A_k(j)$ получена из A_k заменой ее j-й строки строкой X_{k0}^T. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $det A_k(j) = 0$ при всех $j = 1, .., k$. Тогда, раскладывая определители $det A_k(j)$ по j-й строке каждый, получаем систему равенств

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_{(k-1),i}(j)x_{i0} = 0, j = 2, ..., k. \quad (8)$$

Поскольку по условию $X_{k0} \neq 0$, то найдется компонента $x_{i0} \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $x_{10} \neq 0$. Далее, раскладывая $det A_k$ по первому столбцу и выражая алгебраические дополнения, входящие в это разложение из равенств (8), получаем

$$det A_k = \sum_{j=1}^{k} a_{j1}\hat{A}_{(k-1)1}(j) =$$

$$= -\frac{1}{x_{10}} \sum_{i=2}^{k} x_{i0} \sum_{j=1}^{k} a_{j1} \hat{A}_{(k-1)i}(j) = 0.$$

Последнее равенство нулю обязано свойству "фальшивого разложения" определителей: сумма произведений элементов одного столбца квадратной матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов других столбцов равна нулю. Поскольку по предположению $detA_k \neq 0$, то получили противоречие, доказывающее лемму. □

Далее, пусть при некотором $j = l$ имеем $A(l) := \sum_{i=1}^{k} \hat{A}_{(k-1),i}(l) x_{i0} = 0$. Тогда для разрешимости неравенства, предшествующего лемме, достаточно, чтобы p_l удовлетворяло неравенству

$$p_l > \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \hat{A}_{(k-1),i}(l) x_{i0}} (detA_k(y_{k+1} - y_0) - \Sigma_1 - \Sigma_2) \tag{9}$$

если $A(l) > 0$, где

$$\Sigma_1 = \sum_{i,j=1}^{k} b_j x_{i0} \hat{A}_{(k-1),i}(j),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{j=1, j \neq l}^{k} p_j \sum_{i=1}^{k} x_{i0} \hat{A}_{(k-1),i}(j),$$

или противоположному неравенству, если $A(l) < 0$. Переход от S_k к S_{k-1} осуществляется аналогично, с той разницей, что неравенства (9) в случаях $A(l) > 0$ и $A(l) < 0$ берутся противоположными. Получаем окончательный результат.

Теорема 1. *Пусть $X_k = 0$ – единственное асимптотически устойчивое положение равновесия системы (1) при $k = 1, ..., n$. Тогда управление $u = p_1 x_1 + ... + p_k x_k$, где коэффициенты p_i удовлетворяют (9), обеспечивает переход системы из состояния S_k в S_{k+1} при любом начальном $X_k \neq 0$. Если же выполняются противоположные неравенства (при $A(l) > 0$ и $A(l) < 0$, соответственно), то происходит переход от S_k к S_{k-1}.*

Замечание 3. В силу неоднозначности значений коэффициентов p_i управления можно поставить задачу оптимальной стабилизации структуры в смысле некоторого критерия.

Заключение

Предложен метод решения задачи управляемости линейной последовательной системой со структурными изменениями. При этом поставлена нетрадиционная задача управления дискретным состоянием системы, а не ее фазовым вектором. Строится соответствующее управление в виде линейной обратной связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках реализации стратегического развития ПетрГУ.

Литература

1. *Кириллов А. Н.* Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. № 4. С. 127–131.

2. *Кириллов А. Н.* Задача оптимального управления в системе со структурными изменениями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 9. С. 2–7.

3. *Куржанский А. Б., Точилин П. А.* Слабоинвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. № 11. С. 1523–1533.

4. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Autom. Control. 1965. № 1. P. 112–114.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Галахова Мария Евгеньевна
аспирантка
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров
ул. Ивана Черных, 4, Санкт-Петербург, Россия, 198095
эл. почта: secretgate@mail.ru
тел.: (8812) 7712780

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Galakhova, Mariya
State Technological University of Plant Polymers
4 Ivan Chernykh St., 198095 Saint-Petersburg, Russia
e-mail: secretgate@mail.ru
tel.: (8812) 7712780

Kirillov, Alexandr
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370