Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 89–93

УДК 519.2

СГОРИТ ЛИ ДЕРЕВО ПРИ ПОЖАРЕ В СЛУЧАЙНОМ ЛЕСЕ?

Ю. Л. Павлов, Е. В. Хворостянская

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Рассматривается множество $F_{n,N}$ всех возможных лесов, состоящих из $N \geqslant 2$ упорядоченных некорневых деревьев и n помеченных вершин, на котором задано равномерное распределение вероятностей. При $n/N \to \infty$ получены предельные теоремы для числа несгораемых вершин одного дерева в модели распространения огня в случайном лесе из $F_{n,N}$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайный лес, случайное дерево, модель лесного пожара, плотность несгораемых вершин.

Yu. L. Pavlov, E. V. Khvorostyanskaya. WHETHER A TREE WILL BURN IN A FIRE IN RANDOM FOREST?

We consider the set $F_{n,N}$ of all possible forests, consisting of $N \geqslant 2$ ordered non-root trees and n labeled vertices. We specify the uniform distribution on $F_{N,n}$. When $n/N \to \infty$ limit theorems were obtained for the number of fireproof vertices of one tree in a forest fire model on a random forest taken from $F_{n,N}$.

K e y w o r d s: random forest, random tree, forest fire model, density of fireproof vertices.

В последние годы в теории случайных графов появилось новое направление – разработка и исследование моделей лесных пожаров (в англоязычной литературе они получили название "forest fire models"). Такие модели используются не только в ландшафтной экологии с целью определения наиболее устойчивой к пожарам топологии лесных насаждений (см., например, [1, 7]), но также в статистической физике [5–7] и в экономике, где с их помощью пытаются понять природу кризисов банковских систем и найти способы минимизации их последствий [1].

В статье [4] предложена одна из возможных моделей такого типа. В ней рассматривается случайный процесс распространения огня по ребрам некорневого дерева с помеченными вершинами. Пусть T_n – множество всех таких деревьев, имеющих n вершин. Хорошо известно, что T_n содержит n^{n-2} различных деревьев. Это значит, что равномерное распределение вероятностей на T_n приписывает каждому дереву меру n^{2-n}. Ребра случайного дерева могут находиться в одном из трех состояний: воспламеняемое, огнеупорное или сгоревшее. Введем случайную величину τ, имеющую распределение Бернулли:

$$\mathsf{P}\{\tau = 1\} = 1/\left(1 + n^{-\alpha}\right),$$
$$\mathsf{P}\{\tau = 0\} = n^{-\alpha}/\left(1 + n^{-\alpha}\right), \tag{1}$$

где α – некоторое положительное число. Процесс распространения огня происходит следующим образом. До начала пожара все ребра являются воспламеняемыми. В первый момент времени одно из ребер дерева выбирается равновероятно, и считается, что именно на нем начинается возгорание (это можно интерпретировать как «удар молнии»). Новое состояние ребра определяется с помощью случайной величины τ. Если $\tau = 1$, то ребро навсегда становится огнеупорным и в дальнейшем процессе не участвует. Поэтому такое ребро можно считать удаленным, и, следовательно, исходное дерево распадается на два поддерева. Если же $\tau = 0$, выбранное ребро считается сгоревшим, и вместе с ним сгорает все дерево. Таким образом, продолжение процесса возможно, только если первое ребро стало огнеупорным. В этом случае второй шаг состоит в равновероятном выборе одного из воспламеняемых ребер, содержащихся в двух поддеревьях, и его дальнейшее состояние, как и в случае первого ребра, определяется с помощью τ по той же схеме. Следующие шаги процесса происходят аналогично, и он закончится, когда в исходном дереве не останется воспламеняемых ребер.

Вершина дерева называется *несгораемой*, если после окончания процесса все инцидентные ей ребра начального дерева огнеупорны. Обозначим через ξ случайную величину, равную числу несгораемых вершин случайного дерева из T_n, и пусть $g(x)$ – плотность распределения вероятностей, имеющая вид:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x(1-x)^3}} \exp\left\{-\frac{x}{2(1-x)}\right\}, \quad x \in (0,1).$$

В [4] изучалось предельное поведение ξ при $n \to \infty$, и была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ справедливы утверждения:*

1. *Если $\alpha < 1/2$, то $\mathbf{P}\{\xi/n = 0\} \to 1$.*
2. *Если $\alpha = 1/2$, то для всех k таких, что $u = k/n \in (0,1)$*
$$n\,\mathbf{P}\{\xi = k\} = g(u)(1 + o(1)).$$
3. *Если $\alpha > 1/2$, то $\mathbf{P}\{\xi/n = 1\} \to 1$.*

В настоящей работе теорема 1 используется для исследования описанного выше процесса распространения огня на дереве в случайном лесе. Ниже, в соответствии с теоремой 1, рассматривается только нетривиальный случай $\alpha = 1/2$.

Пусть $F_{n,N}$ – множество всех возможных лесов, состоящих из N упорядоченных некорневых деревьев и n помеченных вершин. Зададим на этом множестве равномерное распределение вероятностей. Предположим, что на каждом дереве такого случайного леса пожар происходит независимо от других деревьев. Рассмотрим одно из деревьев, например, первое (это возможно, поскольку деревья упорядочены), и пусть ξ_1 – число несгораемых вершин этого дерева. Ниже изучается предельное поведение этой случайной величины в двух случаях: $n \to \infty$, N фиксировано и $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$. Обозначим

$$Q_N^{(1)} = \frac{2^{N-1}}{N} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{K_i} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!} e^{-k_j},$$

$$Q_N^{(2)} = \left(2\,(2/3)^{2/3}\,N\right)^{-1},$$

где $K_i = \{k_1, \ldots, k_{N-1} \geqslant 1, \quad k_1 + \ldots + k_{N-1} = N - 1 + i\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $n \to \infty$, $N \geqslant 2$ фиксировано. Тогда для всех k таких, что $k = uQ_N^{(1)}n$, $u \in \left(0, 1/Q_N^{(1)}\right)$,*

$$n\,\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = g\left(uQ_N^{(1)}\right) Q_N^{(1)}(1 + o(1)).$$

Теорема 3. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$. Тогда для всех k таких, что $k = uQ_N^{(2)}n$, $u \in \left(0, 1/Q_N^{(2)}\right)$,*

$$n\,\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = g\left(uQ_N^{(2)}\right) Q_N^{(2)}(1 + o(1)).$$

Доказательство теоремы 2. Обозначим через ν_1 объем выбранного дерева. По формуле полной вероятности

$$n\,\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \sum_{m=k}^{n-N+1} n\,\mathbf{P}\{\xi_1 = k | \nu_1 = m\}\, \mathbf{P}\{\nu_1 = m\}. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\nu_1 = m\} = C_n^m m^{m-2} b_{n-m,N-1}/b_{n,N}, \qquad (3)$$

где $b_{n,N}$, $b_{n-m,N-1}$ – число всех возможных лесов соответственно в $F_{n,N}$ и $F_{n-m,N-1}$. В книге [3] доказано равенство

$$b_{n,N} = n! \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_N \geqslant 1 \\ k_1 + \ldots + k_N = n}} \prod_{j=1}^{N} \frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!}. \qquad (4)$$

Согласно результатам статьи [2] при фиксированном N и $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$b_{n,N} \sim N n^{n-2}/2^{N-1}. \qquad (5)$$

Используя формулу Стирлинга, из (3), (5) и равенства (4) для $b_{n-m,N-1}$ находим, что при $m = n - N + 1 - i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \sim \frac{2^{N-1}}{N} \sum_{K_i} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{k_j^{k_j-2}}{k_j!}. \qquad (6)$$

Представим сумму (2) в виде

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = S_1 + S_2 + S_3, \qquad (7)$$

где

$$S_l = \sum_{L_l} n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\}, \qquad l = 1, 2, 3,$$

$$L_1 = \{n - N + 1 - A < m \leqslant n - N + 1\},$$
$$L_2 = \left\{n - An^{4/5} \leqslant m \leqslant n - N + 1 - A\right\},$$
$$L_3 = \left\{k \leqslant m < n - An^{4/5}\right\},$$

положительная постоянная A будет выбрана позднее.

Согласно теореме 1, при $m \in L_1 \bigcup L_2$

$$m\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\} = g\left(uQ_N^{(1)}\right)(1 + o(1)). \qquad (8)$$

Используя (6), (8), получаем равенство

$$S_1 = g\left(uQ_N^{(1)}\right) R_N, \qquad (9)$$

где величина R_N может быть сделана сколь угодно близкой к $Q_N^{(1)}$ выбором достаточно большого A.

Используя (3) и формулу Стирлинга, нетрудно найти, что при $m \in L_2 \bigcup L_3$

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} < C_1(n - m)^{-5/2}, \qquad (10)$$

здесь и далее символом $C_1, C_2, \ldots$ обозначены некоторые положительные постоянные (не всегда различные). Тогда если $m \in L_3$, то $\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} < C_1 A^{-5/2} n^{-2}$ и

$$S_3 < \sum_{L_3} n\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} < C_1 A^{-5/2},$$

а если $m \in L_2$, то, учитывая (8) и (10), находим, что

$$S_2 < C_2 \sum_{L_2} (n - m)^{-5/2} < C_2 \int_{An^{4/5}}^{A} x^{-5/2} dx.$$

Следовательно, S_2 и S_3 можно сделать сколь угодно близкими к нулю за счет выбора A. Отсюда и из (7), (9) получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Следуя доказательству теоремы 2, представим сумму (2) в виде

$$n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \qquad (11)$$

где

$$S_l = \sum_{L_l} n\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\}, \qquad l = 1, 2, 3, 4,$$

$$L_1 = \left\{k \leqslant m < n - 2N - AN^{2/3}\right\},$$
$$L_2 = \left\{n - 2N - AN^{2/3} \leqslant m \leqslant n - 2N + AN^{2/3}\right\},$$
$$L_3 = \left\{n - 2N + AN^{2/3} < m \leqslant n - N - A\right\},$$
$$L_4 = \{n - N - A < m \leqslant n - N + 1\},$$

положительная постоянная A будет выбрана позднее.

Из (4) и теоремы 1 [2] находим, что если $n, N \to \infty$ и $n/N \to \infty$, то сохраняет силу (5) и при достаточно большом значении A выполнены соотношения:
при $m \in L_1$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{(N-1)(n-m)^{n-m+1/2}}{2^{N-2}(n - m - 2N + 2)^{5/2}}, \qquad (12)$$

при $m \in L_2$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{\sqrt{\pi}(n-m)^{n-m-2}}{N^{-11/6} 2^{N-3} d} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right), \qquad (13)$$

при $m \in L_3$

$$b_{n-m,N-1} \sim \frac{N!(n-m)^{2T}}{N 2^T T!} \left(1 - \frac{2T}{n-m}\right)^{1/2}, \qquad (14)$$

при $m \in L_4$

$$b_{n-m,N-1} \sim C_{n-m}^T \left(\frac{N-1}{2}\right)^T, \qquad (15)$$

где

$$T = n - m - N + 1, \quad d = (2/3)^{2/3},$$

$$y = (N-1)^{1/3}\left(\frac{n-m}{N-1} - 2\right),$$

$p(y/(2d); 3/2, -1)$ – плотность устойчивого закона распределения вероятностей, имеющая вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{ity}{2d} - |t|^{3/2} \exp\left\{i\frac{\pi t}{4|t|}\right\}\right\} dt.$$

Пусть $m \in L_1$. Из (1) и теоремы 1 следует, что

$$m\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\} \leqslant C_3.$$

С помощью формулы Стирлинга из (3), (5), (12) получаем оценку

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant C_4(n - m - 2N + 2)^{-5/2}.$$

Учитывая эти неравенства, легко показать, что $S_1 \leqslant C_5 A^{-3/2} N^{-1}$ и при выборе достаточно большого A выполнено соотношение

$$S_1 = o(Q_N^{(2)}). \tag{16}$$

Пусть $m \in L_2$. Согласно теореме 1

$$m\,\mathsf{P}\{\xi_1 = k|\nu_1 = m\} = g\left(uQ_N^{(2)}\right)(1 + o(1)). \tag{17}$$

Из (3), (5), (13) находим, что

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \sim \frac{Q_N^{(2)}}{N^{2/3}} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right).$$

Отсюда и из (17) следует равенство

$$S_2 = \frac{Q_N^{(2)} g\left(uQ_N^{(2)}\right)}{N^{2/3}}(1 + o(1)) \times \sum_{-A \leqslant y \leqslant A} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right),$$

где суммирование по y проводится с шагом $(N-1)^{-2/3}$. Поэтому

$$S_2 = Q_N^{(2)} g\left(uQ_N^{(2)}\right)(1 + o(1)) \times \left(\int_{-A}^{A} p\left(\frac{y}{2d}; \frac{3}{2}, -1\right) dy + \delta\right),$$

величина δ сколь угодно мала при достаточно большом значении A. Учитывая, что $p\,(y/(2d); 3/2, -1)$ – плотность распределения вероятностей, получаем, что

$$S_2 = Q_N^{(2)} g\left(uQ_N^{(2)}\right)(1 + o(1)). \tag{18}$$

Пусть $m \in L_3$. Из теоремы 1 следует, что выполнено (17). Представим m в виде

$$m = n - 2N + Nf_N,$$

где f_N меняется с шагом $1/N$, $A/N^{1/3} \leqslant f_N \leqslant 1 - A/N$. Из (3), (5), (14) получаем оценку

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant C_6 \frac{f_N^{1/2}\,(e(1 - f_N/2))^{-Nf_N+1}}{N^{3/2}\,(1 - f_N + 1/N)^{N - Nf_N + 3/2}}.$$

Используя это неравенство, несложно показать, что если $1 - \varepsilon \leqslant f_N \leqslant 1 - A/N$, где положительное число ε сколь угодно мало, то

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant \frac{C_7}{N^{3/2}} \exp\left\{-Nf_N - Nf_N \ln\left(1 - \frac{f_N}{2}\right) - N\left(1 - f_N + \frac{3}{2N}\right)\ln\left(1 - f_N + \frac{1}{N}\right)\right\} \leqslant \frac{C_7}{N^{3/2}} e^{-C_8 N},$$

а если $A/N^{1/3} \leqslant f_N \leqslant 1 - \varepsilon$, то

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\{\nu_1 = m\} \leqslant \frac{C_9 f_N^{1/2}}{N^{3/2}} \exp\{-Nf_N - Nf_N \ln(1 - f_N/2) - N(1 - f_N)\ln(1 - f_N)\} \leqslant \frac{C_9 f_N^{1/2} e^{-Nf_N^3/24}}{N^{3/2}}.$$

С помощью этих соотношений и (17) получаем, что если $v = N^{1/3} f_N$, то

$$S_3 \leqslant \frac{C_{10}}{N^{3/2}} \sum_{m=n-2N+AN^{2/3}}^{n-2N+N(1-\varepsilon)} f_N^{1/2} e^{-v^3/24} + \frac{C_{11}}{N^{3/2}} \sum_{m=n-2N+N(1-\varepsilon)}^{n-2N+N(1-A/N)} e^{-C_8 N} \leqslant \frac{C_{12}}{N}\left(\sum_{v \geqslant A} v^{1/2} e^{-v^3/24} + \sqrt{N} e^{-C_8 N}\right).$$

Поскольку величина v меняется с шагом $N^{-2/3}$, заменяя в последнем выражении суммирование интергированием, находим, что

$$S_3 \leqslant \frac{C_{13}}{N}\left(A^{-3/2} e^{-A^3/24} + \sqrt{N} e^{-C_8 N}\right),$$

где A может быть выбрано сколь угодно большим. Поэтому

$$S_3 = o(Q_N^{(2)}). \tag{19}$$

Пусть $m \in L_4$. Из теоремы 1 следует (17), а с помощью (3), (5), (15) можно показать, что

$$\frac{n}{m}\,\mathsf{P}\left\{\nu_1 = m\right\} \leqslant \frac{C_{14}}{T!N}\left(\frac{N-1}{2e}\right)^T\left(\frac{2}{e}\right)^{N-1}.$$

Тогда

$$S_4 \leqslant \frac{C_{15}}{N}\left(\frac{2}{e}\right)^{N-1}\sum_{T=0}^{A+1}\frac{1}{T!}\left(\frac{N-1}{2e}\right)^T \leqslant \frac{C_{15}}{N}e^{-C_{16}N}.$$

Отсюда и из (11), (16), (18), (19) следует утверждение теоремы 3.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Аннаков Б. Б.* Банковский кризис и пожары в лесу. 2008. *URL : http//www. empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire* (дата обращения 24.04.2012).

2. *Бритиков В. Е.* Асимптотика числа лесов из некорневых деревьев // Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 5. С. 672–684.

3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

4. *Bertoin J.* Fires on trees // Ann Inst. Henri Poincare. 2011. ArXiV1011.2308v2 (to appear).

5. *Drossel B., Schwabl F.* Self-organized critical forest-fire model // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 1629–1632.

6. *Henley C. L.* Static of self-organized percolation model // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 2741–2744.

7. *Zink R., Grimm V.* Unifying wildfire models from ecology and statistical physics // The American Naturalist. 2009. Vol. 174. E170–E185.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Хворостянская Елена Владимировна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Khvorostyanskaya, Elena
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218