Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 110–121

УДК 519.2

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматривается множество случайных графов, содержащих N вершин. Степени вершин независимы и одинаково распределены по дискретному степенному закону с положительным показателем τ. Получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при условии, что сумма степеней вершин равна n, в случае когда $n, N \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty$ при $\tau > 2$ и $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty$ при $\tau = 2$, где $\zeta(\tau)$ – дзета-функция Римана.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайные графы, предельные распределения, обобщенная схема размещений, степень вершины.

I. A. Cheplyukova. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF SOME NUMBERED CHARACTERISTICS OF INTERNET GRAPHS

Random Internet graphs consisting of N vertices are considered. The degrees of the vertices are drawn independently from a discrete power—law distribution with exponent $\tau > 0$. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree under the conditions that the sum of vertex degrees is equal to n as $n, N \to \infty$ such that $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty$, $\tau > 2$ and $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty$, $\tau = 2$ where $\zeta(\tau)$ is the Riemann's zeta-function.

K e y w o r d s: random graphs, limit theorems, generalized allocation scheme, vertex degrees.

В настоящее время существует много работ (см., например, [6, 13–15] и др.), в которых рассматривается известный вид случайного графа, предназначенный для моделирования сложных сетей телекоммуникаций. Предполагается, что граф содержит N вершин, занумерованных числами от 1 до N. Будем считать, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами $\eta_1, \ldots, \eta_N$, распределение которых имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta_i \geqslant k\} = k^{-\tau}, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Для удобства описания структуры графа в [15] введено понятие полуребра, т. е. ребра, инцидентного конкретной вершине, но для которой смежная вершина еще не определена. Все полуребра графа являются различными (занумерованными) и при образовании ребер соединяются между собой равновероятно. Кроме того, необходимо, чтобы суммарное число полуребер было четным, поэтому вводится вспомогательная вершина 0, степень которой равна 0 или 1 в зависимости от того, является ли число полуребер основных вершин четным или нет.

Во многих работах (см., например, [6–15]) изучалось асимптотическое поведение различных характеристик случайных графов

Интернет-типа при $N \to \infty$. В частности, в [6] доказана локальная предельная теорема для суммы степеней вершин $\nu_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N$ при $\tau \in (1, 2)$. Понятно, что от ν_N зависит поведение многих других характеристик графа, поэтому в такой ситуации представляется естественным предложить метод исследования, состоящий в предварительном получении предельных распределений для случайных графов с известным числом степеней вершин и последующим их усреднением по распределению ν_N. Для изучения случайных графов с известным числом степеней можно воспользоваться обобщенной схемой размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной в книгах В. Ф. Колчина [2, 3]. Впервые использование обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам с целью исследования асимптотического поведения Интернет-графов было предложено в [7, 11].

В настоящей работе рассматривается подмножество Интернет-графов, для которых сумма степеней вершин известна и равна n. Расположим степени вершин в виде вариационного ряда $\eta_{(1)} \leqslant \eta_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \eta_{(N)}$. Обозначим через $\eta_{(N)}$ и μ_r случайные величины, равные максимальной степени вершин и числу вершин степени r соответственно.

В [7] было найдено предельное распределение $\eta_{(N)}$ и μ_r при $N, n \to \infty$ и $\tau > 0$, так что $1 < n/N < \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ. Там же рассмотрены случаи $n/N \downarrow 1$ и $n/N \uparrow \zeta(\tau)$. В работе [8] получены предельные теоремы для рассматриваемых случайных величин в случае $n/N \to \zeta(\tau)$ при выполнении следующих условий:

1. $\tau > 2, n - \zeta(\tau)N = O(\sqrt{N})$;
2. $\tau = 2, n - \zeta(2)N = O(\sqrt{N \ln N})$;
3. $1 < \tau < 2, n - \zeta(\tau)N = O(N^{1/\tau})$.

В [9, 10] рассматриваются случаи, когда $n/(N \ln N) \geqslant C > 0$ при $\tau = 1$, $n/N^{1/\tau} \geqslant C > 0$ при $0 < \tau < 1$ и $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/\tau} \to \infty$ при $1 < \tau < 2$. Неисследованными остались случаи, когда $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty$ при $\tau > 2$ и когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty$ при $\tau = 2$. Целью настоящей работы является получение предельных распределений случайных величин $\eta_{(N)}$ и μ_r в этих случаях.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty, \tau > 2$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n - \zeta(\tau)N - \eta_{(N)}}{\sqrt{N}} \leqslant z\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx.$$

Теорема 2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/N^{1/2} \to \infty, \tau > 2$. Тогда для целых неотрицательных k справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $r \to \infty$, то*
$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!}(Np_r)^k \exp\{-Np_r\}(1 + o(1))$$
равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале;

2. *Если $r-$ фиксированно, то*
$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{e^{-u_r^2/2}(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi Np_r(1 - p_r)}}$$
равномерно относительно $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале.

Теорема 3. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(2)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty, \tau = 2$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n - \zeta(2)N - \eta_{(N)}}{\sqrt{N \ln N}} \leqslant z\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx.$$

Теорема 4. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(2)N)/\sqrt{N \ln N} \to \infty, \tau = 2$. Тогда справедливы утверждения теоремы 2.*

В основе доказательства теорем 1–4 лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам. Ниже приводятся вспомогательные леммы (леммы 1–7), с помощью которых доказываются данные теоремы.

Из (1) ясно, что

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, распределение которых имеет вид (2). Легко видеть, что для натуральных чисел $k_1, \ldots, k_N$ таких, что $k_1 + \ldots + k_N = n$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \tag{3}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}.$$

Соотношение (3) означает, что для двух наборов случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ выполнены условия обобщенной схемы размещения.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_N^{(j)}, j = 1, 2$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leqslant r\}, \tag{4}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(2)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \neq r\}.$$

Обозначим

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}, \tag{5}$$
$$\zeta_N^{(j)} = \xi_1^{(j)} + \ldots + \xi_N^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательства теорем 1–4 опираются на следующую хорошо известную лемму (см., например, [3]), вытекающую из соотношения (3).

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} =$$
$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-r} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(2)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Рассмотрим предельное поведение суммы ζ_N.

Лемма 2. *При выполнении условий Теоремы 1 справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{N\tau(1 + o(1))}{(n - \zeta(\tau)N)^{\tau+1}}.$$

Доказательство. Утверждение этой леммы в случае, когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \geqslant (\ln N)/2$, следует из теоремы 3 статьи [5]. Докажем справедливость леммы 2 в случае, когда

$$(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} < \ln \sqrt{N}.$$

Обозначим

$$\xi_i' = \xi_i - \zeta(\tau), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{6}$$
$$\zeta_N' = \xi_1' + \ldots + \xi_N'.$$

Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ в виде следующей суммы

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \mathbf{P}\{\zeta_N' = n - \zeta(\tau)N\} = \tag{7}$$
$$P_1 + NP_2 + P_3,$$

где

$$P_1 = \mathbf{P}\{\zeta_N' = n - \zeta(\tau)N,$$
$$\xi_i' \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, \ldots, N\};$$
$$P_2 = \mathbf{P}\{\zeta_N' = n - \zeta(\tau)N, \xi_N' > \gamma(n - \zeta(\tau)N),$$
$$\xi_i' \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, \ldots, N - 1\};$$
$$P_3 = \mathbf{P}\{\zeta_N' = n - \zeta(\tau)N,$$
$$\bigcup_{i \neq j} \{\xi_i' > \gamma(n - \zeta(\tau)N), \xi_j' > \gamma(n - \zeta(\tau)N)\},$$

$$\gamma = \left(\frac{\sqrt{N}}{n - \zeta(\tau)N}\right)^{1/(\tau+1)}. \tag{8}$$

Покажем, что основной вклад в сумму (7) дает второе слагаемое. Рассмотрим вероятность P_2. Очевидно, что

$$P_2 = \sum_{M_1} \mathbf{P}\{\xi_N' = n - \zeta(\tau) - k\} \times \tag{9}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1' + \ldots + \xi_{N-1}' = k - \zeta(\tau)(N - 1),$$
$$\xi_i' \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)N), i = 1, \ldots, N - 1\},$$

где $M_1 = \{k : N - 1 \leqslant k < (n - \zeta(\tau)N) - \gamma(n - \zeta(\tau)N)\}$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i'(u), i = 1, \ldots, N$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1'(u) = k - \zeta(\tau)\} = \tag{10}$$
$$\mathbf{P}\{\xi_1' = k - \zeta(\tau) | \xi_1' \leqslant u\}.$$

Кроме того, пусть $\zeta_N'(u) = \xi_1'(u) + \ldots + \xi_N'(u)$.

Используя соотношение (2), легко показать, что при $l \to \infty$ справедливо

$$\sum_{k > l} p_k = l^{-\tau}(1 + o(1)). \tag{11}$$

Тогда отсюда и из (8)–(10) несложно видеть, что

$$P_2 = (1 + o(1)) \sum_{M_1} \mathbf{P}\{\xi_N' = n - \zeta(\tau) - k\} \times \tag{12}$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}'(\gamma(n - \zeta(\tau)N)) = k - \zeta(\tau)(N - 1)\}.$$

Обозначим через $\varphi_{\gamma(n-\zeta(\tau)N)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины

$\xi_1^{'}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))$. Тогда, используя (6) и (8), получаем, что при любом фиксированном t справедливо равенство

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(\tau)N)}\left(t/(\sigma\sqrt{N})\right) = \exp\left\{-\frac{i\zeta(\tau)Nt}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)(1+o(1)), \qquad (13)$$

где $\varphi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины ξ_1, а

$$\sigma^2 = 2\zeta(\tau-1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau).$$

Учитывая, что случайная величина ξ_1 имеет конечную дисперсию, согласно теоремам 2.6.2 и 2.2.2 [1], функция распределения случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения нормального закона и логарифм ее характеристической функции имеет вид:

$$i\zeta(\tau)t - \frac{t^2\sigma^2}{2}(1+o(1)).$$

Отсюда и из (13) получаем, что

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(\tau))}\left(t/(\sigma\sqrt{N})\right) = \exp\left\{-t^2/2\right\}(1+o(1)). \qquad (14)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\zeta^{'}_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) \leqslant y\sqrt{N}\sigma\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}dx. \qquad (15)$$

Покажем, что при достаточно больших N и n

$$\mathbf{P}\{\gamma\zeta^{'}_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \sqrt{N}\} \leqslant C_1\gamma^2. \qquad (16)$$

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ обозначают некоторые положительные постоянные.

Учитывая (8) и (10), и то, что $\gamma(n-\zeta(\tau)N)/\gamma^{-1}\sqrt{N} \to \infty$, получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{P}\{\zeta^{'}_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} \leqslant (N-1)\mathbf{P}\{\xi^{'}_1(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} + \left(\frac{\mathbf{P}\{\xi^{'}_1 \leqslant \gamma^{-1}\sqrt{N}\}}{\mathbf{P}\{\xi^{'}_1 \leqslant (\gamma(n-\zeta(\tau)N))\}}\right)^{N-1} \times \mathbf{P}\{\zeta^{'}_{N-1}(\gamma^{-1}\sqrt{N}) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\}. \qquad (17)$$

Используя (11), несложно показать, что

$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi^{'}_1(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} \leqslant C_2N^{1-\tau/2}\gamma^{\tau}, \qquad (18)$$

и, применяя неравенство Чебышева, из соотношений (10) и (11), легко получить, что

$$\mathbf{P}\{\zeta^{'}_{N-1}(\gamma^{-1}\sqrt{N}) > \gamma^{-1}\sqrt{N}\} \leqslant C_3\gamma^2. \qquad (19)$$

Тогда из (11), (17)–(19) следует справедливость (16).

Представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} R_i, \qquad (20)$$

где

$$R_i = (1+o(1))\sum_{K_i}\mathbf{P}\{\xi^{'}_N = n-\zeta(\tau)-k\}\times \mathbf{P}\{\zeta^{'}_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N)) = k-\zeta(\tau)(N-1)\},$$

$$K_1 = \{k : (N-1) \leqslant k \leqslant -\sqrt{N}/\gamma + \zeta(\tau)(N-1)\},$$

$$K_2 = \{k : -\sqrt{N}/\gamma + \zeta(\tau)(N-1) < k \leqslant \sqrt{N}/\gamma + \zeta(\tau)(N-1)\},$$

$$K_3 = \{k : \sqrt{N}/\gamma + \zeta(\tau)(N-1) < k \leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N)\},$$

$$K_4 = \{k : n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N) < k \leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{P}\{\xi^{'}_N = n-\zeta(\tau)-k\} = \mathbf{P}\{\xi_N = (n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)N-k\}.$$

Отсюда и из (2) нетрудно получить, учитывая соотношение $\gamma^{-1}\sqrt{N}/(n-\zeta(\tau)N) \to 0$, что при $k \in K_2$ справедливо

$$\mathbf{P}\{\xi^{'}_N = n-\zeta(\tau)-k\} = \tau(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}(1+o(1)). \qquad (21)$$

Следовательно, из (15), (20) и (21) находим, что

$$R_2 = \frac{\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}. \qquad (22)$$

Покажем, что при всех остальных значениях $i = 1, 3, 4$ для R_i справедливы оценки вида:

$$R_i = o((n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}). \qquad (23)$$

Из (2), (6) и (8) очевидно, что при $k \in K_1$

$$\mathbf{P}\{\xi^{'}_N = n-\zeta(\tau)-k\} \leqslant C_4(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}.$$

Отсюда и из (15), (16) и (20) следует, что при $i = 1$ соотношение (23) выполнено.

Из (2), (8), (16) и (20) находим, что $R_3 = o((n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1})$.

Пусть $k \in K_4$. Из (2) и (20) следует, что

$$R_4 \leqslant \mathbf{P}\{\zeta'_{N-1}(\gamma(n-\zeta(\tau)N))) >$$
$$(n-\zeta(\tau)N)(1-\gamma^{1/(\tau+1)}\}\frac{C_5}{(\gamma(n-\zeta(\tau)N))^{\tau+1}}.$$

Отсюда и из (2), (8), (10), используя неравенство Чебышева, получаем, что при $i = 4$ соотношение (23) верно.

Следовательно, из (20), (22) и (23) справедливо

$$P_2 = \frac{\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}. \qquad (24)$$

Учитывая, что

$$N\gamma^{-2\tau-1}/(n-\zeta(\tau)N)^{\tau} \to 0, \qquad (25)$$

из соотношений (2), (7), (8) и (11), нетрудно получить, что

$$P_3 \leqslant \frac{C_6 N^2 \gamma^{-2\tau-1}}{(n-\zeta(\tau)N)^{2\tau+1}} = o((n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}). \qquad (26)$$

Рассмотрим P_1. Легко видеть, что

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\{\zeta'_N = n-\zeta(\tau)N, \quad \xi'_i \leqslant \alpha(n-\zeta(\tau)N), i = 1,\ldots,N\}, \qquad (27)$$

где $0 < \alpha < 1 - 2/\tau$.

Положим

$$s = \tau\frac{\ln(n-\zeta(\tau)N)}{(n-\zeta(\tau)N)}, \qquad (28)$$

$$f(s) = \sum_{v<\alpha(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau)} e^{s(v-\zeta(\tau))} \times \mathbf{P}\{\xi'_1 = n-\zeta(\tau)\}. \qquad (29)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1(s),\ldots,\eta_N(s)$, имеющие распределение вида

$$\mathbf{P}\{\eta_i(s) < u+\zeta(\tau)\} = \sum_{v<u+\zeta(\tau)} e^{s(v-\zeta(\tau))}\frac{\mathbf{P}\{\xi'_i = v-\zeta(\tau)\}}{f(s)}. \qquad (30)$$

Пусть $\varsigma_N(s) = \eta_1(s)+\ldots+\eta_N(s)$. Используя тождество (11) работы [4], получаем, что

$$P_1 \leqslant f^N(s)e^{s(n-\zeta(\tau)N)} \times \mathbf{P}\{\varsigma_N(s) \geqslant n-\zeta(\tau)N\}, \qquad (31)$$

Используя представление $f(s)$ в виде суммы:

$$f(s) = \sum_{D_1} e^{s(v-\zeta(\tau))}\mathbf{P}\{\xi'_1 = n-\zeta(\tau)\} + \sum_{D_2} e^{s(v-\zeta(\tau))}\mathbf{P}\{\xi'_1 = n-\zeta(\tau)\},$$

где

$$D_1 = \{v : s(v-\zeta(\tau)) \leqslant 1\},$$
$$D_2 = \{v : v < \alpha(n-\zeta(\tau)N)+\zeta(\tau), \quad s(v-\zeta(\tau)) > 1\},$$

несложно показать, что

$$f(s) = 1 + O((n-\zeta(\tau)N)^{\tau(\alpha-1)}),$$
$$\mathbf{M}\eta_i(s) \leqslant C_7, \quad \mathbf{M}\eta_i^2(s) \leqslant C_8. \qquad (32)$$

Отсюда и из (28), (31), используя неравенство Чебышева, можно получить, что

$$P_1 = o\left(N(n-\zeta(\tau)N)^{-\tau-1}\right). \qquad (33)$$

Из соотношений (7), (24), (26) и (33) следует справедливость утверждения леммы 2. □

Рассмротрим предельное поведение сумм $\zeta_N^{(j)}, j = 1,2$.

Лемма 3. *Пусть $N, n \to \infty, \tau > 2$ так, что $(n-\zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \to \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $r = n-\zeta(\tau)N - z\sqrt{N}$, где z – фиксированное число, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)} = n\} = \frac{N\tau(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}\int_z^\infty e^{-x^2/2}dx.$$

2. *Если $r \to \infty, S = N(1-p_r+o(p_r))$, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)} = n\} = \frac{N\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}.$$

Доказательство. Будем доказывать оба утверждения этой леммы одновременно. Для этого обозначим рассматриваемые суммы через $\tilde{\zeta}_S^{(j)}$, где $S = N$ при $j = 1$, а при $j = 2$ значение S определено в утверждении леммы. Рассмотрим независимые одиниково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} - \zeta(\tau), \quad j = 1,2, \quad i = 1,\ldots,S$ и их суммы $\tilde{\zeta}_S^{(j)} = \tilde{\xi}_1^{(j)} + \ldots + \tilde{\xi}_S^{(j)}$. Тогда вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)} = n\}, j = 1,2$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)} = n\} = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S\} = P_1^{(j)} + SP_2^{(j)} + P_3^{(j)}, \tag{34}$$

где

$$P_1^{(j)} = \mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)S), i = 1,\ldots,S\};$$

$$P_2^{(j)} = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \tilde{\xi}_S^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S), \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)S), i = 1,\ldots,S-1\};$$

$$P_3^{(j)} = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \bigcup_{i\neq k}\{\tilde{\xi}_i^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S), \tilde{\xi}_k^{(j)} > \gamma(n - \zeta(\tau)S)\},$$

а γ определено соотношением (8) с заменой N на S.

Основной вклад в сумму (34) дает второе слагаемое.

Очевидно, что

$$P_2^{(j)} = \sum_{M_j} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\}\times \tag{35}$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} + \ldots + \tilde{\xi}_{S-1}^{(j)} = k - \zeta(\tau)(S-1), \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant \gamma(n - \zeta(\tau)S), i = 1,\ldots,S-1\},$$

где $M_j = \{k : (n-\zeta(\tau)) - a_j \leqslant k < (n-\zeta(\tau)) - \gamma(n - \zeta(\tau)S)\}, a_1 = r, a_2 = n - \zeta(\tau)$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_i^{(j)}(u), \quad j = 1,2, \quad i = 1,\ldots,S$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(j)}(u) = k - \zeta(\tau)\} = \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(j)} = k - \zeta(\tau) | \tilde{\xi}_i^{(j)} \leqslant u\}. \tag{36}$$

Обозначим $\tilde{\zeta}_S^{(j)}(u) = \tilde{\xi}_1^{(j)}(u) + \ldots + \tilde{\xi}_S^{(j)}(u)$.

Учитывая, что $r = n - \zeta(\tau)N - z\sqrt{N}$, из (2) и (8) следует, что

$$(1 - P_r) = 1 + O(N^{-1}), \quad 1 - \frac{1}{(\gamma(n - \zeta(\tau)N))^\tau} = 1 + o\left(\frac{1}{N}\right). \tag{37}$$

Тогда из (4), (5), (11), (35) и (37) находим, что

$$P_2^{(j)} = (1 + o(1)) \sum_{M_j} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_N^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\}\times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) = k - \zeta(\tau)(S-1)\}. \tag{38}$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}_{(j)}(t), j = 1,2$, характеристические функции случайных величин $\tilde{\xi}_1^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))$. Тогда для характеристических функций случайных величин $\tilde{\zeta}_S^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))$ при $t \to 0$ из (8), (11), (36) и (37) следует, что

$$\varphi_{\tilde{\zeta}_S^{(j)}(\gamma(n-\zeta(\tau)S))} = \tilde{\varphi}_{(j)}^S(t) = \exp\{-i\zeta(\tau)St\}\,\varphi^S(t)(1 + o(1)).$$

Отсюда, аналогично тому как получено соотношение (14) при доказательстве леммы 2, несложно показать, что

$$\tilde{\varphi}_{(j)}^S\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{S}}\right) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) \leqslant y\sqrt{S}\sigma\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx. \tag{39}$$

Следуя проверке справедливости соотношения (16), можно показать, что

$$\mathbf{P}\{\gamma\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) > \sqrt{S}\} \leqslant C_9\gamma^2. \tag{40}$$

Представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2^{(j)} = \sum_{i=0}^{3} R_i^{(j)}, \quad j = 1,2, \tag{41}$$

где

$$R_i^{(j)} = (1 + o(1)) \sum_{K_i^{(j)}} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\}\times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S)) = k - \zeta(\tau)(S-1)\},$$

$$K_0^{(1)} = \oslash,$$

$$K_0^{(2)} = \{k : 0 \leqslant k \leqslant -\sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1)\},$$

$$K_1^{(1)} = \{k : n - r \leqslant k \leqslant \sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1)\},$$

$$K_1^{(2)} = \{k : -\sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1) \leqslant k \leqslant \sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1)\},$$

$$K_2^{(j)} = \{k : \sqrt{S}/\gamma + \zeta(\tau)(S-1) < k \leqslant n - \zeta(\tau) - \gamma^{1/(\tau+1)}(n - \zeta(\tau)S)\},$$

$$K_3^{(j)} = \{k : n - \zeta(\tau) - \gamma^{1/(\tau+1)}(n - \zeta(\tau)S) < k \leqslant n - \zeta(\tau) - \gamma(n - \zeta(\tau)S)\}.$$

Используя соотношения (2), (4) и (37), несложно заметить, что при $k \in K_1^{(j)}, \quad j = 1, 2$, справедливо

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau) - k\} = \tau(n - \zeta(\tau)S)^{-\tau-1}(1 + o(1)).$$

Тогда из (39) и (41) находим, что

$$R_1^{(1)} = \frac{\tau(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}} \int\limits_z^\infty e^{-x^2/2}dx, \qquad (42)$$

$$R_1^{(2)} = \frac{\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Из соотношений (2), (4), (8), (37) и (40) несложно показать, что

$$R_2^{(j)} = o((n-\zeta(\tau)S)^{-\tau-1}), \quad j = 1, 2. \qquad (43)$$

Пусть $k \in K_3^{(j)}$. Из (2), (4) и (37) нетрудно найти, что

$$R_3^{(j)} \leqslant \frac{C_{10}}{\gamma(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(\tau)S)) > (n-\zeta(\tau)S)(1-\gamma^{1/(\tau+1))}\}.$$

Используя неравенство Чебышева, отсюда и из (2), (4), (8), (36), (37) получаем, что

$$R_3^{(j)} = o((n-\zeta(\tau)S)^{-\tau-1}). \qquad (44)$$

Следовательно, из (42)–(44) справедливо

$$P_2^{(1)} = \frac{\tau(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}} \int\limits_z^\infty e^{-x^2/2}dx, \qquad (45)$$

$$P_2^{(2)} = \frac{\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Рассмотрим вероятность $P_3^{(j)}, j = 1, 2$. Из (2), (4), (11), (25), (34), (37) следует, что при $k < n - 2\zeta(\tau) - 2\gamma(n - \zeta(\tau)S)$

$$P_3^{(j)} \leqslant C_{11}S^2 \sum_k \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} + \tilde{\xi}_{S-2}^{(j)} = k - \zeta(\tau)(S-2)\}(\gamma(n-\zeta(\tau)S))^{-\tau-1} \times \qquad (46)$$
$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(j)} > \gamma(n-\zeta(\tau)S)\} = o\left(\frac{S}{(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}}\right).$$

Рассмотрим $P_1^{(j)}$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что

$$P_1^{(j)} \leqslant \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(j)} = n - \zeta(\tau)S, \; \xi_i^{(j)} \leqslant \alpha(n-\zeta(\tau)S), i = 1, \ldots, S\},$$

где $0 < \alpha < 1 - 2/\tau$.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(j)}(s), \ldots, \eta_N^{(j)}(s), j = 1, 2$, имеющие распределение вида:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(j)}(s) < u + \zeta(\tau)\} = \sum_{v < u+\zeta(\tau)} e^{s(v-\zeta(\tau))} \frac{\mathbf{P}\{\xi_i^{(j)} = v - \zeta(\tau)\}}{f^{(j)}(s)}, \qquad (47)$$

где

$$f^{(j)}(s) = \sum_{v < \alpha(n-\zeta(\tau)S)+\zeta(\tau)} e^{s(v-\zeta(\tau))} \times \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(j)} = n - \zeta(\tau)\}, \qquad (48)$$

а величина s определена соотношением (28) при $N = S$. Пусть $\varsigma_S(s) = \eta_1^{(j)}(s) + \ldots + \eta_S^{(j)}(s)$. Используя тождество (11) работы [4], получаем, что

$$P_1^{(j)} \leqslant (f^{(j)}(s))^S e^{-s(n-\zeta(\tau)S)} \times \mathbf{P}\{\varsigma_S(s) \geqslant n - \zeta(\tau)S\}. \qquad (49)$$

Используя (2), (29), (37), (48), нетрудно показать, что

$$f^{(j)}(s) = (1 + o(1))f(s),$$

тогда отсюда и из (4), (32) и (47) находим, что

$$f^{(j)}(s) \leqslant C_{12}, \quad \mathbf{M}\eta_i^{(j)}(s) \leqslant C_{13}, \quad \mathbf{M}(\eta_i^{(j)}(s))^2 \leqslant C_{14}. \qquad (50)$$

Применяя неравенство Чебышева, из (28), (49) и (50) получаем, что

$$P_1^{(j)} = o\left(S(n-\zeta(\tau)S)^{-\tau-1}\right), j = 1, 2. \qquad (51)$$

Утверждение леммы 3 следует из (34), (45), (46) и (51).

□

Рассмотрим предельное поведение суммы ζ_N при $\tau = 2$.

Лемма 4. *При выполнении условий Теоремы 3 справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{2N(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}.$$

Доказательство. Рассмотрим случайные величины $\xi_i^{'}, i = 1, \ldots, N$, и сумму $\zeta_N^{'}$, определенные соотношениями (6) при $\tau = 2$.

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$ можно представить в виде суммы (7), где $\tau = 2$ и

$$\gamma = \left(\sqrt{N \ln N}/(n - \zeta(2)N)\right)^{1/3}. \qquad (52)$$

Следуя доказательству леммы 2, несложно показать, что выполено сооношение (12) при заданных τ и γ.

Кроме того, для характеристической функции случайной величины $\xi_1^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N))$, заданной соотношением (10) при $\tau = 2$, справедливо

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(2)N)}\left(\frac{t}{\sqrt{N \ln N}}\right) = \qquad (53)$$
$$\exp\left\{-\frac{i\zeta(2)Nt}{\sqrt{N \ln N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sqrt{N \ln N}}\right)(1 + o(1)),$$

где $\varphi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины ξ_1.

Согласно теореме 2.6.2 и 2.2.1 [1], функция распределения случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения нормального закона, и логарифм ее характеристической функции имеет вид

$$i\zeta(2)t - (\ln N)t^2/2.$$

Отсюда и из (53) получаем, что

$$\varphi^N_{\gamma(n-\zeta(2)N)}\left(t/\sqrt{N \ln N}\right) = \qquad (54)$$
$$\exp\left\{-t^2/2\right\}(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) \leqslant y\sqrt{N \ln N}\} \to \qquad (55)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx.$$

Покажем, что при достаточно больших N и n справедливо

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \frac{\sqrt{N \ln N}}{\gamma}\right\} \leqslant \qquad (56)$$
$$C_{15}\gamma^2(C_{16} - \ln\gamma/\ln N).$$

Учитывая, что для рассматриваемой вероятности справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} \leqslant$$
$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} +$$
$$\left(\frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{'} \leqslant \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\}}{\mathbf{P}\{\xi_1^{'} \leqslant (\gamma(n - \zeta(2)N))\}}\right)^{N-1} \times$$
$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\}, \qquad (57)$$

аналогично тому, как получено соотношение (18), несложно показать, что

$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} \leqslant$$
$$C_{17}\gamma^2/\ln N. \qquad (58)$$

Используя тот факт, что при $l \to \infty$

$$\sum_{k \leqslant l} p_k k^2 \leqslant 2\ln l,$$

и, применяя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) > \gamma^{-1}\sqrt{N \ln N}\} \leqslant \qquad (59)$$
$$C_{18}\gamma^2(C_{19} - \ln\gamma/\ln N).$$

Тогда справедливость неравенства (56) следует из соотношений (57), (58) и (59).

Представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} R_i, \qquad (60)$$

где

$$R_i = (1 + o(1))\sum_{K_i}\mathbf{P}\{\xi_N^{'} = n - \zeta(2) - k\} \times$$
$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{'}(\gamma(n - \zeta(2)N)) = k - \zeta(2)(N-1)\},$$

$$K_1 = \{k : (N-1) \leqslant k \leqslant -b + \zeta(2)(N-1)\},$$

b принимает два значения в зависимости от того, как ведет себя отношение n/N : если $n/N \to \infty$, то $b = N^{4/6}$; если $n/N \nrightarrow \infty$, то $b = \sqrt{N \ln N}/\gamma$;

$$K_2 = \{k : -b + \zeta(2)(N-1) < k \leqslant b + \zeta(2)(N-1)\};$$

$$K_3 = \{k : \sqrt{N}/\gamma + \zeta(\tau)(N-1) < k \leqslant$$

$$n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N)\};$$

$$K_4=\{k: n-\zeta(\tau)-\gamma^{1/(\tau+1)}(n-\zeta(\tau)N)<k\leqslant n-\zeta(\tau)-\gamma(n-\zeta(\tau)N)\}.$$

Несложно заметить, что при $k\in K_2$ справедливо соотношение (21) при $\tau=2$. Тогда отсюда и из (55), (60) находим, что

$$R_2=\frac{2(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}. \tag{61}$$

Используя (56), (60), аналогично тому, как получено соотношение (23) при доказательстве леммы 2, можно показать, что

$$R_i=o((n-\zeta(2)N)^{-3}),\ i=1,3,4, \tag{62}$$

следовательно, из (60)–(62) справедливо равенство

$$P_2=\frac{2(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}. \tag{63}$$

Аналогично оценки (26) несложно получить следующее соотношение:

$$P_3=o((n-\zeta(2)N)^{-3}). \tag{64}$$

Рассмотрим P_1. Обозначим

$$x=(n-\zeta(2)N)/\sqrt{N\ln N}.$$

Пусть $x\geqslant(8\ln\ln N)^3$. Положим

$$R(w)=\sum_{k\leqslant\gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)}\exp\{(k-\zeta(2))w\}\times$$

$$\mathbf{P}\{\xi'=k-\zeta(2)\}. \tag{65}$$

Используя (2), можно показать, что при достаточно больших l справедлива оценка

$$\sum_{k>l}(k-\zeta(2))p_r\leqslant C_{20}l^{-1}. \tag{66}$$

Учитывая, что при $0<y\leqslant 1$ справедливо равенство $e^y=1+y+\delta(y)$, где $\delta(y)\leqslant y^2$, из (2), (65) и (66) получаем, что

$$R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)=1+o\left(N^{-1}\right). \tag{67}$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1'(\gamma),\ldots,\xi_N'(\gamma)$, имеющие распределение вида:

$$\mathbf{P}\{\xi_1'(\gamma)=k-\zeta(2)\}=\frac{\mathbf{P}\{\xi_1'=k-\zeta(2)\}\exp\{\frac{k-\zeta(2)}{\gamma(n-\zeta(2)N)}\}}{R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)},$$

где $k\leqslant\gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)$. Положим $\zeta_N'(\gamma)=\xi_1'(\gamma)+\ldots+\xi_N'(\gamma)$. Тогда P_1 имеет следующее представление:

$$P_1=e^{-1/\gamma}R^N\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)\times \mathbf{P}\left\{\zeta_N'(\gamma)=n-\zeta(2)N\right\}. \tag{68}$$

Обозначим через $\psi_\gamma(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1'(\gamma)$. Тогда, используя (65), получаем, что

$$|\psi_\gamma(t)|=\left|\frac{R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}+it\right)}{R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}\right)}\right|. \tag{69}$$

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N'(\gamma)=n-\zeta(2)N\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{N\ln N}}\times \int_{-\pi\sqrt{N\ln N}}^{\pi\sqrt{N\ln N}}\exp\left\{-\frac{it(n-\zeta(2)N)}{\sqrt{N\ln N}}\right\}\times \left[\psi_\gamma\left(\frac{t}{\sqrt{N\ln N}}\right)\right]^N dt. \tag{70}$$

Из (65) и (66) нетрудно найти, что

$$\left|R\left((\gamma(n-\zeta(2)N))^{-1}+it\right)\right|=|\varphi(t)|+o(1/N).$$

Тогда из (67) и (69) следует, что

$$|\psi_\gamma(t)|^N\leqslant C_{21}\left|\varphi(t)\right|.$$

Разобьем интеграл из равенства (70) на два интеграла: по области $|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{N\ln N}$ и по области $\varepsilon\sqrt{N\ln N}<|t|\leqslant\pi\sqrt{N\ln N}$, где ε достаточно мало. По свойству характеристических функций решетчатых распределений с максимальным шагом 1, при $\varepsilon<|t|\leqslant\pi$ выполнено неравенство $|\varphi(t)|\leqslant\exp\{-C_{22}\}$, а учитывая, что $\varphi(t)=1+(e^{it}+1)\Phi(e^{it},\tau,1)$, где $\Phi(z,s,a)$ – трансцендентная функция Лерча, находим, что при достаточно малом ε для $|t|\leqslant\varepsilon$ справедливо $|\varphi(t)|\leqslant\exp\{-C_{23}t^2\}$. Тогда из (70) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N'(\gamma)=n-\zeta(2)N\}\leqslant C_{24}(\sqrt{N\ln N})^{-1}.$$

Отсюда и из (67), (68), учитывая, что $x\geqslant(8\ln\ln N)^3$, находим оценку для P_1:

$$P_1=o(N(n-\zeta(2)N)^{-3}). \tag{71}$$

Рассмотрим P_1 в случае, когда $x < (8\ln\ln N)^3$. Заметим, что

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\{\zeta_N \geqslant n, \xi_i \leqslant \gamma(n-\zeta(2)N)+ \zeta(2), i=1,\ldots,N\}. \quad (72)$$

Кроме того, используя (2), нетрудно показать, что справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{M}(\xi_1^2, \xi_1 \leqslant \gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)) \leqslant C_{25}\ln(\gamma(n-\zeta(2)N)+\zeta(2)). \quad (73)$$

Используя неравенство Чебышева и то, что $x < (8\ln\ln N)^3$, из (72), (73) находим, что и в этом случае равенство (71) верно.

Тогда утверждение леммы 4 следует из (7), (63), (64), (71). □

Рассмотрим предельное поведение сумм $\zeta_N^{(j)}, j=1,2$.

Лемма 5. *Пусть $\tau=2, N, n\to\infty$ так, что $(n-\zeta(2)N)/\sqrt{N\ln N}\to\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $r = n-\zeta(2)N - z\sqrt{N\ln N}$, где z – фиксированное число, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(1)}=n\} = \frac{\sqrt{2}N(1+o(1))}{\sqrt{\pi}(n-\zeta(2)N)^3}\int\limits_z^\infty e^{-x^2/2}dx.$$

2. *Если $r\to\infty, S=N(1-p_r+o(p_r))$, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)}=n\} = \frac{2N(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю будем доказывать оба утверждения этой леммы одновременно. Для этого обозначим рассматриваемые суммы через $\tilde\zeta_S^{(j)}$, где $S=N$ при $j=1$, а при $j=2$ значение S определено в утверждении леммы 5.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde\xi_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} - \zeta(2), j=1,2, i=1,\ldots,S$, и их суммы $\tilde\zeta_S^{(j)} = \tilde\xi_1^{(j)}+\ldots+\tilde\xi_S^{(j)}$. Тогда вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(j)}=n\}, j=1,2$ можно представить в виде соотношения (34) при $\tau=2$, где γ определено соотношением (52).

Очевидно, что выполнено соотношение (35) при $\tau=2$.

Учитывая, что $r=n-\zeta(2)N-z\sqrt{N\ln N}$, из (2) и (52) следует справедливость соотношений (37). Тогда из (4), (5), (11) и (35) находим, что

$$P_2^{(j)} = (1+o(1))\sum_{M_j}\mathbf{P}\{\tilde\xi_N^{(j)} = n-\zeta(2)-k\}\times \quad (74)$$
$$\mathbf{P}\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S)) = k-\zeta(2)(S-1)\},$$

где $\tilde\zeta_S^{(j)}(u) = \tilde\xi_1^{(j)}(u)+\ldots+\tilde\xi_S^{(j)}(u)$, а случайные величины $\tilde\xi_i^{(j)}(u), j=1,2, i=1,\ldots,S$, заданы соотношениями (36) при $\tau=2$.

Обозначим через $\tilde\varphi_{(j)}(t), j=1,2$, характеристические функции случайных величин $\tilde\xi_1^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S))$ соответственно. Тогда для характеристических функций случайных величин $\tilde\zeta_S^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S))$ при $t\to0$ из (11), (36), (37) и (52) следует, что

$$\varphi_{\tilde\zeta_S^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S))} = \tilde\varphi_{(j)}^S(t) = \exp\{-i\zeta(2)St\}\,\varphi^S(t)(1+o(1)).$$

Отсюда, аналогично тому как получено соотношение (54) при доказательстве леммы 4, несложно показать, что

$$\tilde\varphi_{(j)}^S\left(\frac{t}{\sqrt{S\ln S}}\right) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(\tau)S)) \leqslant y\sqrt{S\ln S}\} \to \quad (75)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}dx.$$

Следуя выводу неравенства (56) при доказательстве леммы 4, можно показать, что при достаточно больших N и n справедливо

$$\mathbf{P}\left\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S)) > \frac{\sqrt{S\ln S}}{\gamma}\right\} \leqslant C_{25}\gamma^2\left(C_{26}-\ln\gamma/\ln N\right). \quad (76)$$

Представим вероятность P_2 в виде суммы (41), где

$$R_i^{(j)} = (1+o(1))\sum_{K_i^{(j)}}\mathbf{P}\{\tilde\xi_S^{(j)} = n-\zeta(2)-k\}\times \quad (77)$$
$$\mathbf{P}\{\tilde\zeta_{S-1}^{(j)}(\gamma(n-\zeta(2)S)) = k-\zeta(2)(S-1)\},$$

$$K_0^{(1)} = \varnothing,$$

$$K_0^{(2)} = \{k : 0\leqslant k\leqslant -\frac{\sqrt{S\ln S}}{\gamma}+\zeta(2)(S-1)\},$$

$$K_1^{(1)} = \{k : n-r \leqslant k \leqslant \frac{\sqrt{S\ln S}}{\gamma} + \zeta(2)(S-1)\},$$
$$K_1^{(2)} = \{k : -\frac{\sqrt{S\ln S}}{\gamma} + \zeta(2)(S-1) \leqslant k \leqslant \sqrt{S\ln S}/\gamma + \zeta(2)(S-1)\},$$
$$K_2^{(j)} = \{k : \sqrt{S\ln S}/\gamma + \zeta(2)(S-1) < k \leqslant n - \zeta(2) - \gamma^{1/3}(n - \zeta(2)S)\},$$
$$K_3^{(j)} = \{k : n - \zeta(2) - \gamma^{1/3}(n - \zeta(2)S) < k \leqslant n - \zeta(2) - \gamma(n - \zeta(2)S)\}.$$

Используя соотношение (35), (41), (74)–(77) и действуя аналогично тому, как получены равенства (45) и (46) при доказательстве леммы 3, можно показать, что

$$P_2^{(1)} = \frac{2(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}(n-\zeta(2)N)^3}\int_z^\infty e^{-x^2/2}dx,$$
$$P_2^{(2)} = \frac{2(1+o(1))}{((n-\zeta(2)S)^3}. \tag{78}$$
$$P_3^{(j)} = o\left(S(n-\zeta(2)S)^{-3}\right), j = 1, 2.$$

Оценка $P_1^{(j)}, j = 1, 2$ проводится аналогично оценки P_1 при доказательстве леммы 4, согласно которой

$$P_1^{(j)} = o\left(S(n-\zeta(2)S)^{-3}\right).$$

Тогда утверждения леммы 5 следуют из (34) и (78). □

Лемма 6. *Пусть $N, n \to \infty, \tau > 2$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \to \infty, S = N(1 - p_r + o(p_r))$. Тогда при фиксированных r справедливо*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)} = n\} = \frac{N\tau(1+o(1))}{(n-\zeta(\tau)N)^{\tau+1}}.$$

Доказательство. Утверждение этой леммы в случае, когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} \geqslant \ln\sqrt{N}$, следует из теоремы 3 статьи [5]. Доказательство леммы 6 в случае, когда $(n - \zeta(\tau)N)/\sqrt{N} < \sqrt{N}$, аналогично доказательству второй части леммы 3. Поэтому вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(2)} = n\}$ можно представить в виде (34), где основной вклад в сумму дает второе слагаемое.

Несложно проверить, что для $P_2^{(2)}$ выполняется равенство (38). Используя теоремы 2.6.2 и 2.2.2 [1], и учитывая, что

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi(t) - e^{itr}p_r}{1-p_r},$$

где $\varphi_2(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(2)}$, несложно показать, что выполняется соотношение (39) для случайной величины $\tilde{\zeta}_{S-1}^{(2)}(\gamma(n - \zeta(\tau)S))$.

Аналогично доказательству леммы 3 нетрудно видеть, что вероятность P_2 можно представить в виде суммы (41) при $j = 2$. Используя (2) и (4), несложно заметить, что при $k \in K_1^{(2)}$, справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_S^{(2)} = n - \zeta(\tau) - k\} = \frac{\tau(1+o(1))}{(1-p_r)(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Тогда из (39) и (41) находим, что

$$R_1^{(2)} = \frac{\tau(1+o(1))}{(1-p_r)(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Оценки для $R_i^{(2)}$, $i = 0, 2, 3$ проводятся аналогично оценкам $R_i^{(2)}$, $i = 0, 2, 3$ при доказательстве леммы 3. Отсюда получаем, что

$$P_2^{(2)} = \frac{\tau(1+o(1))}{(1-p_r)(n-\zeta(\tau)S)^{\tau+1}}.$$

Оценки вероятностей $P_1^{(2)}$ и $P_3^{(2)}$ проводятся так же, как оценки $P_1^{(2)}$ и $P_3^{(2)}$ при доказательстве леммы 3, согласно которым для вероятностей $P_1^{(2)}$ и $P_3^{(2)}$ справедливы соотношения (46) и (51) при $j = 2$ соответственно.

□

Аналогично лемме 6, используя доказательства лемм 4 и 5, нетрудно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $\tau = 2, N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(2)N)/\sqrt{N\ln N} \to \infty, S = N(1 - p_r + o(p_r))$. Тогда при фиксированных r справедливо*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(2)} = n\} = \frac{2N(1+o(1))}{(n-\zeta(2)N)^3}.$$

Теперь можно доказать теоремы 1–4.

При выполнении условий теоремы 1, учитывая, что $r = n - \zeta(\tau)N - z\sqrt{N}$, из (2) находим, что $NP_r = o(1)$. Тогда справедливость утверждения теоремы 1 следует из лемм 1, 2 и первой части леммы 3.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Согласно пуассоновскому приближению биномиального распределения, равномерно относительно целых k, для которых $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$

лежит в любом конечном интервале,

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \tag{79}$$
$$\frac{(Np_r)^k}{k!} \exp\left\{-Np_r\right\}(1+o(1)).$$

Используя лемму 2 и второй пункт леммы 3, получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(2)} = n - kr\right\} / \mathbf{P}\left\{\zeta_N = n\right\} \to 1,$$

отсюда и из (79) следует первая часть утверждения теоремы 2. Для доказательства второй части теоремы 2 воспользуемся тем фактом, что при $Np_r(1-p_r) \to \infty$ равномерно относительно $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \tag{80}$$
$$\frac{(1+o(1))}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\}.$$

Тогда справедливость второй части теоремы 2 следует из лемм 1, 2, 6 и соотношения (80).

Утверждение теоремы 3 вытекает из лемм 1, 4 и первого пункта леммы 5.

Справедливость теоремы 4 следует из лемм 1, 4, 7, второго пункта леммы 5 и соотношений (79) и (80).

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2004. 256 с.

4. *Крамер Г.* Об одной новой предельной теореме теории вероятностей // Успехи матем. наук. 1944. № 10. С. 166–173.

5. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера // Труды академии наук УССР. 1969. Т. 13, № 6. С. 17–22.

6. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 22–34.

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18.

8. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 14–23.

9. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которого не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, № 3. С. 20–33.

10. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин условного графа // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 3. С. 455–456.

11. *Cheplyukova I., Pavlov Yu.* Limit distributions of vertex degree in conditionnal power-law random graphs // Transactions of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. (Karniel, october 2007). Israel, 2007. P. 52–59.

12. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. N.Y.: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

13. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the Internet topology // Computer Communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 256–262.

14. *Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications their applications // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 026118.

15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370