Труды Карельского научного центра РАН
№ 5. 2012. С. 122–126

УДК 519.7

ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ НА РЫНКЕ ТОВАРОВ ДВУХ ВИДОВ

А. В. Щипцова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматривается рынок двух товаров на плоскости. Спрос зависит от цены и квадратичных транспортных затрат потребителя. Исследуется конкурентное поведение игроков, продающих товар одного вида. На рынке также присутствует продавец второго товара. Приведены примеры для различных функций, задающих плотность распределения потребителей.

Ключевые слова: дуополия Хотеллинга на плоскости, равновесие по Нэшу, задача о размещении.

A. V. Shchiptsova. LOCATION-PRICE GAME IN THE MARKET OF TWO PRODUCTS

The paper examines the market of two products. Demand depends on the price and quadratic transportation costs. We analyze competitive behavior of players selling the same product. There is also a seller of the second product in the market. Examples with different buyers density function are presented.

Key words: Hotelling's duopoly on the plane, Nash equilibrium, location game.

Введение

Классическая модель Хотеллинга [3] исследует конкуренцию на рынке одного товара с пространственной дифференциацией продукции. В дуополии Хотеллинга рассматривается линейный рынок с равномерным распределением покупателей.

Работа Хотеллинга послужила началом для целого ряда исследований, посвященных анализу конкурентного поведения в условиях, когда на величину потребительского спроса влияет цена товара и транспортные издержки. Салоп [6] распространил дуополию Хотеллинга на модель «кругового» города. Задача о размещении игроков-продавцов с различными видами распределения потребителей на рынке была исследована в работе [4] для модели Хотеллинга на плоскости и в работе [5] при условии дискриминационного ценообразования.

В работах [1], [2] рассматривалась модель дуополии Хотеллинга на плоскости с равномерным распределением потребителей. Ценовое равновесие и решение задачи о размещении были построены для случая рыночной конкуренции между двумя и более участниками рынка.

Данная работа посвящена исследованию задачи о размещении на рынке товаров двух видов. Каждый покупатель заинтересован в приобретении двух различных товаров, конкуренция происходит между игроками-продавцами товара одного вида. Будет рассмотрена модель рынка на плоскости с произвольной функцией плотности распределения потребителей.

Постановка задачи

Представим рынок потребительских товаров в виде единичного круга S радиуса 1. Пусть плотность потребителей на рынке задана непрерывной функцией $f\,(x)$. Каждый из потребителей заинтересован в покупке двух различных товаров: товара вида A и товара вида B. На рынке присутствуют два продавца товара A, расположенные на диаметре в точках $(x_1,\,0)$ и $(x_2,\,0)$ соответственно, и один продавец товара вида B, расположенный в точке $(z, 0)$ (рис. 1). Каждый из участников рынка назначает цену p_j $(j = 1,\,2,\,3)$ и стремится получить наибольшую прибыль от продаж. Конкуренция осуществляется между игроками-продавцами товара вида A. Спрос является абсолютно неэластичным. Без потери общности будем считать, что себестоимость товара для продавцов равна нулю.

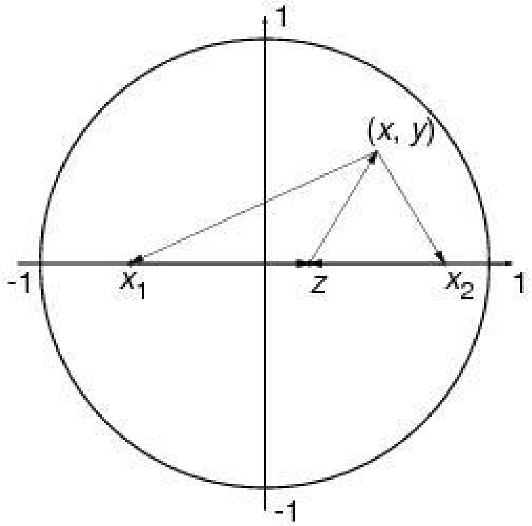

Рис. 1. Расположение игроков на рынке

Товары обоих видов одинаковы для потребителей по всем характеристикам кроме цены, назначенной за приобретение товара, и транспортных расходов. Будем считать, что транспортные расходы потребителя заданы квадратичной функцией. Таким образом, затраты потребителя на приобретение товара A у продавца j и приобретения товара B представимы в виде:

$$F_j\,(x,y) = p_j + \rho_j\,(x,y)^2 + \rho_z\,(x_j,0)^2 \\ + p_3 + \rho_z\,(x,y)^2\,, \quad j = 1,\,2,$$

где $\rho_j\,(x,y) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$ – расстояние от потребителя в точке $(x,\,y)$ до продавца товара A и $\rho_z\,(x,y) = \sqrt{(x-z)^2 + y^2}$ – расстояние от потребителя в точке (x,y) до продавца товара B.

Без ограничения общности будем считать, что $p_1 \leqslant p_2$. Множество всех потребителей разобьется на два подмножества S_1 и S_2 с границей, определяемой уравнением $F_1\,(x,y) = F_2\,(x,y)$ или, после упрощений,

$$x = \frac{p_1 - p_2}{2\,(x_1 - x_2)} + x_1 + x_2 - z. \tag{1}$$

Прибыль продавцов товара A, между которыми осуществляется конкуренция на рынке, имеет вид:

$$\begin{cases} H_1 = p_1\,(1 - S_2)\,, \\ H_2 = p_2\,S_2. \end{cases} \tag{2}$$

Доля потребителей, выбирающих товар вида A у второго участника рынка, будет равна

$$S_2 = \int\limits_{x}^{1} \int\limits_{-\arccos\frac{x}{r}}^{\arccos\frac{x}{r}} r f\,(\theta,r)\,d\theta dr. \tag{3}$$

Продавцы товара A конкурируют на рынке за счет выбора своего местоположения и назначаемой цены на товар. Будем рассматривать бескоалиционную игру Γ двух лиц с полной информацией, которая проходит в три шага:

1. Игроки одновременно определяют свое местоположение на рынке $(x_1,\,x_2)$.
2. Игроки одновременно объявляют цену на товар $(p_1,\,p_2)$.
3. Игроки получают выигрыш, исходя из выбранного расположения и цены $(H_1,\,H_2)$.

Равновесие в задаче о размещении

Если расположение первого игрока x_1 фиксировано, тогда x_2 можно найти, максимизируя прибыль второго игрока, и наоборот. Таким образом, равновесие $(x_1,\,x_2)$ в игре Γ отвечает условиям

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dx_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}\,(1 - S_2) - p_1\Big(\frac{\partial S_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \\ \qquad + \frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_1}\Big) = 0, \\ \frac{dH_2}{dx_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_2} S_2 + p_2\Big(\frac{\partial S_2}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_2} \\ \qquad + \frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}\Big) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что игроки выбрали свое местоположение на рынке, т. е. x_1 и x_2 фиксированы. Тогда ценовое равновесие $(p_1,\, p_2)$ будет удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} = 1 - S_2 + p_1 \frac{\partial S_2}{\partial p_2} = 0, \\ \frac{\partial H_2}{\partial p_2} = S_2 + p_2 \frac{\partial S_2}{\partial p_2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Положим

$$g\,(r) = f\left(\arccos\frac{x}{r},\, r\right) + f\left(-\arccos\frac{x}{r},\, r\right).$$

Из (3) имеем

$$\frac{\partial S_2}{\partial p_2} = \frac{g\,(1,x)}{2\,(x_1 - x_2)}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2\,(x_1-x_2)}\int\limits_x^1 \sqrt{r^2-x^2}\,\frac{\partial g\,(r,x)}{\partial r}\,dr. \tag{6}$$

Каждый из игроков после выбора своего местоположения будет назначать цену на товар, удовлетворяющую условиям (5) для ценового равновесия. Таким образом, из (4) x_1 и x_2 в равновесии определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{dH_1}{dx_1} = -p_1\left(\frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_1}\right) = 0, \\ \frac{dH_2}{dx_2} = p_2\left(-\frac{\partial S_2}{\partial p_2}\frac{\partial p_1}{\partial x_2} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2}\right) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть

$$\alpha = -\frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} - 2\,(x_1 - x_2)$$

и

$$\beta = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} - 2\,(x_1 - x_2)\,.$$

Заметим, что $\frac{\partial S_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial S_2}{\partial p_2}$, $\frac{\partial S_2}{\partial x_2} = \alpha\frac{\partial S_2}{\partial p_2}$ и $\frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \beta\frac{\partial S_2}{\partial p_2}$. $\frac{\partial p_1}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial p_2}{\partial x_1}$ найдем, продифференцировав по x_2 и x_1 систему (5). Получаем, что равновесие $(x_1,\, x_2)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} 2\beta\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + 2p_2\beta\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} \\ \qquad - (2p_2 + p_1)\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_1} = 0 \\ 2\alpha\frac{\partial S_2}{\partial p_2} - 2p_1\alpha\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} \\ \qquad + (2p_1 + p_2)\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из (6) находим

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = -\frac{xg\,(1,x)}{2\sqrt{1-x^2}\,(x_1-x_2)}\frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\,(x_1-x_2)}\frac{\partial g\,(1,x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_2} - \frac{\frac{\partial x}{\partial p_2}}{2\,(x_1-x_2)}\int\limits_x^1\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{\partial g\,(r,x)}{\partial r} + \sqrt{r^2-x^2}\,\frac{\partial^2 g\,(r,x)}{\partial r \partial x}\right)dr.$$

Нетрудно показать, что $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_1} = -\frac{1}{x_1-x_2}\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + \beta\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2}$ и $\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2 \partial x_2} = \frac{1}{x_1-x_2}\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + \alpha\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2}$. Таким образом, в равновесии $(x_1,\, x_2)$ выполняются условия:

$$\begin{cases} \left(2\alpha + \frac{2p_1+p_2}{x_1-x_2}\right)\frac{\partial S_2}{\partial p_2} + p_2\alpha\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = 0, \\ \left(2\beta + \frac{2p_2+p_1}{x_1-x_2}\right)\frac{\partial S_2}{\partial p_2} - p_1\beta\,\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Примеры

Рассмотрим задачу о размещении игроков на рынке с заданным распределением потребителей.

1. $f(\theta,\, r) = \frac{1}{\pi}$. Пусть потребители распределены равномерно по всей области рынка. Из (9) равновесие $(x_1,\, x_2)$ является решением уравнений

$$\begin{aligned} &\left(3p_2 - 4(x_1-x_2)^2\right)\left(1-x^2\right) + p_2\alpha x = 0, \\ &\left(3p_1 - 4(x_1-x_2)^2\right)\left(1-x^2\right) - p_1\beta x = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Так как оба игрока являются равноправными, будем искать равновесие в предположении $p_1 = p_2$. Из (10) следует, что $p_1 = p_2 = \frac{4}{3}\,(x_1-x_2)^2$, $x = 0$ и $S_2 = \frac{1}{2}$. Подставив в (5), получим, что в равновесии

$$x_1 = \frac{z}{2} - \frac{3\pi}{16},\quad x_2 = \frac{z}{2} + \frac{3\pi}{16},$$
$$p_1 = p_2 = \frac{3\pi^2}{16},$$
$$|z| \leqslant 2 - \frac{3\pi}{8}.$$

2. $f(\theta,\, r) = \frac{3(1-r)}{\pi}$. Рассмотрим случай, когда плотность потребителей ближе к центру рынка возрастает. Тогда равновесие $(x_1,\, x_2)$

определяется из системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\Big(3p_2-4(x_1-x_2)^2\Big)\Bigg(\sqrt{1-x^2}\\
&\qquad -x^2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Bigg)\\
&+p_2\alpha x\frac{3x}{2\pi(x_1-x_2)^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=0,\\
&\Big(3p_1-4(x_1-x_2)^2\Big)\Bigg(\sqrt{1-x^2}\\
&\qquad -x^2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\Bigg)\\
&-p_1\beta x\frac{3x}{2\pi(x_1-x_2)^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Как и в случае равномерного распределения потребителей по области рынка, будем предполагать, что $p_1=p_2$. Таким образом, получаем, что $p_1=p_2=\frac{4}{3}(x_1-x_2)^2$, $x=0$ и $S_2=\frac{1}{2}$. Из (5) в равновесии

$$
x_1=\frac{z}{2}-\frac{\pi}{8},\quad x_2=\frac{z}{2}+\frac{\pi}{8},
$$
$$
p_1=p_2=\frac{\pi^2}{12}.
$$

3. $f(\theta,\,r)=\frac{3r^2}{2\pi}$. Предположим, что потребители сосредоточены на границе рынка. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_2}{\partial p_2}=&\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2\pi(x_1-x_2)}-\frac{3}{4\pi(x_1-x_2)}\\
&\left(\sqrt{1-x^2}-x^2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S_2}{\partial p_2^2}=&\frac{3x}{4\pi(x_1-x_2)^2}\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Пусть, как и прежде, $p_1=p_2$. Подставив в (9) (12) – (13), получаем, что $p_1=p_2=\frac{4}{3}(x_1-x_2)^2$, $x=0$ и $S_2=\frac{1}{2}$. Следовательно, из (5) находим равновесие

$$
x_1=\frac{z}{2}-\frac{\pi}{4},\quad x_2=\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4},
$$
$$
p_1=p_2=\frac{\pi^2}{3},
$$
$$
|z|\leqslant 2-\frac{\pi}{2}.
$$

Результаты для заданного распределения потребителей на рынке приведены в табл. 1.

Таблица 1. Равновесие в задаче о размещении при заданном распределении потребителей на рынке

$f(\theta,\,r)=\frac{1}{\pi}$	$z=0$	$z=0,1$	$z=0,3$	$z=0,7$
x_1	-0,58905	-0,53905	-0,43905	-0,23905
x_2	0,58905	0,63905	0,73905	0,93905
p_1	1,850551	1,850551	1,850551	1,850551
p_2	1,850551	1,850551	1,850551	1,850551
H_1	0,925275	0,925275	0,925275	0,925275
H_2	0,925275	0,925275	0,925275	0,925275
$f(\theta,\,r)=\frac{3(1-r)}{\pi}$	$z=0$	$z=0,1$	$z=0,3$	$z=0,7$
x_1	-0.3927	-0.3427	-0.2427	-0,0427
x_2	0,3927	0,4427	0,5427	0,7427
p_1	0,82247	0,82247	0,82247	0,82247
p_2	0,82247	0,82247	0,82247	0,82247
H_1	0,41123	0,41123	0,41123	0,41123
H_2	0,41123	0,41123	0,41123	0,41123
$f(\theta,\,r)=\frac{3r^2}{2\pi}$	$z=0$	$z=0,1$	$z=0,3$	$z=0,7$
x_1	-0,7854	-0,7354	-0,6354	
x_2	0,7854	0,8354	0,9354	
p_1	3,28987	3,28987	3,28987	
p_2	3,28987	3,28987	3,28987	
H_1	1,64493	1,64493	1,64493	
H_2	1,64493	1,64493	1,64493	

Заключение

В работе рассмотрено конкурентное поведение игроков на рынке потребительских товаров двух видов, характеристиками которых для покупателя являются цена и квадратичные транспортные расходы. Найдены условия, которым удовлетворяет равновесие по Нэшу в задаче о размещении при плотности потребителей, заданной произвольной функцией. При различных заданных видах функции плотности найдены равновесные местоположения и цены, приведены значения для выигрышей игроков.

Литература

1. *Мазалов В. В., Щипцова А. В., Токарева Ю. С.* Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, вып. 4. С. 91–100.

2. *Щипцова А. В.* Мультиномиальный логит-анализ и конкурентное поведение на рынке // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 2. 2011. № 5. С. 120–124.

3. *Hotelling H.* Stability In Competition // The Economic Journal. 1929. Vol. 39. Issue 153. P. 41–57.

4. *Mazalov V. V., Sakaguchi M.* Location Game On The Plane // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, N 1. P. 1–13.

5. *Sakaguchi M.* Pure Strategy Equilibrium In a Location Game With Discriminatory Pricing // Game Theory and Applications. 2001. Vol. 6. P. 132–140.

6. *Salop S.* Monopolistic competition with outside goods // Bell journal of Economics. 1979. Vol. 10. P. 141–156.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Щипцова Анна Владимировна
аспирантка
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: ann_sh@inbox.ru
тел.: (8142) 766312

Shchiptsova, Anna
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: ann_sh@inbox.ru
tel.: (8142) 766312