Труды Карельского научного центра РАН
№ 1. 2013. С. 17–25

УДК 368:519

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ СТРАХОВАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РИСКОВ И СУММАРНОГО УЩЕРБА ДЛЯ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В. Н. Гридин[1], А. Ю. Голубин[2], М. Н. Петрова[2]

[1] Центр информационных технологий в проектировании РАН, Московская обл., г. Одинцово
[2] Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Статья посвящена решению задачи оптимального управления риском в статической модели, где разрешен выбор как стратегии страхования риска отдельного клиента, так и стратегии перестрахования суммарного риска. Интересы клиентов и перестраховщика учтены введением дополнительных ограничений с вероятностью единица на их остаточные риски. Оптимальным с точки зрения полезности страховщика оказывается stop loss перестрахование с верхним пределом и страхование, представляющее собой комбинацию stop loss стратегии и франшизы. Приведен пример, иллюстрирующий доказанные результаты в случае экспоненциальной функции полезности страховщика.

Ключевые слова: оптимальный дележ риска, страхование, перестрахование, функция полезности.

V. N. Gridin, A. Yu. Golubin, M. N. Petrova. OPTIMAL PER-CLAIM INSURANCE AND OPTIMAL REINSURANCE OF SUMMARY RISK IN A STATIC SETTING

The paper studies an individual risk model where both a policy of per-claim insurance and a policy of reinsurance of aggregated losses are chosen by the insurer in order to maximize their expected utility. The problem is solved under additional constraints on the reinsurer's risk and the residual risk of the insured that should be met with probability one. We show that the only solution to the problem is the following: the optimal reinsurance is a modification of the stop loss reinsurance policy, so-called stop loss reinsurance with an upper limit; the optimal insurer's indemnity is a combination of the stop loss and the deductible policies. The results are illustrated by a numerical example for the case of exponential utility function.

Key words: optimal risk sharing, insurance, reinsurance, utility function.

Введение

Объектом исследования в данной работе является так называемая модель индивидуального риска (или статическая модель страхования), описанная, например в [1], где предусмотрена возможность перестрахования. Страховая компания может одновременно выбирать как долю своего возмещения (дележ) каждому страхователю, так и дележ своего суммарного риска с перестраховщиком. Критерием оптимальности страховщика служит ожидаемая полезность его финального капитала. Желание клиентов и перестраховщика не иметь «больших» значений ущербов после заключения сделки отражено введением дополнительных ограничений сверху на их остаточные риски.

Работой, заложившей основы теории дележа риска в страховании, была статья Эрроу [4], где было показано, что при использовании принципа среднего значения для начисления премии оптимальным с точки зрения страхователя является дележ формы франшиза. В статье [6] были найдены Парето-оптимальные дележи между страховщиком и единственным страхователем, было показано, в частности, что максимизация полезности приводит к stop loss дележу, если решение о выборе функции дележа принимает страховщик, и к страхованию с франшизой, если выбирающей стороной является страхователь. В близкой постановке эти результаты были модифицированы на случай принципа среднего значения для вычисления премии в [9].

Оптимальность дележей страхования с франшизой изучалась в [10] с использованием разных типов распределений суммарного риска. В [5] были представлены условия на стоимость страхования, при которых оптимальными оказывались различные типы дележей страхования, такие как франшиза, сострахование и др. Исследование влияния различных типов функции полезности на уровень франшизы при ограничении сверху на риск страховщика проведено в [7]. Еще одним направлением исследований в статических моделях стал поиск оптимальных дележей при так называемом "Value at Risk" ограничении, которое означает установление нижней границы на вероятность разорения. Но, как было показано, например, в [11], учет этого ограничения ведет к тому, что оптимальные стратегии страхования оказываются разрывными функциями. Это означает наличие стимула к искажению действительного значения ущерба (moral hazard), что неприемлемо в страховой практике на развитых рынках. Работа [2] посвящена оптимизации страхования и индивидуального перестрахования при ограничении на среднее значение остаточного риска страхователя. Было показано, что решение такой задачи не единственно, и оптимальные дележи страхования образуют целый класс функций.

В отличие от предыдущих исследований, где разрешен выбор только стратегии страхования или/и перестрахования индивидуальных рисков, в настоящей работе изучается задача одновременной оптимизации дележей страхования и перестрахования суммарного риска страховщика от целой группы клиентов. Интерес именно к суммарному перестрахованию берет начало с работы [6], где было установлено, что лучшим поведением страховщика будет не индивидуальное перестрахование, а создание пула из рисков клиентов с дальнейшим обращением за его перестрахованием. Еще один момент, отличающий предложенную модель, состоит в наличии естественных ограничений, наложенных с вероятностью единица на остаточные риски клиентов и перестраховщика.

Параграф 2 содержит формальное описание модели. В п. 3 рассмотрен частный случай, когда страховщик выбирает лишь стратегию (или, другими словами, дележ) перестрахования суммарного риска, целиком принимая на себя риски страхователей. Показано, что оптимум достигается на stop loss перестраховании с верхним пределом. В п. 4 рассмотрен общий случай оптимизации страхования и перестрахования при ограничениях на остаточные риски. Доказано (теорема 2), что оптимальное перестрахование по-прежнему имеет вид stop loss стратегии с верхним пределом, а оптимальное страхование есть комбинация stop loss страхования и франшизы. Выведена система уравнений оптимальности для двух параметров, входящих в выражения для оптимальных стратегий, а также проведено сравнение нашей модели с перестрахованием суммарного риска и модели с индивидуальным перестрахованием.

2. Описание модели

Рассматривается модель страхового рынка, состоящего из страховщика, перестраховщика и n клиентов ($n \geqslant 2$). Потенциальные ущербы (риски) клиентов – независимые неотрицательные случайные величины X_j, $j = 1, \dots, n$, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. В дальнейшем эта группа клиентов предполагается однородной: все X_j имеют одинаковое распределение $F(x) \stackrel{def}{=} P\{X_j \leqslant x\}$. Через $T = \sup\{supp\, F\} \leqslant \infty$ будем обозначать верхнюю грань носителя распределения F, т. е. множества возможных значений риска X_1. Страховщик выбирает функцию дележа страхования $I(x)$ и функцию дележа перестрахования $A(x)$ из класса борелевских функций на $[0, \infty)$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant I(x) \leqslant x$ и $0 \leqslant A(x) \leqslant x$, которые означают, что возмещение не может быть отрицательным и не может превосходить величины ущерба. Случайная величина $I(X_j)$ есть возмещаемая j-му клиенту часть ущерба, $A(\sum_{j=1}^{n} I(X_j))$ – доля, оплачиваемая страховщиком после перестрахования его суммарного риска $X^I = \sum_{j=1}^{n} I(X_j)$. Остаток $X^I - A(X^I)$ возмещается перестраховщиком.

Наложим дополнительные ограничения на дележи (I, A), которые отражали бы желание других участников рынка – страхователей и перестраховщика – защититься от больших потерь, т. е. ввести ограничения сверху на максимальные возможные значения их рисков

(i) остаточный риск клиента после страхования $X_1 - I(X_1) \leqslant q$,

(ii) риск перестраховщика $X^I - A(X^I) \leqslant Q$. Здесь q и Q – заданные положительные константы, неравенства понимаются выполненными с вероятностью единица (п.н.). Легко видеть, что эти ограничения можно эквивалентно переписать в форме ограничений снизу на функции дележа страхования и перестрахования: $I(x) \geqslant x - q$ и $A(x) \geqslant x - Q$ для $x \in [0, \infty)$.

Премия P, полученная от клиента, и премия P_1 от страховщика за перестрахование определяются по формуле среднего значения, широко используемой в актуарной литературе (см., например, [1]): $P = (1 + \alpha)E\, I(X_1)$ и $P_1 = (1 + \alpha_1)E\,[X^I - A(X^I)]$. Здесь суммарный риск страховщика (до перестрахования) $X^I = \sum_{j=1}^{n} I(X_j)$, а α и α_1 – заданные коэффициенты нагрузки, соответственно, страховщика и перестраховщика, удовлетворяющие стандартным неравенствам $0 < \alpha < \alpha_1$.

Предпочтения страховщика описываются его функцией полезности: риск Y_1 предпочтительнее риска Y_2 тогда и только тогда, когда $E\, u(Y_1) > E\, u(Y_2)$, где $u(x)$ – заданная дважды дифференцируемая вогнутая функция полезности: $u' > 0$ и $u'' < 0$. Объектом изучения в данной работе является задача выбора страховщиком оптимальных дележей страхования и перестрахования, где целевым функционалом выступает ожидаемая полезность финального капитала страховщика

$$J[I, A] \stackrel{def}{=} E\, u \left(nP - P_1 - A(\sum_{j=1}^{n} I(X_j)) \right). \tag{1}$$

С учетом ограничений, введенных на допустимые дележи, эта задача имеет вид

$$\max_{I,A} J[I, A] \tag{2}$$

при ограничениях $(x - q)_+ \leqslant I(x) \leqslant x$ и $(x - Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x$, где мы обозначили через $(y)_+ = \max\{0, y\}$.

Ниже будем предполагать конечность всех математических ожиданий, указанных в тексте. Это условие не является слишком ограничительным, поскольку существование $E\, X_1 < \infty$ и $E\,|u(-n(1 + \alpha_1)E\, X_1 - \sum_1^n X_j)| < \infty$ влечет конечность ожидаемой полезности $J[I, A]$ при любых дележах риска. Отметим в заключение, что совпадение дележей $(I, A) = (I', A')$ означает $I(X_1) = I'(X_1)$ и $A(\sum_{j=1}^{n} I(X_j)) = A'(\sum_{j=1}^{n} I'(X_j))$ с вероятностью единица (п.н.).

3. Оптимизация перестрахования

Сначала рассмотрим частный случай описанной выше модели, в котором не предполагается дележ риска между страховщиком и клиентом или, в наших обозначениях, $I(x) \equiv x$ – каждый индивидуальный ущерб страхуется целиком. Страховщик может выбирать лишь дележ перестрахования, и оптимизационная задача (2) сводится к следующей

$$J[A] \equiv E\, u\,(nP - P_1 - A(X)) \to \max \tag{3}$$
$$\text{при ограничении } (x - Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x,$$

где

$$P = (1 + \alpha)E\, X_1,$$
$$P_1 = (1 + \alpha_1)\{nE\, X_1 - E\, A(X)\} \text{ и}$$
$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Теорема 1. Задача (3) имеет единственное решение, stop loss перестрахование с верхним пределом $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$, где $x \wedge y \stackrel{def}{=} \min\{x, y\}$ и $x \vee y \stackrel{def}{=} \max\{x, y\}$. Уровень

$$a^* = \begin{cases} a^0 & \text{при } a^0 < nT, \\ nT & \text{иначе,} \end{cases}$$

здесь $a^0 > 0$ есть минимальный корень уравнения $\psi(a) = 0$,

$$\begin{aligned} &\psi(a) \stackrel{def}{=} (1 + \alpha_1)E\, u'(P_a - A_a(X)) \\ &-u'(P_a - a), \\ &\text{где } P_a \stackrel{def}{=} (1 + \alpha_1)E\, A_a(X) - n(\alpha_1 - \alpha)E\, X_1, \\ &A_a(x) \stackrel{def}{=} (x \wedge a) \vee (x - Q). \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство: В силу вогнутости функции полезности $u(\cdot)$, функционал $J[A]$ также вогнут по A. Поэтому дележ A^* оптимален тогда и только тогда, когда производная по направлению

$$\frac{d}{d\lambda}J[\lambda A^* + (1-\lambda)A]\Big|_{\lambda=1} \geqslant 0$$

для любого допустимого A. После вычисления производной (см. (1)) получаем, что последнее неравенство означает

$$\int\limits_0^{nT} \eta(x)(A^*(x) - A(x))dF_\Sigma(x) \geqslant 0,$$

где функция

$$\eta(x) = (1+\alpha_1)Eu'(nP - P_1^* - A^*(X)) \\ -u'(nP - P_1^* - A^*(x)) \qquad (5)$$

и $F_\Sigma(x)$ обозначает функцию распределения суммарного риска X. Таким образом, A^* – решение задачи

$$\max_A \int\limits_0^{nT} \eta(x)A(x)dF_\Sigma(x)$$

на множестве борелевских функций $\{A(x) : (x-Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x\}$. Для решения такой задачи применим лемму Неймана-Пирсона (см., например, [3], применения в задачах оптимизации страхования можно найти в [9]): допустимый дележ A^* оптимален тогда и только тогда, когда

$$A^*(x) = \begin{cases} (x-Q)_+ & \text{если } \eta(x) < 0, \\ x, & \text{если } \eta(x) > 0 \end{cases} \qquad (6)$$

для всех x с точностью до множества нулевой F_Σ-меры. Поскольку $u'(\cdot)$ убывает, то легко видеть, что $\eta(0) > 0$. При возрастании x от $x = 0$ имеем, в силу (6), что $A^*(x)$ остается равной x и $\eta(x)$ убывает вплоть до точки a^0, в которой $\eta(x)$ впервые становится равной нулю. На интервале $[a^0, a^0+Q]$ функция $\eta(x)$ не может ни возрастать ни убывать, поскольку в противном случае мы получили бы противоречие с (6).

Таким образом, $\eta(x)$ убывает на $[0, a^0]$ при этом $A^*(x) = x$, равна нулю на интервале $[a^0, a^0+Q]$, где $A^*(x) = a^0$. Когда x возрастает от точки a^0+Q, значения $A^*(x)$ лежат на нижней границе $x - Q$. Действительно, если $A^*(x) > x - Q$, то $\eta(x)$ убывает от $0 = \eta(a+Q)$ и, согласно (6), мы имели бы $A^*(x) = x - Q$. Окончательно получаем: оптимальная функция дележа есть stop loss перестрахование с верхним пределом, $(x \wedge a^0) \vee (x - Q)$, на $[0, \infty)$. Для нахождения a^0, т. е. точки, в которой $\eta(x)$ впервые обращается в ноль, подставим в $\eta(x)$ выражение $(X \wedge a) \vee (X - Q)$ вместо $A^*(X)$ и a вместо $A^*(x)$. Уравнение, определяющее a^0, примет тогда вид $\psi(a) = 0$, где функция $\psi(a)$ указана в (4). Принимая во внимание вырожденный случай $\psi(a) > 0$ на $[0, nT)$, где правая граница $nT = \sup\{supp\, F_\Sigma\}$, приходим к окончательной формуле $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$ с a^*, определенной в теореме 1. □

Оптимальное перестрахование $A^*(x)$ суммарного риска, найденное в теореме 1, представляет собой двухпараметрическую функцию, которую в литературе иногда называют перестрахованием эксцедента убыточности. Если суммарный ущерб X не превосходит уровень удержания страховщика a^*, то страховщик оплачивает весь ущерб; далее ущерб оплачивается перестраховщиком за вычетом a^* и, наконец, если $X > a^* + Q$, то перестраховщик платит предельную сумму Q, а остаток погашается страховщиком. Таким образом, перестраховщику достается "средняя" доля риска $X - A^*(X) = (X - a^*)_+ \wedge Q$. Константа Q имеет смысл максимальной суммы, которую перестраховщик готов заплатить, поэтому функцию дележа $A^*(x)$ часто называют stop loss перестрахованием с верхним пределом (т. е. верхним пределом Q ответственности перестраховщика).

Замечание 1: В вырожденном случае уравнение $\psi(a) = 0$ может, вообще говоря, не иметь корней на $[0, nT]$, т. е. $\psi(a) > 0$ на $[0, nT]$, где nT верхняя граница носителя F_Σ. Тогда уровень a^* полагаем равным nT, что означает отказ страховщика от перестрахования.

4. Общий случай: оптимальный выбор страхования и перестрахования

В этом параграфе будет найдено решение задачи (2), которая формулируется здесь в полном объеме с выбором стратегий и страхования индивидуальных рисков, и перестрахования суммарного ущерба

$$J[I, A] \equiv E\, u\left(nP - P_1 - A(X^I)\right) \to \max \quad (7)$$

при ограничениях $(x - q)_+ \leqslant I(x) \leqslant x$ и $(x - Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x$.

Ниже нам понадобится понятие двухпараметрической функции дележа страхования $I(x) = (x \wedge k) \vee (x - q)$, которая является комбинацией stop loss страхования $x \wedge k$ и франшизы $(x - q)_+$. При таком выборе функции $I(x)$ дележа страхования страховщику достается "хвост" распределения риска клиента X_1, самому же страхователю остается "средняя" доля его риска $X_1 - I(X_1) = (X_1 - k)_+ \wedge q$.

Как будет показано, функция дележа такого типа вместе со stop loss перестрахованием с верхним пределом оптимальны в задаче (7).

Теорема 2. Оптимальные дележи (I^*, A^*) в задаче (7) имеют следующий вид: комбинация stop loss страхования и франшизы $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$, stop loss перестрахование с верхним пределом $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$. Уровни $k^* = k^0 \wedge T$ и $a^* = a^0 \wedge nT$ удовлетворяют неравенству $0 < k^* < a^*$, параметры k^0 и a^0 являются решением пары уравнений $\psi_1(k, a) = 0$ и $\psi_2(k, a) = 0$, в которых

$$\psi_1(k,a) \stackrel{def}{=} (1+\alpha) E\, u'(P_{k,a} - A_a(X_k^I)) \\ -E\left[u'(P_{k,a} - A_a(X_k^I)) | X_1 = k\right], \qquad (8)$$

$$\psi_2(k,a) \stackrel{def}{=} (1+\alpha_1) E\, u'(P_{k,a} - A_a(X_k^I)) \\ -u'(P_{k,a} - a), \qquad (9)$$

где обозначены
$P_{k,a} = (1+\alpha_1) E\, A_a(X_k^I) - n(\alpha_1 - \alpha) E\, I_k(X_1)$, $A_a(x) = (x \wedge a) \vee (x - Q)$,
$I_k(x) = (x \wedge k) \vee (x - q)$, и $X_k^I = \sum\limits_{j=1}^{n} I_k(X_j)$.

Доказательство: Покажем сначала, что исследуемая задача имеет решение.

Лемма 1. В задаче (7) существует оптимальная пара дележей (I^*, A^*).

Доказательство: Обозначим через $\{I_n, A_n\}$ максимизирующую последовательность в (7), т. е., $\lim\limits_{n\to\infty} J[I_n, A_n] = J^* \stackrel{def}{=} \sup\limits_{I,A} J[I, A]$. По теореме Хелли, существует подпоследовательность $\{I_m(X_1), A_m(X^{I_m})\}$ с $X^{I_m} = \sum\limits_{j=1}^{n} I_m(X_j)$, слабо сходящаяся к (δ, ε). Для доказательства того, что δ и ε есть собственные случайные величины, заметим: $I_m(X_1) \leqslant X_1$ и $A_m(X^{I_m}) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ п.в. Поэтому соответствующие функции распределения $F_m^I(x) \geqslant F(x)$ и $F_m^A(x) \geqslant F_\Sigma(x)$, и тогда пределы δ и ε удовлетворяют требуемому неравенству $P\{\delta < \infty, \varepsilon < \infty\} = 1$. Так как δ измерима относительно сигма-алгебры $\sigma(X_1)$, порожденной X_1, и $(X_1 - q)_+ \leqslant \delta \leqslant X_1$ п.н., то предел δ может быть представлен как $\delta = I^*(X_1)$ для некоторой допустимой функции дележа страхования $I^*(x)$. Аналогично, другой предел ε представим в виде $\varepsilon = A^*(\sum\limits_{j=1}^{n} I^*(X_j)$ для некоторой допустимой функции дележа перестрахования $A^*(x)$. Наконец, тот факт, что $J^* = J[I^*, A^*]$, следует из доказанной слабой сходимости, непрерывности функции полезности u, и конечности ожидаемой полезности $J[I^*, A^*]$. $\square$

Обозначим через (I^*, A^*) решение (7), существующее в силу леммы 1. Так как A^* решает задачу $\max\limits_{A} J[I^*, A]$, то, в силу теоремы 1 (где X заменен на $X^* = \sum\limits_{j=1}^{n} I^*(X_j))$, $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$ для подходящего уровня a^*.

Рассмотрим задачу $\max\limits_{I} J[I, A^*]$. Так же, как в доказательстве теоремы 1, определим $I_\rho = \rho I^* + (1-\rho) I$. Тогда необходимым условием оптимальности I^* будет

$$\frac{d}{d\rho}\, J[I_\rho, A^*]|_{\rho=1} \geqslant 0$$

для любого допустимого I. Выражение для $J[I, A^*]$ задано в (1), и после дифференцирования будем иметь

$$\int\limits_0^T \ldots \int\limits_0^T \xi(x_1, \ldots, x_n)[\sum_1^n I^*(x_j) \\ -\sum_1^n I(x_j)] dF(x_1) \ldots dF(x_n) \geqslant 0,$$

где функция

$$\xi(\bar{x}) = \mathbf{1}(\bar{x})[(1+\alpha_1) E u'(nP^* - P_1^* - A^*(X^*)) \\ -u'(nP^* - P_1^* - A^*(\sum_1^n I^*(x_j)))] \\ -(\alpha_1 - \alpha) E u'(nP^* - P_1^* - A^*(X^*)). \qquad (10)$$

Здесь $\mathbf{1}(\bar{x}) = \mathbf{1}\{\sum\limits_1^n I^*(x_j) \in [0, a^*] \cup [a^* + Q, \infty)\}$ и $\mathbf{1}\{\cdot\}$ обозначает индикаторную функцию.

Для анализа выведенного условия оптимальности введем новую функцию $\xi_\Sigma(\cdot)$ от скалярного аргумента соотношением $\xi(\bar{x}) \equiv \xi_\Sigma(\sum\limits_1^n I^*(x_j))$. В определенном смысле она соответствует модели с единственным "коллективным" страхователем. Теперь мы можем записать приведенное выше неравенство в виде $n \int\limits_0^T \theta(x)(I^*(x) - I(x)) dF(x) \geqslant 0$, где

$$\theta(x) = E\, \xi_\Sigma(I^*(x) + \sum_{j=2}^{n} I^*(X_j)), \qquad (11)$$

и математическое ожидание берется по случайным переменным $X_2, \ldots, X_n$. Другими словами, оптимальный дележ I^* есть решение задачи

$$\max \int_0^T \theta(x) I(x) dF(x)$$

$$\text{при ограничении } (x-q)_+ \leqslant I(x) \leqslant x. \quad (12)$$

Докажем теперь, что единственное решение в (12) имеет вид $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x-q)$, где уровень $0 < k^* < a^*$.

Применяя лемму Неймана-Пирсона, получаем, что допустимая функция I^* решает (12) тогда и только тогда, когда

$$I^*(x) = \begin{cases} (x-q)_+ & \theta(x) < 0, \\ x, & \theta(x) > 0 \end{cases} \quad (13)$$

с точностью до множества нулевой F-меры. Функция $\theta(x)$, определенная в (11), есть усреднение $\xi_\Sigma(I^*(x)+z)$ по распределению $G(z)$ случайной величины $Z = \sum_2^n I^*(X_j)$. После этого усреднения по z получаем, что $\theta(0) = (1+\alpha) Eu'(nP^* - P_1^* - A^*(X^*)) -$

$$-E\left[u'(nP^* - P_1^* - A^*(x + \sum_2^n I^*(X_j)))\right]\Big|_{x=0} > 0,$$

поскольку $u'(\cdot)$ убывает и $A^*(\cdot)$ есть неубывающая функция (вида $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x-Q)$). При возрастании x от точки $x=0$, функция $\theta(x)$ убывает от положительного значения $\theta(0) > 0$, поскольку для этих x значение $I^*(x) = x$, как следует из (13).

Докажем, что точка k^0, в которой $\theta(x)$ первый раз попадает в ноль, лежит левее a^*. В оптимальном перестраховании $A^*(x)$ уровень $a^* = a^0 \wedge nT$, где (см. доказательство теоремы 1) a^0 есть минимальный нуль функции $\eta(x)$, определенной в (5), при $A^*(x) = x$ для $x \leqslant a^0$. Поскольку коэффициент нагрузки перестраховщика $\alpha_1 > \alpha$, легко видеть, что $\eta(x) > \xi_\Sigma(x) = (1+\alpha)Eu'(nP^* - P_1^* - A^*(X^*)) - u'(nP^* - P_1^* - A^*(x))$ для x от 0 до точки K_Σ, нуля функции $\xi_\Sigma(x)$. Следовательно, $K_\Sigma < a^0$ и тогда наименьший нуль функции $\xi_\Sigma(x+z)$ при фиксированном $z > 0$ есть $K_\Sigma - z < a^0$. После усреднения по z и получения $\theta(x) = E\,\xi_\Sigma(I^*(x)+Z)$ такое положение вещей сохранится: k^0 – наименьший нуль $\theta(x)$ – лежит левее точки $K_\Sigma < a^0$.

Когда x пробегает интервал $[k^0, k^0+q)$, функция $\theta(x)$ не убывает и не возрастает, оставаясь нулевой, при этом $I^*(x)$ равна константе k^0. Действительно, если $I^*(x)$ убывает, то из определения (10)–(11) следует, что $\theta(x)$ возрастает от нуля. Тогда, согласно (13), $I^*(x) = x$ – мы имеем противоречие. Пусть $I^*(x)$ возрастает, тогда $\theta(x)$ убывает от $\theta(k^0) = 0$, становясь отрицательной. В силу (13), $I^*(x) = (x-q)_+ < I^*(k^0) = k^0$, и мы получаем противоречие с предположением о возрастании $I^*(x)$.

При возрастании x от k^0+q, значения $I^*(x)$ равны $x-q$, нижней границе допустимых значений. Предположим противное: $I^*(x) > x-q$. Как было показано выше, это возрастание от $I^*(k^0+q) = k^0$ ведет к тому, что $\theta(x) < 0$. Тогда из (13) получаем, что $I^*(x)$ должна совпадать с $x-q$.

Таким образом, единственный оптимальный дележ в задаче (12) имеет вид $I^*(x) = (x \wedge k^0) \vee (x-q)$ на $[0, \infty)$, где $0 < k^0 < a^* = a^0 \wedge nT$.

Для того чтобы найти точку k^0, в которой значение $\theta(x)$ первый раз становится нулевым, подставим в (11) найденное выражение $(X_j \wedge k) \vee (X_j - q)$ вместо $I^*(X_j)$, $j = 2, \ldots, n$ и k вместо $I^*(x)$. Тогда k^0 будет минимальным корнем уравнения $\psi_1(k, a^*) = 0$, где функция $\psi_1(k, a)$ задана выражением (8). Осталось рассмотреть вырожденный случай: если $\psi_1(k, a^*) > 0$ на $[0, T)$, то полагаем $k^* = T$. Это означает, что $I^*(X_1) = X_1$ п.н. – страховщик оплачивает весь ущерб клиента.

Для нахождения уровня a^* в оптимальном перестраховании $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x-Q)$, обратимся к теореме 1. Было показано, что в задаче оптимизации перестрахования уровень $a^* = a^0 \wedge nT$, где a^0 является корнем уравнения $\psi(a) = 0$ с функцией $\psi(a)$, определенной в (4). В нашем случае при использовании дележа страхования вида $I_k(x) = (x \wedge k) \vee (x-q)$, суммарный риск $X = \sum_{j=1}^n X_j$ заменяется в (4) на $X_k^I = \sum_{j=1}^n I_k(X_j)$. В результате приходим к уравнению $\psi_2(k, a) = 0$, где $\psi_2(k, a)$ определена в (9). $\square$

Найденные в теореме 2 стратегии I^* и A^* применяются, соответственно, к каждому индивидуальному риску X_j, $j = 1, \ldots, n$ и к суммарному ущербу $X^* = \sum_{j=1}^n I^*(X_j)$, погасить который обязался перед клиентами страховщик. В этом принципиальное отличие от модели с выбором индивидуального страхования и индивидуального перестрахования в [2], где, как и здесь, принятый страховщиком от клиента риск есть с. в. $I^*(X_j)$, но суммарная доля страховщика после перестрахования равна $\sum_{j=1}^n A^*(I^*(X_j))$, в то время как в нашем случае это $A^*(\sum_{j=1}^n I^*(X_j))$. Если выбрать подходящую аппроксимацию для $\sum_{j=1}^n I^*(X_j)$ (пусть, для определенности, нормальную), то доля страховщика окажется кусочно-линейным преобразованием $A^*(\cdot)$ от нормальной с.в. В случае же индивидуального перестрахования, к доле страховщика $\sum_{j=1}^{n} A^*(I^*(X_j))$ непосредственно применяется нормальная аппроксимация.

Замечание 2. Найденные в теореме 2 оптимальные дележи (I^*, A^*) допускают, вообще говоря, два вырожденных случая: Если уровень удержания страховщика $k^* \geqslant T = \sup suppF$ тогда, очевидно, $I^*(X_1) = X_1$ п.н., т. е. страховщик берет ответственность за весь риск клиента – дележ риска ему не выгоден. После дележа страхования верхняя грань носителя суммарного риска $X^* = \sum_{j=1}^{n} I^*(X_j)$, принятого страховщиком, становится равной $nT^* = n(T \wedge k^*) \vee (T - q) \leqslant nT$. Если в дележе перестрахования найденный уровень a^* оказался не меньше, чем эта граница, а именно, $a^* \geqslant nT^*$, то $A^*(X^*) = (X^* \wedge a^*) \vee (X^* - Q) = X^*$ п.н. – страховщик не обращается за перестрахованием.

Представляется интересным сравнить оптимальные дележи в случае индивидуального перестрахования, где финальный капитал страховщика $nP - nP^1 - \sum_{j=1}^{n} A(I(X_j))$ с премией перестраховщику $P^1 = (1 + \alpha_1)E[I(X_1) - A(I(X_1))]$, и в нашем случае суммарного перестрахования, где финальный капитал $nP - P_1 - A(\sum_{j=1}^{n} I(X_j))$. Для простоты рассмотрим модели без дополнительных ограничений, где допустимыми считаются все дележи, такие что $0 \leqslant I(x) \leqslant x$ и $0 \leqslant A(x) \leqslant x$. Как было показано в [2], оптимальными дележами в первом случае будут stop loss стратегии $I^*(x) = x \wedge k^*$ и $A^*(x) = x \wedge a^*$ причем, в силу неравенства $\alpha < \alpha_1$, всегда выполнено $k^* \leqslant a^*$. Это означает, что риск страховщика после перестрахования $A^*(I^*(X_1)) = I^*(X_1)$ п.н. — перестрахование не востребовано. Однако в случае перестрахования суммарного риска, такой отказ от перестрахования необязательно имеет место. Из теоремы 2, формально полагая $q = Q = \infty$, получаем $I^*(x) = x \wedge k^*$ и $A^*(x) = x \wedge a^*$, где $k^* < a^*$. Но a^* – уровень удержания не в индивидуальном перестраховании, а в перестраховании суммарного риска $X^* = \sum_{j=1}^{n} X_j \wedge k^*$, верхняя граница возможных значений которого равна nk^*. Поэтому для $n > 1$ возможна ситуация, когда $nk^* > a^*$ и, следовательно, доля страховщика после перестрахования $A^*(X^*) = X^* \wedge a^*$ не совпадает с X^* – перестрахование оказывается выгодным. Следующее ниже предложение устанавливает, что такая ситуация имеет место, когда разница между коэффициентами нагрузки страховщика и перестраховщика, где $\alpha < \alpha_1$, "не слишком большая т. е. когда перестрахование "не слишком" дорого.

Предложение 1. Для задачи $\max\limits_{I,A} J[I, A]$ без дополнительных ограничений в невырожденном случае, когда $k^* < T$, существует $\alpha' > \alpha$ такой, что для любого $\alpha_1 \in [\alpha, \alpha')$ неравенство $nk^* > a^*$ выполняется.

Доказательство: Как следует из доказательства теоремы 2 (где теперь $q = Q = \infty$), уровень $k^* < T$ является наименьшим корнем уравнения $\theta(x) = 0$, в котором (см. (11)) $\theta(x) = E\,\xi_\Sigma(I^*(x) + Z)$, $I^*(x) = x \wedge k^*$ и $Z = \sum_{2}^{n} I^*(X_j)$. Функцию распределения с.в. Z обозначим через $G(z)$. Было показано, что $k^* < K_\Sigma < a^*$, где K_Σ есть точка первого обнуления $\xi_\Sigma(x)$. С другой стороны, k^* может быть также определена как наименьший нуль функции $E\,\xi_\Sigma(x + Z)$.

Докажем, что $nk^* > K_\Sigma$. Предположим противное, $nk^* \leqslant K_\Sigma$. Так как $I^*(x) = x \wedge k^*$, имеем $\sup\{supp\, G\} = (n-1)k^*$ и, по предположению, $\sup\{supp\, G\} \leqslant K_\Sigma - k^*$. Как было отмечено, k^* – наименьший нуль $E\,\xi_\Sigma(x + Z)$, поэтому $k^* > K_\Sigma - \sup\{supp\, G\} \geqslant K_\Sigma - (K_\Sigma - k^*) = k^*$. Полученное противоречие доказывает требуемое неравенство $nk^* > K_\Sigma$.

Принимая во внимание то, что по определению функции $\xi_\Sigma(x)$ точка K_Σ совпадает с a^*, если $\alpha_1 = \alpha$, из непрерывности $\xi_\Sigma(\cdot)$ получаем существование $\alpha' > \alpha$ такого, что $nk^* > a^*$ при любом $\alpha_1 \in [\alpha, \alpha')$. $\square$

Обоснование такого эффекта выгодности перестрахования именно суммарного риска состоит, как было отмечено выше, в том, что лучшая стратегия страховщика – это не перестрахование отдельных рисков, а образование пула $\sum_{j=1}^{n} I^*(X_j)$ из них и затем обращение за перестрахованием этого суммарного риска. Отметим в заключение, что в случае, когда дополнительное ограничение $0 \leqslant A(x) \leqslant (x - Q)_+$ наложено на дележи перестрахования (допустимые I по-прежнему такие, что $0 \leqslant I(x) \leqslant x$), утверждение предложения 1 остается в силе. Доказательство получается повторением рассуждений в доказательстве предложения 1. В последнем случае, однако, сужение множества допустимых дележей A ведет к меньшему, вообще говоря, значению α'

правой границы интервала $[\alpha, \alpha')$ значений коэффициента α_1 нагрузки перестрахования.

Пример. Рассмотрим задачу нахождения пары оптимальных дележей (I^*, A^*) в случае экспоненциальной функции полезности страховщика $u(x) = c^{-1}(1 - \exp(-cx))$ с заданным коэффициентом неприятия риска $c = 0,1$. Пусть численность группы клиентов $n = 15$, распределение $F(x)$ индивидуального ущерба равномерно на $[0, 10]$, верхние границы рисков $q = 7$ и $Q = 50$, коэффициент нагрузки страховщика $\alpha = 0,5$. Для моделирования распределения суммарного риска страховщика $\sum_{j=1}^{n} I(X_j)$ мы используем усеченное нормальное распределение, которое довольно часто применяется в моделях страхования (см., например, [1]). Его плотность есть

$$\mathbf{1}\{x \geqslant 0\} \frac{\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})}{\int_0^\infty \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})dx}.$$

По теореме 2, оптимальные дележи в задаче (7) максимизации полезности страховщика равны $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$ и $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$. Уровни k^* и a^* определяются из системы двух уравнений: $\psi_1(k, a) = 0$ и $\psi_2(k, a) = 0$ (см. (8)–(9)). В данном случае, когда $u'(x) = e^{-cx}$, эти уравнения имеют вид

$$(1+\alpha)E\,\exp[cA_a(X_k^I)] \\ -E\,\exp[cA_a(k + \sum_{j=2}^{n} I_k(X_j))] = 0 \qquad (14)$$

$$(1+\alpha_1)E\,\exp[cA_a(X_k^I)] - \exp[ca] = 0, \quad (15)$$

где $A_a(x) = (x \wedge a) \vee (x - Q)$, $I_k(x) = (x \wedge k) \vee (x - q)$, и $X_k^I = \sum_{j=1}^{n} I_k(X_j)$. По предположению, случайные величины X_k^I и $\sum_{j=2}^{n} I_k(X_j)$ имеют, соответственно, усеченные нормальные распределения $\Phi^{tr}_{m,\sigma}(x)$ и $\Phi^{tr}_{m_1,\sigma_1}(x)$ с параметрами $m = nE\,I_k(X_1)$, $\sigma^2 = nVar\,I_k(X_1)$, и $m_1 = (n-1)E\,I_k(X_1)$, $\sigma_1^2 = (n-1)Var\,I_k(X_1)$. Формулы для первых двух моментов $I_k(X_1) = (X_1 \wedge k) \vee (X_1 - q)$ легко выводятся:

$$E\,I_k(X_1) = \int_0^k \bar{F}(x)dx + \int_{k+q}^\infty \bar{F}(x)dx,$$

$$E\,I_k^2(X_1) = 2[\int_0^k \bar{F}(x)xdx + \int_{k+q}^\infty \bar{F}(x)(x-q)dx].$$

Численное решение уравнений оптимальности (14)–(15) после подстановки равномерного распределения $F(x)$ дает: при значениях коэффициента нагрузки перестраховщика $\alpha_1 = 0,6$ и $\alpha_1 = 2$ оптимальные уровни равны, соответственно, $(k^*, a^*) = (3,446, 12,011)$ и $(k^*, a^*) = (1,149, 52,175)$ — удорожание перестрахования приводит к уменьшению доли страхуемого риска $I^*(X_j)$ и увеличению риска страховщика $A(X^*)$ после перестрахования.

Заключение

В статье рассмотрена задача одновременного выбора оптимального дележа риска между страховщиком и отдельным клиентом и оптимального дележа суммарного риска страховщика между ним и перестраховочной компанией. В аналитическом виде получены функции дележа – ими оказались кусочно-линейные функции специального вида – и найдены уравнения для определения параметров этих дележей. В качестве критерия была использована ожидаемая полезность страховщика. Особое внимание уделено сравнению оптимальных вариантов в рамках схем индивидуального и суммарного перестрахования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00078.

Литература

1. *Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д. и др.* Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001. 599 с.

2. *Голубин А. Ю., Гридин В. Н., Газов А. И.* Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 70, № 8. С. 133–144.

3. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 369 с.

4. *Arrow K. J.* Essays in the Theory of Risk Bearing. Chicago: Wyley and Sons, 1971. 278 p.

5. *Blazenko G.* Optimal Indemnity Contracts // Insurance: Mathematics and Economics. 1985. Vol. 4. P. 267–278.

6. *Raviv A.* The Design of an Optimal Insurance Policy // Amer. Economic Review. 1979. P. 84–96.

7. *Cummins J., Mahul O.* The Demand for Insurance with an Upper Limit on Coverage // Journal of Risk and Insurance. 2004. Vol. 71(2). P. 253–264.

8. *Golubin A. Y.* Pareto-optimal Insurance Policies in the Models with a Premium Based on the Actuarial Value // Journal of Risk and Insurance. 2006. Vol. 73, N 3. P. 469–487.

9. *Murray M. L.* A Deductible Selection Model: Development and Applications // Journal of Risk and Insurance. 1971. Vol. 38. P. 423–436.

10. *Schlesinger H.* The Optimal Level of Deductibility in Insurance Contracts // Journal of Risk and Insurance. 1981. Vol. 48. P. 465–481.

11. *Zhou C., Wu C.* Optimal Insurance Under the Insurer's VaR Constraint // The Geneva Risk and Insurance Review. 2009. Vol. 34. P. 140–154.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Гридин Владимир Николаевич
профессор, д. т. н.
Центр информационных технологий в проектировании РАН, Московская обл., г. Одинцово
эл. почта: info@ditc.ras.ru
тел.: (495) 596 02 19

Gridin, Vladimir
Russian Academy of Sciences, Design Information Technologies Center
7-A Marshala Biryuzova St., Odintsovo, Moscow region, 143000, Russia
e-mail: info@ditc.ras.ru
tel.: (495) 596 02 19

Голубин Алексей Юрьевич
доцент, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
Б. Трехсвятительский пер., 3, Москва, 109028
эл. почта: io@miem.edu.ru
тел.: (495) 916 88 13

Golubin, Alexey
National Research University Higher School of Economics
3 B. Trechsvjatitelsky St., Moscow, 109028, Russia
e-mail: io@miem.edu.ru
tel.: (495) 916 88 13

Петрова Мария Николаевна
аспирантка
Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
Б. Трехсвятительский пер., 3, Москва, 109028
эл. почта: io@miem.edu.ru
тел.: (495) 916 88 13

Petrova, Maria
National Research University Higher School of Economics
3 B. Trechsvjatitelsky St., Moscow, 109028, Russia
e-mail: io@miem.edu.ru
tel.: (495) 916 88 13