Труды Карельского научного центра РАН
№ 1. 2013. С. 79–85

УДК 519.2

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА В СЛУЧАЙНОМ НЕПОМЕЧЕННОМ НЕКОРНЕВОМ ЛЕСЕ

Е. С. Петрова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается множество $F_{N,n}$ всех случайных лесов, состоящих из N упорядоченных некорневых деревьев и n незанумерованных вершин, на котором задано равномерное распределение вероятностей. Для таких лесов доказаны предельные теоремы о числе деревьев заданного объема при $N, n \to \infty$ так, что $n/N > 2$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайные леса, число деревьев заданного объема, обобщенная схема размещения, предельные теоремы.

E. S. Petrova. ON THE LIMIT BEHAVIOUR OF NUMBER OF TREES OF A GIVEN SIZE IN A RANDOM UNLABELLED UNROOTED FOREST

We consider the set $F_{N,n}$ of all random forests consisting of N ordered unrooted trees and n unlabelled vertices with uniform probability distribution on this set. We prove limit theorems for the number of trees of a given size as $N, n \to \infty$ so that $n/N > 2$.

K e y w o r d s: random forests, number of trees of a given size, generalized allocation scheme, limit theorems.

Введение

Изучение случайных лесов, состоящих из некорневых деревьев с незанумерованными вершинами, началось в работах [1] и [2] с помощью обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и подробно изученной В. Ф. Колчиным (см., например, [4]). Были найдены предельные распределения таких важных характеристик случайного леса, как максимальный объем дерева и число деревьев заданного объема. В [1] рассматривалось предельное поведение случайной величины μ_r, равной числу деревьев, содержащих r вершин. Для случая $(n - LN)/(L_1N)^{2/3} \to -\infty$, где константы L и L_1 будут определены ниже в (4), доказано, что предельными распределениями для μ_r являются нормальное при фиксированном r и распределение Пуассона при $r \to \infty$. Настоящая статья завершает исследование предельного поведения μ_r в случае, когда $(n - LN)/(L_1N)^{2/3} \geqslant \beta > -\infty$.

Основные результаты

Обозначим $F_{N,n}$ – множество случайных непомеченных лесов, состоящих из N

некорневых деревьев, упорядоченных одним из $N!$ возможных способов, с общим числом вершин n. Зададим на этом объекте равномерное распределение вероятностей.

Рассмотрим производящую функцию

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x^k, \qquad (1)$$

где t_k – число непомеченных некорневых деревьев, содержащих k вершин. Свойства функции (1) изучены в [5]. Показано, что начало этой суммы вглядит следующим образом:

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + \ldots,$$

ее радиус сходимости $R = 0,3383219...$ Кроме того, функцию $t(x)$ можно разложить в ряд по степеням $\sqrt{R-x}$:

$$t(x) = a_0 - a_1(R-x) + a_2(R-x)^{3/2} + \ldots, \qquad (2)$$

где $a_0 = t(R) = 0,5628769\ldots, a_1 = t'(R) = 3,4127749\ldots, a_2 = 6,4243753\ldots$, а при $k \to \infty$

$$t_k = \alpha \left(R^k k^{5/2}\right)^{-1} + O\left(\left(R^k k^{7/2}\right)^{-1}\right), \qquad (3)$$

$\alpha = (3a_2/4\sqrt{\pi})\, R^{3/2} = 0,5349485\ldots$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &L = a_1 R/a_0 = 2,0512772\ldots, \\ &L_1 = a_2 R^{3/2}/(\sqrt{2}a_0) = 1,5881723\ldots \end{aligned} \qquad (4)$$

Пусть независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины $\xi_1, ..., \xi_N$ имеют распределение следующего вида:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = t_k R^k a_0^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Обозначим $m = \mathbf{E}\,\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\,\xi_1$. Заметим, что $m = L$.

В работе [2] показано, что справедливо равенство:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, ..., \eta_N = k_N\} \qquad (6) \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}, \end{aligned}$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_N$ – случайные величины, равные объемам деревьев леса из $F_{N,n}$. Это равенство означает, что для рассматриваемых случайных лесов выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам (см., например, [4]).

Справедливо следующее утверждение о предельном поведении числа вершин заданного объема μ_r.

Теорема. *Пусть*

$$u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)},$$

а $N, n \to \infty$ *так, что*

$$(n - LN)/(L_1 N)^{2/3} \geqslant \beta > -\infty.$$

Тогда для целых неотрицательных k *равномерно относительно* u_r *в любом конечном интервале:*
1) при фиксированном r

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}^{-1} e^{-\frac{u_r^2}{2}}(1+o(1));$$

2) при $r \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!}(Np_r)^k exp\{-Np_r\}(1 + o(1)).$$

Ниже приводятся леммы 1–3, с помощью которых будет доказана сформулированная теорема.

Вспомогательные утверждения

Пусть r – натуральное число. Введем независимые случайные величины $\xi_i^{(r)}$, $i = 1, \ldots, N$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \neq r\}. \qquad (7)$$

Положим

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_N^{(r)}.$$

Обозначим также $m_r = \mathbf{E}\,\xi_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\,\xi_1^{(r)}$. Из (5) и (7) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &m_r = \frac{m - rp_r}{1 - p_r}, \\ &\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1-p_r)^2}\left(1 - p_r - p_r\frac{(m-r)^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \qquad (8)$$

Пусть $\varphi(t)$ и $\varphi_r(t)$ означают характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\xi_1^{(r)}$ соответственно. Используя (1), (2), (4), (5) и (7), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = 1 - L(1 - e^{it}) + \sqrt{2}L_1(1 - e^{it})^{3/2} + \ldots, \\ &\varphi_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}. \end{aligned} \qquad (9)$$

В условиях обобщенной схемы размещения, как показано в [4], удобно использовать следующую лемму, которая является следствием соотношения (6).

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right) p_r^k (1-p)^{N-k} \frac{\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Лемма 1 показывает, что для изучения асимптотики μ_r достаточно изучить предельное поведение сумм независимых случайных величин ζ_N и $\zeta_N^{(r)}$ и биномиальных вероятностей $\left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right) p_r^k (1-p)^{N-k}$.

Лемма 2. *Пусть*

$$N, n \to \infty, \quad S = N(1-p_r)(1+o(1)).$$

Тогда для натуральных h равномерно относительно $v = (h - m_r S)/(L_1 S)^{2/3}$ в любом конечном фиксированном интервале

$$(L_1 S)^{2/3} \mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_S^{(r)} - m_r S}{(L_1 S)^{2/3}} = v\right\} = g(v)\left(1 + o(1)\right),$$

где $g(v)-$ плотность устойчивого распределения с характеристической функцией

$$f(t) = exp\left\{-|t|^{3/2}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\right)\right\}. \qquad (10)$$

Доказательство. Обозначим $\psi_r(t)$ характеристическую функцию $(\zeta_S^{(r)} - m_r S)/(L_1 S)^{2/3}$. Нетрудно видеть, что

$$\psi_r(t) = exp\left\{-\frac{i m_r S t}{(L_1 S)^{2/3}}\right\} \varphi_r^S\left(\frac{t}{(L_1 S)^{2/3}}\right).$$

Используя разложение e^{it} в ряд Тейлора при $t \to 0$, из (9) получаем:

$$\varphi(t) = 1 - L_1|t|^{3/2} + i\left(Lt + L_1|t|^{3/2}\frac{t}{|t|}\right) + O(t^2). \qquad (11)$$

Отсюда, учитывая (8), получаем выражение

$$\ln \psi_r(t) = -\frac{iLSt}{(L_1 S)^{2/3}(1-p_r)} + S\ln\left(1 - \frac{|t|^{3/2}}{S} + \frac{iLt}{(L_1 S)^{2/3}} + \frac{i|t|^{3/2}}{S}\frac{t}{|t|} + O\left(\frac{t^2}{S^{4/3}}\right)\right),$$

откуда

$$\psi_r(t) = exp\left\{-|t|^{3/2}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\right)\right\}(1 + o(1)) \qquad (12)$$

По теореме 2.2.2 из [3] выражение $exp\left\{-|t|^{3/2}\left(1 - i(t/|t|)\right)\right\}$ является характеристической функцией устойчивого закона распределения с показателем 3/2. Отсюда и из локальной предельной теоремы о сходимости распределений сумм независимых слагаемых (теорема 4.2.1 из [3]) при фиксированном r следует утверждение леммы.

При $r \to \infty$ $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_S^{(r)}$ образуют схему серий, поэтому применить известные достаточные условия сходимости (см., например, [3]) нельзя. Докажем локальную сходимость, следуя стандартному алгоритму доказательства предельных локальных теорем. Используя формулу обращения, получаем, что

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_S^{(r)} - m_r S}{(L_1 S)^{2/3}} = v\right\} = \frac{1}{2\pi (L_1 S)^{2/3}} \times \int_{-\pi(L_1 S)^{2/3}}^{\pi(L_1 S)^{2/3}} e^{-ivu} \psi_r(u) du.$$

Отсюда и из (12) следует, что плотность распределения $f(y)$ функции $\psi_r(t)$ имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-iyu - |u|^{3/2}\left(1 - i\frac{u}{|u|}\right)\right\} du.$$

Таким образом, разность

$$R_S = 2\pi\left[(L_1 S)^{2/3}\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_S^{(r)} - m_r S}{(L_1 S)^{2/3}} = v\right\} - f(v)\right]$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R_S = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \qquad (13)$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-ivu}\left[\psi_r(u) - exp\left\{-|u|^{3/2}\left(1 - i\frac{u}{|u|}\right)\right\}\right] du,$$

$$I_2 = \int_{A < |u| \leqslant \varepsilon(L_1 S)^{2/3}} e^{-ivu} \psi_{(r)}(u) du,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon(L_1 S)^{2/3} < |u| \leqslant \pi(L_1 S)^{2/3}} e^{-ivu} \psi_r(u) du,$$

$$I_4 = -\int_{A < |u|} exp\left\{-ivu - |u|^{3/2}\left(1 - i\frac{u}{|u|}\right)\right\} du.$$

Покажем, что выбирая положительные постоянные A и ε, каждый из этих интегралов можно сделать сколь угодно малым при достаточно больших S.

Поскольку

$$|I_4| \leqslant 2 \int\limits_A^{\infty} e^{-u^{3/2}} du,$$

величина $|I_4|$ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A.

Из (12) следует, что при достаточно малом ε для $0 \leqslant |t| \leqslant \varepsilon$ справедливо неравенство $|\psi_r(t)| \leqslant e^{-b_1|t|^{3/2}}$, где $0 < b_1 < 1$. Отсюда получаем, что

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|u|\leqslant\varepsilon(L_1S)^{2/3}} |\psi_r(u)| du$$

$$\leqslant 2 \int\limits_A^{\varepsilon(L_1S)^{2/3}} e^{-b_1u^{3/2}} du.$$

Из сходимости последнего интеграла следует, что величину $|I_2|$ выбором достаточно большого A можно сделать сколь угодно малой.

При фиксированном A, согласно (12), интеграл $I_1 \to 0$. Запрещение случайным величинам $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_S^{(r)}$ принимать значение r не изменяет их максимального шага, а поскольку максимальный шаг равен единице, то при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ справедлива оценка

$$\max |\varphi_r(t)| = q < 1.$$

Тогда

$$|I_3| \leqslant 2\pi q_1^S (L_1S)^{2/3},$$

где величина $q_1 < 1$, следовательно, $I_3 \to 0$.

Итак, разность R_S из (13) при $S \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно v. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что*

$$n/N > L, \quad (n - LN)/N^{2/3} \to \infty.$$

Тогда для $S = N(1 - p_r)(1 + o(1))$

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_S^{(r)} = n\right\} = (\alpha/a_0)\, S(1-p_r)^{-1}$$

$$\times (n - m_rS)^{-5/2} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Обозначим

$$\gamma = \left(\frac{S^{2/3}}{n - m_rS}\right)^{1/3}, \qquad (14)$$

$$\rho = \gamma(n - m_rS), \quad \delta = \gamma^{-1}S^{2/3}.$$

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_i' = \xi_i^{(r)} - m_r$, $i = 1, ..., S$ и их сумму $\zeta_S' = \zeta_S^{(r)} - Sm_r$. Представим искомую вероятность в следующем виде:

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_S' = n - m_rS\right\} = P_1 + SP_2 + P_3, \qquad (15)$$

где

$$P_1 = \mathsf{P}\left\{\zeta_S' = n - m_rS; \xi_i' \leqslant \rho, i = 1, ..., S\right\},$$
$$P_2 = \mathsf{P}\left\{\zeta_S' = n - m_rS;\right.$$
$$\left.\xi_i' \leqslant \rho, i = 1, ..., S-1, \xi_S' > \rho\right\},$$
$$P_3 = \mathsf{P}\left\{\zeta_S' = n - m_rS; \bigcup_{i\neq j}\{\xi_i' > \rho, \xi_j' > \rho\}\right\}.$$

Покажем, оценивая последовательно эти вероятности, что основной вклад в сумму (15) дает второе слагаемое.

Рассмотрим P_1. Положим

$$R(w) = \sum_{k\leqslant\rho+m_r} exp\{(k - m_r)w\}\, \mathsf{P}\{\xi_1' = k - m_r\}. \qquad (16)$$

Из (3) и (5) следует, что при $k \to \infty$

$$p_k = (\alpha/a_0)k^{-5/2}(1 + o(1)). \qquad (17)$$

Используя это соотношение, построим оценки для следующих сумм при достаточно большом l:

$$\sum_{k>l} p_k < c_1 \int_l^{\infty} y^{-5/2} dy = c_2 l^{-3/2}, \qquad (18)$$

$$\sum_{k>l} (k - m_r)p_k < c_3 \int_l^{\infty} y^{-3/2} dy = c_4 l^{-1/2}, \qquad (19)$$

$$\sum_{k\leqslant l} (k - m_r)^2 p_k < c_5 \int_1^{l} y^{-1/2} dy = c_6 l^{1/2}, \quad (20)$$

здесь и далее символы $c_1, c_2, ...$ означают некоторые положительные постоянные.

Из (14) следует, что при выполнении условий леммы

$$\rho^{-3/2} = o(1/S). \qquad (21)$$

Пусть $\omega = \rho^{-1}$. Учитывая, что при $0 < y \leqslant 1$ справедливо равенство $e^y = 1 + y + \delta(y)$, где $\delta(y) \leqslant y^2/2$, из (7), (16), (18) – (21) получаем соотношение

$$R\left(\rho^{-1}\right) = (1 - p_r)^{-1}\left(1 + o\left(S^{-1}\right)\right). \qquad (22)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi'_1(\gamma), ..., \xi'_S(\gamma)$, имеющие распределение вероятностей вида:

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{\xi'_1(\gamma) = k - m_r\} \\ &= \frac{\mathsf{P}\{\xi'_1 = k - m_r\} exp\left\{(k - m_r)\rho^{-1}\right\}}{R\left(\rho^{-1}\right)}, \end{aligned} \tag{23}$$

где $k \leqslant \rho + m_r$.

Положим $\zeta'_S(\gamma) = \xi'_1(\gamma) + ...\xi'_S(\gamma)$. Тогда P_1 имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} P_1 = &\left[R\left(\rho^{-1}\right)\right]^S exp\left\{-\gamma^{-1}\right\} \\ &\times \mathsf{P}\{\zeta'_S(\gamma) = n - m_r S\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Оценим последний множитель данного равенства. Обозначим $\varphi_\gamma(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi'_1(\gamma)$. Получим для нее выражение, используя (16):

$$\varphi_\gamma(t) = \frac{R\left(\rho^{-1} + it\right)}{R\left(\rho^{-1}\right)}. \tag{25}$$

По формуле обращения вероятность $\mathsf{P}\{\zeta_S(\gamma) = n - m_r S\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{\zeta_S(\gamma) = n - m_r S\} \\ &= \frac{1}{2\pi (L_1 S)^{2/3}} \int\limits_{-\pi (L_1 S)^{2/3}}^{\pi (L_1 S)^{2/3}} exp\left\{-\frac{it(n - m_r S)}{(L_1 S)^{2/3}}\right\} \\ &\times \left[\varphi_\gamma\left(\frac{t}{(L_1 S)^{2/3}}\right)\right]^S dt. \end{aligned} \tag{26}$$

Если $k \leqslant \rho + m_r$, то

$$exp\left\{(k - m_r)\rho^{-1}\right\} \leqslant 1 + 2(k - m_r)\rho^{-1},$$

поэтому из (16), (18), (19) и (21) получаем, что

$$\left|R\left(\rho^{-1} + it\right)\right| \leqslant (1 - p_r)|\varphi_{m_r}(t)| + o(S^{-1}), \tag{27}$$

где $\varphi_{m_r}(t)$ – характеристическая функция ξ'_1.

Из определения величины ξ'_1, следует, что $\varphi_{m_r}(t) = exp\{-im_r t\}\varphi_r(t)$, где $\varphi_r(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\xi_1^{(r)}$. Тогда из (9), (22), (25) и (27) получаем такую оценку:

$$\begin{aligned} &\left|\varphi_\gamma\left(\frac{t}{(L_1 S)^{2/3}}\right)\right|^S \\ &= c_8 \left|\varphi\left(\frac{t}{(L_1 S)^{2/3}}\right)\right|^S (1 + o(1)). \end{aligned} \tag{28}$$

Разобъем интеграл из равенства (26) на сумму двух интегралов по следующим областям: $|t| \leqslant \varepsilon (L_1 S)^{2/3}$ и $\varepsilon (L_1 S)^{2/3} < |t| \leqslant \pi (L_1 S)^{2/3}$, где ε достаточно мало. По свойству характеристических функций решетчатых распределений с максимальным шагом, равном единице, при $\varepsilon < |t| \leqslant \pi$ выполняется неравенство следующего вида:

$$|\varphi(t)| \leqslant exp\{-c_9\}, \tag{29}$$

а из (9) при достаточно малом ε для $|t| \leqslant \varepsilon$ справедливо:

$$|\varphi(t)| \leqslant exp\{-c_{10}|t|^{-3/2}\}. \tag{30}$$

Тогда из (26)–(30) следует, что при достаточно больших S и n :

$$\mathsf{P}\{\zeta'_S(\gamma) = n - m_r S\} \leqslant c_{11} S^{-2/3}.$$

Отсюда, из (14), (22) и (24):

$$\begin{aligned} P_1 &\leqslant c_{12} S^{-2/3} exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\right\} \\ &= o\left(S(n - m_r S)^{-5/2}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Оценим теперь вероятность P_2. Очевидно, что

$$P_2 = \sum_M \mathsf{P}\{\xi'_S = n - m_r - k\} \tag{32}$$

$$\times \mathsf{P}\{\zeta'_{S-1} = k - m_r(S-1), \xi'_i \leqslant \rho, i = 1, ..., S-1\},$$

где множество

$$M = S - 1 \leqslant k < (n - m_r) - \rho.$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi'_i(u), \quad i = 1, ...S$, такие, что

$$\mathsf{P}\{\xi'_1(u) = k - m_r\} = \mathsf{P}\{\xi'_1 = k - m_r | \xi'_1 \leqslant u\}. \tag{33}$$

Пусть, кроме того, $\zeta'_S(u) = \xi'_1(u) + ... + \xi'_S(u)$. Ниже будем рассматривать случаи, когда $u = \rho$ и $u = \delta$.

Используя (18), (21), (32) и (33), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} P_2 = (1 + o(1)) &\sum_M \mathsf{P}\{\xi'_S = n - m_r - k\} \\ &\times \mathsf{P}\{\zeta'_{S-1}(\rho) = k - m_r(S-1)\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Обозначим через $\varphi_\rho(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi'(\rho)$. Используя (3), (5), (7)–(9), (14), (21) и (33), находим, что при любом фиксированном t

$$\varphi_\rho^S\left(\frac{t}{(L_1 S)^{2/3}}\right) = f(t)(1 + o(1)), \tag{35}$$

где $f(t)$ – характеристическая функция устойчивого закона с показателем $3/2$, заданная в (10). Отсюда

$$\mathsf{P}\{\zeta'_S(\rho) \leqslant y(L_1 S)^{2/3}\} \to \int_{-\infty}^{y} g(x)dx. \quad (36)$$

Далее покажем, что при достаточно больших S, n

$$\mathsf{P}\{\zeta'_{S-1}(\rho) > \delta\} \leqslant c_{13}\gamma^{3/2}(1-p_r)^{-1}. \quad (37)$$

Учитывая (33) и то, что $\rho > \delta$, для искомой вероятности находим следующее неравенство:

$$\mathsf{P}\{\zeta'_{S-1}(\rho) > \delta\} \leqslant (S-1)\,\mathsf{P}\{\xi'_1(\rho) > \delta\} + \left(\frac{1-P\{\xi'_1 > \delta\}}{1-P\{\xi'_1 > \rho\}}\right)^{S-1} \mathsf{P}\left\{\zeta'_{S-1}(\delta) > \delta\right\}. \quad (38)$$

Из (18) и (33) нетрудно получить соотношения:

$$(S-1)\,\mathsf{P}\{\xi'_1(\rho) > \delta\} \leqslant c_{14}\gamma^{3/2}(1-p_r)^{-1}, \quad (39)$$

$$\mathsf{P}\left\{\zeta'_{S-1}(\delta) > \delta\right\} \leqslant c_{15}\gamma^{3/2}(1-p_r)^{-1}. \quad (40)$$

Также из (18) и (21) следует равенство:

$$\left(\frac{1-P\{\xi'_1 > \delta\}}{1-P\{\xi'_1 > \rho\}}\right)^{S-1} = 1 + o(1).$$

Поэтому из (38)–(40) получим оценку (37).

Учитывая (34), представим вероятность P_2 в виде суммы

$$P_2 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4, \quad (41)$$

где

$$R_i = (1+o(1))\sum_{K_i} \mathsf{P}\{\xi'_S = n - m_r - k\} \times \mathsf{P}\{\zeta'_{S-1}(\rho) = k - m_r(S-1)\},$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{k : S-1 \leqslant k \leqslant -\delta + m_r(S-1)\}, \\ K_2 &= \{k : -\delta + m_r(S-1) < k \leqslant \delta + m_r(S-1)\}, \\ K_3 &= \{k : \delta + m_r(S-1) < k \leqslant (n-m_r) - \gamma^{-1/2}\rho\}, \\ K_4 &= \left\{k : (n-m_r) - \gamma^{-1/2}\rho < k \leqslant (n-m_r) - \rho\right\}, \end{aligned}$$

при этом, как нетрудно видеть, область K_1 может быть пустой. Заметим, что

$$\mathsf{P}\{\xi'_S = n - m_r - k\} = (1-p_r)^{-1} \times \mathsf{P}\{\xi_S = (n - m_r S) + m_r S - k, \xi_S \neq r\}.$$

Из (17) при $k \in K_2$ нетрудно получить, что

$$\mathsf{P}\{\xi'_S = n - m_r - k\} = (\alpha/a_0)(1-p_r)^{-1}(n - m_r S)^{-5/2}(1+o(1)).$$

Отсюда с помощью (14) и (36) получаем:

$$R_2 = (\alpha/a_0)(1-p_r)^{-1}(n - m_r S)^{-5/2}(1+o(1)). \quad (42)$$

Из (14) и (17) ясно, что при $k \in K_1$

$$\mathsf{P}\{\xi'_S = n - m_r - k\} \leqslant c_{15}(n + \delta - m_r S)^{-5/2}.$$

Отсюда, с учетом соотношения $\gamma \to 0$, из (36) видим, что

$$R_1 = o((n - m_r S)^{-5/2}). \quad (43)$$

Используя (14), (17) и (37), нетрудно получить выражения:

$$R_3, R_4 = o((n - m_r S)^{-5/2}). \quad (44)$$

Из представления (41) и оценок (42)–(44), делаем вывод, что

$$P_2 = (\alpha/a_0)(1-p_r)^{-1}(n - m_r S)^{-5/2}(1+o(1)). \quad (45)$$

Оценим вероятность P_3. Заметим, что

$$P_3 = \frac{S(S-1)}{2} \cdot \sum_{k<(n-2m_r)-2\rho} \mathsf{P}\{\zeta'_{S-2} = k - m_r(S-2)\} \times \mathsf{P}\{\xi'_{S-1} + \xi'_S = n - 2m_r - k, \xi'_{S-1} > \rho, \xi'_S > \rho\}.$$

Отсюда следует, что

$$P_3 \leqslant c_{16}S^2 \cdot \sum_{k<(n-2m_r)-2\rho} \mathsf{P}\{\zeta'_{S-2} = k - m_r(S-2)\} \times \sum_G \mathsf{P}\{\xi'_{S-1} = i\}\,\mathsf{P}\{\xi'_S = n-k-i\}, \quad (46)$$

где $G = \{i : \rho < i < n - k - \rho\}$. Из (17) следует, что при $i > \rho$

$$\mathsf{P}\{\xi'_{S-1} = i\} = \mathsf{P}\{\xi^{(r)}_{S-1} = i + m_r\} \leqslant c_{16}\rho^{-5/2}.$$

Используя (17) и (18), получаем, что

$$\sum_G \mathsf{P}\{\xi'_{S-1} = i\}\,\mathsf{P}\{\xi'_S = n-k-i\}$$

$$\leqslant c_{17}\rho^{-5/2}(1-p_r)^{-1}\,\mathsf{P}\{\xi'_S > \rho\} < c_{18}(1-p_r)^{-1}\rho^{-4},$$

и в силу (46),

$$P_3 \leqslant c_{18}(1-p_r)^{-1}S^2\rho^{-4},$$

а отсюда:

$$P_3 = o(S(n - m_r S)^{-5/2}). \quad (47)$$

Утверждение леммы следует из соотношений (15), (31), (45) и (47). □

Доказательство теоремы

В работе [2] было показано, что для суммы ζ_N при условиях, что $n/N > L$ и $(n-LN)/(L_1N)^{2/3} \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = (\alpha/a_0)N(n-LN)^{-5/2}(1+o(1)) \tag{48}$$

равномерно относительно n, а для натуральных h равномерно относительно $v = (h-LN)/(L_1N)^{2/3}$ в любом конечном фиксированном интервале

$$(L_1N)^{2/3}\,\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_N - LN}{(L_1N)^{2/3}} = v\right\} = g(v)\,(1+o(1))\,. \tag{49}$$

При выполнении условия 2 теоремы $p_r \to 0$, поэтому, как известно, для целых положительных k

$$\binom{N}{k}p_r^k(1-p_r)^{N-k} = \frac{(Np_r)^k}{k!}e^{-Np_r}(1+o(1)) \tag{50}$$

равномерно относительно $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом конечном интервале. Рассмотрим случай, когда $(n-LN)/(L_1N)^{2/3} \to \tau$, где τ – некоторая постоянная. Для оценки вероятности $\mathsf{P}\left\{\zeta^{(r)}_{N-k} = n-kr\right\}$ используем лемму 2, полагая $S = N-k$ и $h = n-kr$. Заметим, что

$$k = Np_r + u_r\sqrt{Np_r}, \quad N-k = N(1-p_r)(1+o(1)), \tag{51}$$

где $u_r \leqslant C < \infty$. Тогда, используя (8) и соотношение (49), получаем, что

$$\frac{\mathsf{P}\{\zeta^{(r)}_{N-k} = n-kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}} \to 1. \tag{52}$$

В случае, когда $n/N > L$, $(n-LN)/(L_1N)^{2/3} \to \infty$, также выполняется (52) в силу леммы 3, замечания (51) и соотношения (48).

При выполнении условия 1 теоремы, мы используем нормальное приближение для биномиального распределения, справедливое при $Np_r(1-p_r) \to \infty$. Тогда

$$\binom{N}{k}p_r^k(1-p_r)^{N-k} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\} \tag{53}$$

равномерно относительно

$$(k-Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$$

в любом фиксированном конечном интервале. Нетрудно видеть, что и в этом случае, как и выше, из лемм 2 и 3 вытекает (52).

Утверждения теоремы следуют теперь из лемм 1, соотношений (50), (52) и (53).

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития на 2012–2016 гг. «Университетский комплекс ПетрГУ в научно-образовательном пространстве Европейского Севера: стратегия инновационного развития».

Литература

1. *Берникович Е. С.* О числе деревьев заданного объема в случайном непомеченном некорневом лесе // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2011. Вып. 2, № 5. С. 4–9. С. 148–157.

2. *Берникович Е. С., Павлов Ю. Л.* О максимальном объеме дерева случайного непомеченного некорневого леса // Дискретная математика. 2011. Т. 23, № 1. С. 3–20.

3. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 424 с.

4. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

5. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 326 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Петрова Елена Сергеевна
аспирант
лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: bern@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Petrova, Elena
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: bern@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218