Труды Карельского научного центра РАН
№ 1. 2013. С. 112–116

УДК 519.2

О СЛУЧАЙНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ЗАПОЛНЕНИЯХ ЯЧЕЕК

Е. В. Хворостянская

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
Петрозаводский государственный университет

Рассматривается модель заполнения N различных ячеек частицами, в которой случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$, равные числу частиц в ячейках, независимы и имеют распределение Пуассона. Для подмножества реализаций такой схемы, удовлетворяющих условию $\eta_1 + \ldots + \eta_N \leqslant n$, при $N \to \infty$ получены предельные распределения числа ячеек μ_r, содержащих ровно r частиц.

Ключевые слова: размещение частиц по ячейкам, предельное распределение, число ячеек заданного объема.

E. V. Khvorostyanskaya. ON RANDOM POISSON ALLOCATION TO CELLS

We study a model for particle allocation to N different cells in which the random variables $\eta_1, \ldots, \eta_N$ equal to the number of particles in cells are independent and have a Poisson distribution. For a subset of realizations of such a scheme satisfying $\eta_1 + \ldots + \eta_N \leqslant n$ limit distributions of cell number μ_r with exactly r particles are obtained as $N \to \infty$.

Key words: particle allocation to cells, limit distribution, number of cells with a given size.

Пусть n различных частиц независимо одна от другой размещаются по N ячейкам, занумерованным числами от 1 до N, так, что каждая частица с вероятностью N^{-1} попадает в одну из ячеек. Такая схема размещения частиц по ячейкам носит название классической схемы размещения, и ее изучению посвящено множество работ (см., например, [2, 3]). Хорошо известно, что совместное распределение заполнений ячеек в классической схеме совпадает с условным распределением N независимых пуассоновских случайных величин при условии, что их сумма равна n. Используя это свойство, при $N \to \infty$ и всех возможных значениях n, r были, в частности, получены предельные распределения числа ячеек, содержащих ровно r частиц.

В настоящей статье рассматривается следующая модель. Пусть случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$, равные числу частиц в ячейках с номерами $1, \ldots, N$ соответственно, независимы и имеют распределение Пуассона:

$$p_k = \mathsf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$i = 1, \ldots, N$. Очевидно, что число всех возможных реализаций такой схемы бесконечно. Далее будем рассматривать подмножество реализаций, удовлетворяющих условию $\eta_1 + \ldots + \eta_N \leqslant n$. Ясно, что в этом случае случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ не являются независимыми. Пусть вероятностная мера на этом подмножестве индуцируется совместным распределением $\eta_1, \ldots, \eta_N$. Тогда для целых неотрицательных чисел $k_1, \ldots, k_N$ таких, что $k_1 + \ldots + k_N \leqslant n$, справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \frac{\lambda^{k_1+\ldots+k_N} e^{-\lambda N}}{k_1! \ldots k_N!} \times \left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_N \geqslant 0 \\ i_1 + \ldots + i_N = i}} \frac{\lambda^i e^{-\lambda N}}{i_1! \ldots i_N!} \right)^{-1}.$$

Введем независимые одинаково распределенные по закону Пуассона с параметром λ случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Легко видеть, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \; \xi_1 + \ldots + \xi_N \leqslant n\} = \frac{\lambda^{k_1+\ldots+k_N} e^{-\lambda N}}{k_1! \ldots k_N!} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda N)^i e^{-\lambda N}}{i!} \right)^{-1}.$$

Отсюда и из полиномиальной формулы следует, что выполнено соотношение

$$\mathsf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \; \xi_1 + \ldots + \xi_N \leqslant n\}.$$

Эта модель является частным случаем схемы, рассмотренной в [4] и основанной на идеях обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [2]. Заметим, что в [4] нет конкретных примеров, удовлетворяющих условиям этой схемы.

Обозначим через μ_r случайную величину, равную числу ячеек, содержащих ровно r частиц, и пусть

$$y = \frac{n - \lambda N}{\sqrt{\lambda N}}, \quad f_r(\lambda) = \frac{(\lambda - r)^2 p_r}{\lambda}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $N \to \infty$, $y^2\sqrt{p_r/N} + y^2 f_r(\lambda) \to 0$ при $y \to -\infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

1) $r \geqslant 0$, $\lambda \to \infty$;

2) $r \to \infty$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$;

3) $r \geqslant 2$, $\lambda \to 0$;

4) $r = 1$, $y \to \infty$, $\lambda \to 0$ так, что $\lambda^2 N \to \infty$.

Тогда

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1))$$

равномерно относительно целых неотрицательных k, для которых $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ лежит в любом конечном фиксированном интервале.

Теорема 2. *Пусть $N \to \infty$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$, $r \geqslant 0$ фиксировано и выполнено одно из следующих условий:*

1) $y \to +\infty$;

2) $|y| \leqslant C < \infty$, $r - \lambda \to 0$;

3) $y \to -\infty$, $r - \lambda \to 0$ так, что $y(r - \lambda) \to 0$, $y^2/\sqrt{N} \to 0$.

Тогда

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r (1 - p_r)}} e^{-u^2/2}$$

равномерно относительно $u = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ в любом конечном фиксированном интервале. Утверждение теоремы остается справедливым, если выполнены условия теоремы 1 и $Np_r \to \infty$, а также в случае, когда $r = 0$, $y \to \infty$, $N \to \infty$, $\lambda \to 0$ так, что $\lambda^4 N \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть $r = 1$, $n \geqslant 1$ фиксировано, $\lambda \to 0$, $N \to \infty$ так, что $N\lambda \leqslant C < \infty$. Тогда для целых неотрицательных k*

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(N\lambda)^k e^{-N\lambda}}{k!} \times \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(N\lambda)^i e^{-N\lambda}}{i!} \right)^{-1} (1 + o(1))$$

при $0 \leqslant k \leqslant n$ и $\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = 0$ при $k > n$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что для нашей модели теорема 1 имеет значительно более общий характер, чем теорема 9 работы [4], поскольку в ней условия 1), 2), 4) не рассматривались, а условие 3) требует дополнительных ограничений. Теорема 2 о сходимости к нормальному закону также охватывает существенно более широкую зону изменения параметров по сравнению с теоремами 4 и 5 [4].

Согласно теореме 3 [4], для $k = 0, 1, \ldots, N$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} \leqslant n - kr\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N \leqslant n\}}, \tag{1}$$

где

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N,\ \zeta_{N-k}^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_{N-k}^{(r)},$$

независимые случайные величины $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ имеют распределения

$$\mathsf{P}\left\{\xi_i^{(r)} = k\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi_1 = k|\ \xi_1 \neq r\right\},$$

$i = 1, \ldots, N$. Для доказательства теорем 1, 2 с помощью (1) нам потребуются вспомогательные утверждения, которые приводятся ниже в леммах 1, 2.

Лемма 1. *Пусть $N \to \infty$ и $\lambda N \to \infty$. Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_N - \lambda N}{\sqrt{\lambda N}} \leqslant x\right\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz.$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t)$, $\psi(t)$ характеристические функции случайных величин ξ_1, $(\zeta_N - \lambda N)/\sqrt{\lambda N}$. Легко видеть, что

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

$$\psi(t) = \exp\left\{-it\sqrt{\lambda N}\right\} \varphi^N\left(t/\sqrt{\lambda N}\right).$$

Используя формулу Тейлора, при любом фиксированном t получаем, что

$$\ln\psi(t) = -it\sqrt{\lambda N} + \lambda N\left(e^{it/\sqrt{\lambda N}} - 1\right)$$
$$= -t^2/2 + o(1).$$

Отсюда и из теоремы непрерывности следует утверждение леммы. □

Лемма 2. *Пусть $s \to \infty$, $\lambda s \to \infty$ и при $\lambda \to 0$, $r = 1$ выполнено условие $\lambda^2 s \to \infty$. Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_s^{(r)} - m_r s}{\sigma_r\sqrt{s}} \leqslant x\right\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz,$$

где

$$m_r = \mathsf{E}\,\xi_1^{(r)} = \frac{\lambda - rp_r}{1 - p_r},$$
$$(2)$$
$$\sigma_r^2 = \mathsf{D}\,\xi_1^{(r)} = \frac{\lambda\left(1 - p_r - f_r(\lambda)\right)}{(1 - p_r)^2}.$$

Доказательство. При $\lambda \to 0$, $\lambda \to \infty$, $r \geqslant 2$ и $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$ слабая сходимость распределения $\left(\zeta_s^{(r)} - m_r s\right)/(\sigma_r\sqrt{s})$ к стандартному нормальному закону получена в [1], [3]. Учитывая явный вид характеристической функции случайной величины $\left(\zeta_s^{(r)} - m_r s\right)/\sigma_r\sqrt{s}$, можно показать, что утверждение леммы остается в силе и в оставшихся случаях. □

Докажем теорему 1. Поскольку $p_r \to 0$, выполнено соотношение

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r}(1 + o(1)) \tag{3}$$

равномерно относительно k, для которых $u = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ лежит в любом конечном фиксированном интервале.

Пусть выполнено одно из условий теоремы и, кроме того, $\lambda N \to \infty$. С помощью лемм 1, 2 получаем, что

$$\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} \leqslant n - kr\right\}}{\mathsf{P}\left\{\zeta_N \leqslant n\right\}} \tag{4}$$
$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{x_r} e^{-z^2/2} dz}{\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2} dz}(1 + o(1)),$$

где

$$x_r = \frac{n - kr - m_r(N - k)}{\sigma_r\sqrt{N - k}},$$

m_r, σ_r определены в (2). Для выбранных значений k несложно показать, что

$$x_r = \frac{n - \lambda N + u(\lambda - r)\sqrt{Np_r}/(1 - p_r)}{\sqrt{\lambda N}\left(1 - \frac{f_r(\lambda)}{1 - p_r}\right)^{1/2}\left(1 - u\frac{\sqrt{p_r/N}}{1 - p_r}\right)^{1/2}}.$$

При условиях 1)-3) теоремы $f_r(\lambda) \to 0$ и

$$x_r = y\left(1 + \frac{f_r(\lambda) + u\sqrt{p_r/N}}{2(1 - p_r)} + o\left(f_r(\lambda)\right)\right. \tag{5}$$
$$\left.+ o\left(\sqrt{\frac{p_r}{N}}\right)\right) + \frac{u\sqrt{f_r(\lambda)}\operatorname{sgn}(\lambda - r)}{1 - p_r}(1 + o(1)).$$

Если выполнено условие 4) теоремы, то $f_1(\lambda) \to 1$ и

$$x_1 = y\left(1 - \frac{f_1(\lambda)}{1 - p_1}\right)^{-1/2}\left(1 - u\frac{\sqrt{p_1/N}}{1 - p_1}\right)^{-1/2} \tag{6}$$
$$-u\sqrt{f_1(\lambda)}(1 + o(1)) = \frac{y}{\sqrt{2\lambda}}(1 + o(1)).$$

Поскольку (4) справедливо при любых сколь угодно больших значениях x_r и y, учитывая (5), (6), находим, что если $y \to \infty$, то $x_r \to \infty$ и

$$\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} \leqslant n-kr\right\}}{\mathsf{P}\left\{\zeta_N \leqslant n\right\}} = 1+o(1). \qquad (7)$$

Если $|y| \leqslant C < \infty$, то из (4) получаем, что

$$\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k}^{(r)} \leqslant n-kr\right\}}{\mathsf{P}\left\{\zeta_N \leqslant n\right\}} = \left(1+\frac{\int\limits_{-x_r}^{-y} e^{-z^2/2}dz}{\int\limits_{-y}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz}\right)(1+o(1)),$$

и, поскольку из (5) следует соотношение $x_r - y \to 0$, легко видеть, что выполнено (7).

Нетрудно проверить, что при любом $a > 0$

$$\int\limits_a^\infty e^{-z^2/2}dz \leqslant \frac{1}{a}\int\limits_a^\infty z e^{-z^2/2}dz = \frac{e^{-a^2/2}}{a},$$

$$\int\limits_a^\infty e^{-z^2/2}dz \geqslant a^2\int\limits_a^\infty \frac{e^{-z^2/2}}{z^2}dz = \frac{a}{1+a^2}e^{-a^2/2}.$$

Используя эти неравенства и (5), получаем оценки

$$\frac{\int\limits_{|x_r|}^{\infty} e^{-z^2/2}dz}{\int\limits_{|y|}^{\infty} e^{-z^2/2}dz} \leqslant \frac{1+y^2}{yx_r}e^{-(x_r^2-y^2)/2},$$

$$\frac{\int\limits_{|x_r|}^{\infty} e^{-z^2/2}dz}{\int\limits_{|y|}^{\infty} e^{-z^2/2}dz} \geqslant \frac{yx_r}{1+x_r^2}e^{-(x_r^2-y^2)/2},$$

где

$$\frac{1+y^2}{yx_r} = \left(1+1/y^2\right)(1+o(1)),$$

$$\frac{yx_r}{1+x_r^2} = \frac{1}{1+1/y^2}(1+o(1)),$$

$$x_r^2 - y^2 = y^2\left(f_r(\lambda) + u\sqrt{p_r/N}\right)(1+o(1)).$$

Отсюда и из (4) следует, что при $y \to -\infty$ и $y^2 f_r(\lambda) + y^2\sqrt{p_r/N} \to 0$ справедливо (7).

Пусть теперь $\lambda N \to \alpha$, где α – некоторая неотрицательная постоянная. Очевидно, что распределение суммы ζ_N сходится к закону Пуассона с параметром α. Для характеристической функции $\psi_r(t)$ случайной величины $\zeta_{N-k}^{(r)}$ выполнено соотношение

$$\ln\psi_r(t) = (N-k)\ln\frac{e^{\lambda(e^{it}-1)} - e^{itr}p_r}{1-p_r} = N\lambda\left(e^{it}-1\right)(1+o(1)),$$

и по теореме непрерывности распределение $\zeta_{N-k}^{(r)}$ сходится к закону Пуассона с параметром α. Поскольку $Np_r \to 0$, получаем, что $k = 0$ и справедливо равенство (7).

Утверждение теоремы 1 следует из (1), (3), (7).

Для доказательства теоремы 2 положим $k = Np_r + u\sqrt{Np_r\,(1-p_r)}$. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$, $r \geqslant 0$ фиксировано. С помощью лемм 1, 2 находим, что выполнено равенство (4), где

$$x_r = \left(y\,(1-p_r) + u\sqrt{f_r(\lambda)\,(1-p_r)}\,\mathrm{sgn}(\lambda - r)\right) \times \frac{(1-p_r-f_r(\lambda))^{-1/2}}{\sqrt{1-p_r-u\sqrt{p_r\,(1-p_r)\,/N}}}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что справедливо соотношение (7).

При $\lambda \to 0$, $r = 0$ находим, что $\lambda^3(N-k) = \lambda^4 N(1+o(1)) \to \infty$, и из лемм 1, 2 следует (4), где $x_0 = \sqrt{2}y/\lambda(1+o(1))$. Очевидно, что если $y \to \infty$, то $x_0 \to \infty$ и выполнено (7).

При $Np_r\,(1-p_r) \to \infty$ имеет место равенство

$$\binom{N}{k}p_r^k\,(1-p_r)^{N-k} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r\,(1-p_r)}}e^{-u^2/2}.$$

Отсюда и из (1), (7) получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 8 [4].

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

Литература

1. *Колчин А. В.* Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 4. С. 148–157.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

3. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 159 с.

4. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 140–158.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Хворостянская Елена Владимировна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Khvorostyanskaya, Elena
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218