| А. В. Колчин, Н. Ю. Энатская. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК 8 А. В. Ласунский. О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ. 8 А. Ю. Лукьянов, А. А. Когут, Б. З. Белашев. ПРОГРАММПО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС МОНИТОРИНГА РАДОНА. 9 С. Е. Михеев, О СГЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ. 100 С. Е. Михеев, П. Л. Морозов. ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗВУКОВЫХ ФАЙЛОВ. 100 Ю. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ. 110 И. А. Чеплокова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГ УРАЦИОННОГО ГРАФА. 12 И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ. 13 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ. 13 И. Ю. ЭНЯТСКЯЯ. Е. Р. ХАКИМУЛЛИВ, А. В. КОЛЧИВ. ЯЧЕЙКАМ. 14 V. Коглікоч. А. Реређуѕъсч. А. Zлідіјаvsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS. 15 Хроника А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН — 15 лет. 16 16 Е. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СПЕЗ-2013) (Петрозаводск, 23-25 июня 2013 г.) 16 Е. Ивашко. Первяя российскяя конференция «Высокопроизиодительные | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| А. В. Ласунский. О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ. 8 А. Ю. Лукъянов, А. А. Когут, Б. З. Белашев. ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМІЛІЄКС МОПИТОРИША РАДОПА. 9 С. Е. Михеев. О СТІЛЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ. 100 С. Е. Михеев. О СТІЛЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ. 100 О. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ. 100 И. А. Чеплокова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДПОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА. 121 И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ. 130 И. А. Чернов. А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ. 131 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ. 132 И. Корпікох. А. Реређућех. А. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS. 155 Хроника А. Д. Сорокии. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН — 15 лет. 166 Е. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СПЕЗ-2013) (Петрозаводск, 25 автуста — 5 сентября 2013 г.) 166 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23—25 июня 2013 г.) 166 Е. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІNС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС:РАSТ) (Петрозаводск, 29—13 сентября 2013 г.) 167 Е. Е. Ивашко. Парвая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІNС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС:РАSТ) (Петрозаводск, 9—13 сентября 2013 г.) 167 Б. Е. Ивашко. Парвая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІNС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС:РАSТ) (Петрозаводск, 9—13 сентября 2013 г.) 167 Б. Е. Ивашко. Пацина Владимировна Воинова (к 75-летию со дия рождения) 177 В. Тавовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дия р | | 75 | |
| ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ. А. Ю. Лукьянов, А. А. Когут, Б. З. Белашев. ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС МОПИТОРИНГА РАДОПА С. Е. Михсев, О. СТЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ. С. Е. Михсев, О. СТЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ. О. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ И. А. Чевлюкова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИТУРАЦИОННОГО ГРАФА 12. И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ И. А. Чернов. А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАННОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 13. И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАННОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 14. И. О. Эпатская, Е. Р. Хакимуллии, А. В. Колчип. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ 14. V. Когпікоv, А. Реређувьеv, А. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH ТЕМРЕКАТИТЕ RECORDS 15. Хроника А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований Каріщі РАП — 15 лет. 16. Е. К. Костикова, А. И. Реттисва. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технопогии для наук об окружающей среде» (СПЕЅ-2013) (Петрозаводск, 25 августа — 5 сентября 2013 г.) 16. В. В. Маталов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сстевые игры и менедкмент» (Петрозаводск, 25 августа — 5 сентября 2013 г.) 16. Е. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе вОПКС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОПКС:FAST) (Петрозаводск, 9–13 сентября 2013 г.) 16. Е. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе вОПКС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОПКС:FAST) (Петрозаводск, 9–13 сентября 2013 г.) 16. Е. Е. Ивашко. Пациональный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26–29 новбря 2013 г.) 17. Обилен и даты О. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 17. Обилен и даты О. Л. Вавнын, | А. В. Колчин, Н. Ю. Энатская. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК | 80 | |
| МОНИТОРИНГА РАДОНА С. Е. Михеев, П. Д. Морозов. ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗВУКОВЫХ ФАЙЛОВ Ю. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ 110 И. А. Челлокова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА 121 И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 133 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 144 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 155 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 166 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИПАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 167 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СИСТЕМЕ 168 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СИСТЕМЕНОЙ ТАВИНОМА СШТАБНОЙ ТАВИНОМА СИТАВНОЙ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СКЕТАНИИ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА СИТАВНОМ ТАВИНОМА ТАВИНОМ | | 87 | |
| С. Е. Михеев, П. Д. Морозов. ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИ/ЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗВУКОВЫХ ФАЙЛОВ 100 О. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ 110 ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ 110 ПРОВЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА 12. И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ 130 ПРОВИВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 131 ПРОВИНЬНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 132 ПРОВИНЬНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 143 ПРОВИВЬНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 150 ПРОВИВЬЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ 144 ПРОВИВЬЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕМРЕКАТИКЕ RECORDS 155 Кроника А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН — 15 лет 160 БЕ. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей средею (СІТЕS-2013) (Петрозаводск, 25 августа — 5 сентября 2013 г.) 160 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23—25 июня 2013 г.) 160 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджментальные исследования и разработки» (ВОІNС: БАSТ) (Петрозаводск, 9—13 сентября 2013 г.) 160 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые воЛNС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС: FAST) (Петрозаводск, 9—13 сентября 2013 г.) 160 В. В. В. Мазалов, Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 170 В. Т. Вровицын, А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воннова (к 75-летию со дня рождения) 170 В. Т. Вровицын, А. Д. Сорокин, Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 170 В. Т. Вровицын, А. Д. Сорокин, Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 170 В. Т. Варовицын, А. Д. Сорокин, Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 170 В. Т. | | 93 | |
| ДЛЯ ПЕРЕДИСЌРЕТИЗАЦИИ ЗВУКОВЫХ ФАЙЛОВ 100 С. С. Токарева. МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ 110 И. А. Челлюкова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА 12. И. А. Черлов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ 13. И. А. Черлов. А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 13. Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин, А. В. Колчин. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ 14. V. Kornikov, A. Pepelyshev, A. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH ТЕМРЕКАТИКЕ RECORDS 15. Xponinka A. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН – 15 лет 16. E. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СПТЕЅ-2013) (Петрозаводск, 25 автуста – 5 сентября 2013 г.) 16. B. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23–25 июня 2013 г.) 16. E. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІNС: фундаментальные и сследования и разработки» (ВОІNС: FAST) (Петрозаводск, 9–13 сентября 2013 г.) 16. E. Е. Ивашко. Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26–29 иолбря 2013 г.) 17. Юбилен и дяты Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 17. А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировиа Воинова (к 75-летию со дня рождения) 17. В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 17. В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 17. В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 17. В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимирови Воинова (к 75-летию со дня рождения) 17. | С. Е. Михеев. О СГЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ | 100 | |
| ПОВ ПРОЕКТОВ 116 И. А. Чеплюкова. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕР- ШИНЫ КОНФИТУРАЦИОННОГО ГРАФА 12 И. А. Чернов. ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИ- СТЕМЕ 136 И. А. Чернов, А. В. Толстиков. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 137 И. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин, А. В. Колчин. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕРАЗ- ЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ 143 V. Когпікоч, А. Реређућеч, А. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS 153 Хроника 1.5 А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН − 15 лет 166 Е. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СПТЕЅ-2013) (Петрозаводск, 25 августа − 5 сентября 2013 г.) 166 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23−25 июня 2013 г.) 166 Е. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОПОС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС:FAST) (Петрозаводск, 9−13 сентября 2013 г.) 166 Е. Е. Ивашко. Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26−29 ноя- бря 2013 г.) 177 Юбилен и даты НО. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) | | 106 | |
| | | 116 | |
| СТЕМЕ 13 И. А. Чериов, А. В. Толстиков, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ 13 Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин, А. В. Колчин. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ 14 V. Kornikov, А. Pepelyshev, А. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS 15 Хроника А. Д. Сорокии. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН – 15 лет 16 E. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СІТЕS-2013) (Петрозаводск, 25 августа – 5 сентября 2013 г.) 16 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23–25 июня 2013 г.) 16 В. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІNС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС:FAST) (Петрозаводск, 9–13 сентября 2013 г.) 16 Е. Ивашко. Нециональный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26–29 ноября 2013 г.) 16 В. Вавико. Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26–29 ноября 2013 г.) 17 Юбилен и даты Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 17 <td colsp<="" td=""><td></td><td>121</td></td> | <td></td> <td>121</td> | | 121 |
| ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ | | 130 | |
| ЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ 143 V. Kornikov, A. Pepelyshev, A. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS 153 Хроника А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН − 15 лет 163 E. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СІТЕЅ-2013) (Петрозаводск, 25 августа − 5 сентября 2013 г.) 166 В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко. Международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23−25 июня 2013 г.) 163 Е. Е. Ивашко. Первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІЮС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІЮС:FAST) (Петрозаводск, 9−13 сентября 2013 г.) 169 Е. Е. Ивашко. Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26−29 ноября 2013 г.) 169 В. Е. Ивашко. Национальный суперкомпьютерный форум (Переславль-Залесский, 26−29 ноября 2013 г.) 179 НОбилеи и даты Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 179 А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воинова (к 75-летию со дня рождения) В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) В Вайка | | 137 | |
| ТЕМРЕКАТURE RECORDS Хроника А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН – 15 лет | | 143 | |
| А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН — 15 лет | | 155 | |
| Е. К. Костикова, А. Н. Реттиева. Международная конференция и школа молодых ученых «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СІТЕЅ-2013) (Петрозаводск, 25 августа – 5 сентября 2013 г.) | Хроника | | |
| «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» (СІТЕЅ-2013) (Петрозаводск, 25 августа – 5 сентября 2013 г.) | А. Д. Сорокин. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН – 15 лет | 162 | |
| игры и менеджмент» (Петрозаводск, 23–25 июня 2013 г.) | «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде» | 166 | |
| ВОІNС: фундаментальные исследования и разработки» (ВОІNС:FAST) (Петрозаводск, 9–13 сентября 2013 г.) | | 168 | |
| бря 2013 г.) 173 Юбилеи и даты Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 173 А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воинова (к 75-летию со дня рождения) 176 В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 178 Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения) 187 | BOINC: фундаментальные исследования и разработки» (BOINC:FAST) (Петрозаводск, | 169 | |
| Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) 173 А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воинова (к 75-летию со дня рождения) 176 В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 178 Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения) 181 | | 171 | |
| А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воинова (к 75-летию со дня рождения) 176 В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 178 Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения) 187 | Юбилеи и даты | | |
| В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) 178 Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения) | Ю. Л. Павлов. Валентин Федорович Колчин (к 80-летию со дня рождения) | 173 | |
| Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения) | А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова. Галина Владимировна Воинова (к 75-летию со дня рождения) | 176 | |
| | В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин. Владимир Викторович Мазалов (к 60-летию со дня рождения) | 178 | |
| Правила для авторов | Ю. В. Заика. Александр Николаевич Кириллов (к 60-летию со дня рождения) | 181 | |
| | Правила для авторов | 183 | |

Подписной индекс в каталоге «Роспечать» 57397

ISSN 1997-3217 (печатная версия) ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Труды



и информационные

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 4, 2014

transactions.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СОДЕРЖАНИЕ Ю. Г. Абакумов, М. А. Верхотурова, В. Г. Банин. ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ КОНСТАН-ТАХ В ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА LIP1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕ-Б. З. Белашев, А. В. Кабедев. АЛГОРИТМЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА В. К. Болондинский, С. Н. Шереметьев. ПРИМЕНЕНИЕ КОСИНОР-АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕ-ДОВАНИИ СУТОЧНОЙ ДИНАМИКИ СО, - ГАЗООБМЕНА ПОБЕГОВ СОСНЫ 14 Г. А. Борисов, Т. П. Тихомирова. ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ НА-ГРУЗОЧНЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ.... 25 Р. В. Воронов, О. В. Лукашенко, А. П. Мощевикин. АВТОМАТИЧЕСКАЯ КАЛИБРОВ-КА ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ М. Е. Галахова, А. Н. Кириллов. ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СО СТРУК-Х. Гао, В. В. Мазалов, Ц. Ху, А. В. Щипцова. РАВНОВЕСИЕ В ИГРЕ РАЗМЕЩЕНИЯ НА Ю. В. Заика. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА 48 А. Н. Кириллов, Н. В. Смирнов. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИ-ЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ В АЭРОТЕНКЕ 67

Карельский научный центр Российской академии наук

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 4, 2014

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Научный журнал Труды Карельского научного центра Российской академии наук № 4, 2014 Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ Scientific Journal Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences No 4, 2014 MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES Series

Главный редактор А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; В. Т. ВДОВИЦЫН, к. ф.-м. н., доцент; Т. ВИХАВАЙНЕН, доктор истории, проф.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; С. П. ГРИППА, к. г. н., доцент; Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; А. С. ИСАЕВ, академик РАН, д. б. н., проф.; В. Т. КАЛИННИКОВ, академик РАН, д. х. н., проф.; А. М. КРЫШЕНЬ (зам. главного редактора), д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Ф. П. МИТРОФАНОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; И. И. МУЛЛОНЕН, д. фил. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. ОКРЕПИЛОВ, академик РАН, д. э. н.; О. Н. ПУГАЧЕВ, член-корр. РАН. д. б. н.; Ю. В. САВЕЛЬЕВ, д. э. н.; Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Editor-in-Chief A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; S. P. GRIPPA, PhD (Geog.), Assistant Prof.; A. S. ISAEV, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. T. KALINNIKOV, RAS Academician, DSc (Chem.), Prof.; A. M. KRYSHEN' (Deputy Editor-in-Chief), DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; F. P. MITROFANOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; I. I. MULLONEN, DSc (Philol.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. OKREPILOV, RAS Academician, DSc (Econ.); O. N. PUGACHYOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); Yu. V. SAVELIEV, DSc (Econ.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); V. T. VDOVITSYN, PhD (Phys.-Math.), Assistant Prof.; T. VIHAVAINEN, PhD (Hist.), Prof.; A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Редакционная коллегия серии «Математическое моделирование и информационные технологии»

В. Т. ВДОВИЦЫН, к. ф.-м. н., доцент; Ю. В. ЗАИКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; В. Ф. КОЛЧИН, д. ф.-м. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

Editorial Board of the «Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

V. T. VDOVITSYN, PhD (Phys.-Math.), Assistant Prof.; YU. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. F. KOLCHIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; YU. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.

ISSN 1997-3217 (печатная версия) ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Зав. редакцией А.И.Мокеева
Адрес редакции: 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
тел. (8142)762018; факс (8142)769600
E-mail: trudy@krc.karelia.ru
Электронная полнотекстовая версия: http://transactions.krc.karelia.ru

УДК 517.51

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ КОНСТАНТАХ В ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА LIP 1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ БАСКАКОВА

Ю. Г. Абакумов¹, М. А. Верхотурова¹, В. Г. Банин²

Рассматриваются некоторые вопросы, касающиеся оценочных и точных констант в оценках приближения функций классов Lip1 тригонометрическими операторами Баскакова.

Ключевые слова: аппроксимационные константы, тригонометрические операторы Баскакова.

Yu. G. Abakumov, M. A. Verhoturova, V. G. Banin. APPROXIMATION CONSTANTS IN ESTIMATION OF LIP1 CLASS FUNCTIONS APPROXIMATION BY BASKAKOV'S TRIGONOMETRIC OPERATORS

Some aspects of estimation constants application in approximation of functions from Lip1 class by Baskakov's trigonometric operators are considered.

Key words: approximation constants, Baskakov's trigonometric operators.

1. Общие сведения о тригонометрических операторах Баскакова и некоторых аппроксимативных свойствах этих операторов

Тригонометрическими операторами Баскакова называются аппроксимационные последовательности $\left\{M_n^{[m](k_1,\dots,k_m)}\right\}_{n=2k_m+1}^{\infty}$, где

$$M_n^{[m](k_1,\dots,k_m)}(f, x) = \frac{2^{m-1} \prod_{j=1}^m \sin^2 \frac{\pi k_j}{n}}{\pi n}.$$
$$\cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+x) \sin^2 \frac{nt}{2} dt}{\sin^2 \frac{t}{2} \prod_{j=1}^m \left(\cos t - \cos \frac{2k_j \pi}{n}\right)},$$

а целые параметры $m,\,k_j$ не зависят от n и удовлетворяют неравенствам:

$$m > 0, \ 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m$$

Если $f \in Lip_M 1$, то имеет место следующая оценка:

$$\|M_n^{[m](k_1,...,k_m)}(f,x) - f(x)\| \le$$

$$\le M \cdot A_O^{[m](k_1,...,k_m)} \cdot n^{-1} + o(n^{-1}),$$
 (1)

$$\begin{split} A_O^{[m](k_1,\dots,k_m)} &= \\ &= 4\pi^{2m-1} \prod_{j=1}^m k_j^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 t dt}{t \prod_{j=1}^m \left| k_j^2 \pi^2 - t^2 \right|}. \end{split}$$

Константа $A_O^{[m](k_1,...,k_m)}$ получила название оценочной константы (в отличие от точной константы, о которой речь пойдет дальше).

Было установлено, что в неравенстве (1) константу $A_O^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ можно заменить на

¹ Забайкальский государственный университет

 $^{^{2}}$ Финансовый университет при Правительстве $P\Phi$

 $A^{[m](k_1,...,k_m)},$ которая определяется неравенством

$$A^{[m](k_1,...,k_m)} =$$

$$=4\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_{j}^{2}\int_{0}^{\infty}\frac{m(t)\sin^{2}tdt}{t\prod_{j=1}^{m}(\pi^{2}k_{j}^{2}-t^{2})},$$

где
$$m(t) = sign\left(\prod_{j=1}^{m} (r_j - t)\right).$$

Константы $r_j, j=1,...,m, 0 < r_1 < k_1\pi < r_2 < k_2\pi < ... < r_m < k_m\pi,$ являются корнями уравнения

$$G_{[m](k_1,\dots,k_m)}(r) = \frac{1}{2},$$
 (2)

$$G_{[m](k_1,...,k_m)}(r) =$$

$$= \pi^{2m-1} \prod_{j=1}^{m} k_j^2 \int_0^r \frac{\sin^2 t dt}{t^2 \prod_{j=1}^{m} (\pi^2 k_j^2 - t^2)}.$$

Существование требуемых решений уравнения (2) в общем случае до сих пор не доказано. Существование констант r_j , j=1,...,m, удовлетворяющих равенству $G_{[m](k_1,...,k_m)}(r)=\frac{1}{2}$, доказано при m=1,2,3 и любых допустимых k_j , а также в некоторых частных случаях при m=4,5 (см. [1,2]).

2. O KOHCTAHTE $A_H^{[4](1,2,3,4)}$

Воспроизведем (с некоторыми изменениями) по [1] доказательство существования констант r_j в случае $m=4,\ (k_1,k_2,k_3,k_4)=(1,2,3,4)$. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Если $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_3) > \frac{1}{2},$ то уравнение (2) имеет четыре корня $r_j,$ j=1,...,4, таких, что $0 < r_1 < \pi k_1 < r_2 < \pi k_2 < r_3 < \pi k_3 < r_4 < \pi k_4.$

Доказательство. Очевидно, что уравнение (2) имеет указанные в условиях утверждения четыре корня, если $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_1) > \frac{1}{2},$ $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_2) < \frac{1}{2},$ $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_3) > \frac{1}{2},$ $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_4) < \frac{1}{2}.$ Выполнение первых двух неравенств доказано Е. Ю. Карымовой (см. [3]). Третье неравенство выполнено по условию. Четвертое неравенство выполняется потому, что $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(r)$ при $r \in [\pi k_4,\infty)$, возрастая, стремится к $\frac{1}{2}$.

Утверждение доказано.

Теорема 1. Имеет место неравенство $G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi) > \frac{1}{2}$.

Доказательство. Известно, что

$$G_{[4](1,2,3)}(3\pi) > \frac{1}{2}.$$

Покажем, что

$$G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi) > G_{[3](1,2,3)}(3\pi).$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\int_0^{3\pi} \frac{\sin^2 t dt}{\prod_{i=1}^4 (j^2 \pi^2 - t^2)} > 0 \tag{3}$$

(левая часть неравенства получится, если из $G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi)$ вычесть $G_{[3](1,2,3)}(3\pi)$). Таким образом, доказательство неравенства $G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi) > \frac{1}{2}$ сводится к доказательству неравенства (3). Правая часть неравенства (3) выглядит следующим образом:

$$\int_0^{3\pi} \frac{\sin^2 t dt}{(\pi^2 - t^2) (4\pi^2 - t^2) (9\pi^2 - t^2) (16\pi^2 - t^2)} = \int_0^{3\pi} F(t) dt.$$

$$\int_0^{3\pi} F(t)dt = \int_0^{\pi} F(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} F(t)dt + \int_{2\pi}^{3\pi} F(t)dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{\prod_{j=1}^4 (j^2 \pi^2 - t^2)}.$$

Во втором интеграле делаем замену $\tau = t - \pi$ (в записи переходим вновь к обозначению t вместо τ):

$$I_{2} = -\int_{0}^{\pi} \frac{\sin^{2} t dt}{t (\pi - t) (4\pi^{2} - t^{2}) (9\pi^{2} - t^{2}) (4\pi + t) (5\pi - t)}.$$

В третьем интеграле сделаем замену $\tau=t-2\pi$ и перейдем к обозначению t вместо τ :

$$I_{3} = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin^{2} t dt}{t (\pi^{2} - t^{2}) (2\pi - t) (3\pi + t) (4\pi + t) (5\pi + t) (6\pi + t)}.$$

Произведя сложение, получим

$$I_1 + I_2 + I_3 =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(3t^2 + 9\pi t + 6\pi^2) \sin^2 t dt}{(5\pi + t) (6\pi + t) \prod_{j=1}^4 (j^2 \pi^2 - t^2)}.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательно при $t \in [0, \pi]$, имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 > 0.$$

Теорема 1 доказана.

О точных KOHCTAHTAX $A_{II}^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$

Мы уже отмечали, что точные константы вычисляются по формуле

$$A^{[m](k_1,\ldots,k_m)} =$$

$$= 4\pi^{2m-1} \prod_{j=1}^{m} k_j^2 \int_0^\infty \frac{m(t) \sin^2 t dt}{t \prod_{j=1}^{m} (\pi^2 k_j^2 - t^2)},$$

где $m(t) = sign\left(\prod_{j=1}^{m} (r_j - t)\right)$, если уравнение (2) имеет m решений, расположенных так, как это оговорено в п. 1.

Утверждение 2. Уравнение (2) имеет m(m > 3) решений, расположенных так, как это оговорено в n.1, если для i=3,...,m-1выполняются неравенства

$$G_{[m](k_1,...,k_m)}(k_i\pi) > \frac{1}{2}$$
 при нечетном i. (4)

$$G_{[m](k_1,..,k_m)}(k_i\pi) < \frac{1}{2}$$
 npu четном i. (5)

Доказательство. Доказательство оно совершенно аналогично доказательству утверждения 1.

Теорема 2. Если при некоторых $k_1 < k_2 <$ $... < k_{m-1}$ уравнение (2) имеет т решений, расположенных так, как это оговорено в п.1, то найдется $N_0(k_1,...,k_{m-1})$ такое, что при $k_m > N_0$ имеют место неравенства (4) и (5).

Доказательство. Имеем

$$G_{[m](k_1,\ldots,k_m)}(k_i\pi) =$$

$$=\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^m k_j^2 \int_0^{k_i\pi} \frac{\sin^2t dt}{t^2 \prod_{j=1}^m \left(\pi^2 k_j^2 - t^2\right)} =$$

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Абакумов Юрий Георгиевич

к. ф.-м. н., профессор Забайкальский государственный университет ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Россия, 672039 эл. почта: abakumovug@yandex.ru тел.: (302) 2416444

Верхотурова Мария Алексеевна

аспирантка

Забайкальский государственный университет ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Россия, 672039 тел.: (302) 2416444

Банин Виктор Григорьевич

к. ф.-м. н., доцент

Финансовый университет при Правительстве РФ Ленинградский проспект, 49, Москва, Россия, 125993 эл. почта: vikbanin@mail.ru

тел.: (499) 2772118

$$=\pi^{2m-3} \prod_{j=1}^{m-1} k_j^2 \int_0^{k_i \pi} \frac{\sin^2 t}{t^2 \prod_{j=1}^{m-1} \left(\pi^2 k_j^2 - t^2\right)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{\pi^2 k_m^2}} dt =$$

$$=\pi^{2m-1} \prod_{j=1}^{m-1} k_j^2 \cdot \left(\int_0^{k_1 \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 \prod_{j=1}^{m-1} (k_j^2 \pi^2 - t^2)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^2}{\pi^2 k_m^2}} + \sum_{p=1}^{i-1} \int_{k_p \pi}^{k_{p+1} \pi} \frac{\sin^2 t dt}{t^2 \prod_{j=1}^{m-1} (k_j^2 \pi^2 - t^2)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi_{p+1}^2}{2\pi^2}}\right),$$

где $\xi_1 \in (0, k_1 \pi)$, $\xi_q \in (k_{q-1} \pi, k_q \pi)$.

Так как

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi_q^2}{\pi^2 k_m^2}} \to 1$$

при $k_m \to \infty$, q < m, получаем, что

$$\lim_{k_m \to \infty} G_{[m](k_1,\dots,k_m)}(k_i \pi) = G_{[3](k_1,\dots,k_{m-1})}(k_i \pi).$$

А это эквивалентно утверждению, которое сформулировано как теорема 2. Итак, теорема 2 доказана.

Следствие 1. При любом m > 0 существует бесконечное число таких $k_j, j=1,..,m,$ что уравнение (2) имеет т решений, расположенных так, как это оговорено в п. 1.

Литература

- 1. Абакумов Ю. Г., Карымова Е. Ю., Коган Е. С. Об одной точной константе // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2008. С. 14–17.
- 2. Абакумов Ю. Г., Верхотурова М. А., Коган Е. С. Об одной экстремальной задаче теории приближения // Вестник Самарского ГУ. Естественно-науч. серия. 2012. № 3/1 (94).
- 3. Карымова Е. Ю. Приближение функции Хевисайда некоторыми методами суммирования рядов Фурье: монография // Е. Ю. Карымова, Ю. Г. Абакумов, С. В. Долгов, Т. В. Дубровина, Е. С. Коган. Чита: ЧитГУ, 2010. 121 с.

Abakumov, Yury Zabaykalsky State University 30 Alexandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia, e-mail: abakumovug@yandex.ru tel.: (302) 2416444

Verhoturova, Maria

Zabaykalsky State University 30 Alexandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia, tel.: (302) 2416444

Banin, Victor

Financial University 49 Leningradskiy St., 125993 Moscow, Russia, e-mail: vikbanin@mail.ru tel.: (499) 2772118

УДК 519.17,519.856,681.324

АЛГОРИТМЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ

Б. З. Белашев^{1,2}, А. В. Кабедев²

Алгоритмы глобальной оптимизации: генетические алгоритмы, поиск по шаблону совместно с методами максимума энтропии и наименьших квадратов применены для декомпозиции сложных распределений на компоненты. Цель применения — выявление вероятных структур размытых распределений и количественная оценка их параметров. Протестированные на моделях алгоритмы использовали для определения структур сложных ИК-спектров минералов, рентгенограмм аморфных материалов, селекции геофизических аномалий.

Ключевые слова: оптимизация, алгоритм, поиск, сходимость, энтропия, шаблон, распределение, спектр, геофизика.

B. Z. Belashev, A. V. Kabedev. GLOBAL OPTIMIZATION ALGORITHMS FOR DATA ANALYSIS

Global optimization algorithms genetic algorithms and patternsearch algorithms together with maximum entropy and least square methods were applied to decompose complex distributions into components. The goal of these algorithms is to reveal the probable structure of the blurred distributions and estimate their parameters. Algorithms were tested on the models and used to determine the structures of complex IR spectra of minerals X-ray diagrams of amorphous materials and a selection of geophysical anomalies.

Key words: optimization, algorithm, search, convergence, entropy, pattern, distribution, spectra, geophysics.

...в мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума...
Л. Эйлер

Введение

Предмет рассмотрения составляют алгоритмы и модели на основе вариационных методов. В отличие от дифференциальных или разностных уравнений, описывающих временной ход процессов, вариационные методы определяют установившиеся состояния, отвечающие экстремальным значениям функционалов. Анализ таких состояний помогает интер-

претировать результаты моделирования сложных систем.

Экстремальные модели известны в физике, механике, термодинамике, экономике, теории управления [10]. В биологии их популярность растет с развитием эволюционных представлений [11]. Теория систем и синергетика в качестве базовых принципов используют методы максимальной энтропии, максимальной скорости изменения потока энергии через систему, наименьшей диссипации энергии, наискорейшего спуска [8].

¹ Институт геологии Карельского научного центра РАН

² Петрозаводский государственный университет

В данной статье методы максимума энтропии и наименьших квадратов применены для декомпозиции эмпирического распределения на компоненты, имеющие понятный физический смысл. Алгоритмы глобальной оптимизации использованы для выявления числа таких компонент и определения их параметров. Обычно экстремальную задачу формулируют, вводя условный функционал, помимо целевой функции содержащий уравнения, описывающие исходное распределение, и неравенства, накладываемые на переменные. Ограничения присутствуют в условном функционале аддитивно и взвешены множителями Лагранжа. Приравнивание первых вариаций условного функционала по искомой функции к нулю дает уравнения, позволяющие выразить искомую функцию через множители Лагранжа. Множители Лагранжа находят, подставляя эту функцию в условие задачи и решая полученную систему уравнений [7]. Для работы алгоритма требуется дифференцируемость функций. Его сложность задана этапами вы-

Для выпуклых функционалов и данных, удовлетворяющих условиям [4], экстремальная задача имеет единственное решение. Оптимизация функционалов с несколькими экстремумами традиционным способом сопряжена с преждевременной сходимостью. В этом случае решение в виде локального экстремума может сильно отличаться от глобального экстремума. В такой ситуации предпочтительно иметь единственное решение задачи, близкое к глобальному экстремуму функции. Многие из алгоритмов, дающих такое решение, еще не нашли широкого применения в практике обработки данных.

Цель работы — демонстрация действия алгоритмов глобальной оптимизации на основе генетических алгоритмов и поиска по шаблону [14] для выявления скрытых структур распределений в области материаловедения и геофизики. На симулированных и реальных примерах с помощью этих алгоритмов реконструированы наиболее вероятные структуры сложных спектров. Полученная при реконструкциях информация полезна при разработке подходов к проблемам колебательной спектроскопии, аморфного состояния вещества, селекции аномалий потенциальных полей.

Алгоритмы глобальной оптимизации Дж. Холланда

Пример стохастической глобальной оптимизации дают генетические алгоритмы [9],

основанные на идее естественного отбора Ч. Дарвина — совершенствования вида путем передачи потомкам лучших генов. Функцию приспособленности особей к среде определяют на множестве хромосом особей — последовательностей единиц и нулей, представляющих числа в коде Грея. Чем значение функции меньше, тем более особь считают приспособленной к среде.

Генетический алгоритм ищет глобальный минимум этой функции, начиная с произвольной совокупности особей, рассматриваемой в качестве популяции. На каждой итерации особи объединяют в пары и производят потомков путем кроссинговера — обмена хвостами хромосом и мутации — случайной инверсии значения в случайном разряде числа. По приспособленности потомков и родителей ведут отбор особей в новую популяцию. Алгоритм сходится, если новая популяция не отличается от предыдущей.

Преимущества генетических алгоритмов состоят в отсутствии требований непрерывности и дифференцируемости функций, нечувствительности к попаданию в локальные минимумы, в возможности многокритериальной оптимизации, многократного ускорения сходимости по сравнению со случайным поиском, простоте реализации. Их недостатками являются затрудняющая понимание биологическая терминология и невысокая точность определения глобального экстремума, которую повышают, выполняя алгоритм несколько раз и выбирая значение экстремума с наилучшей функцией приспособленности.

Меньшие затраты по сравнению с генетическими алгоритмами имеет алгоритм поиска по шаблону — множеству точек в виде вершин п-мерного куба, расширяющемуся или сжимающемуся в зависимости от того, имеет или нет точка шаблона меньшее значение, чем текущее значение функции. Минимальный размер шаблона является основанием для прекращения поиска.

В системе компьютерной математики «MATLAB» данные алгоритмы реализованы процедурами ga и patternsearch [15].

Реконструкция наиболее вероятной структуры размытого распределения

Данные алгоритмы применены при реконструкции структуры сигнала и шума методом максимума энтропии. По сигналу s_i и известной функции размытия h_{ij} требуется восстановить функцию распределения x_i и аддитивный шум x_{i+n} , связанные соотношением:

$$s_i = \sum_{i=1}^n h_{ij} x_j + x_{i+n}, \tag{1}$$

где $x_i, x_{i+n} > 0, i, j = 1, 2, ...n$, а шум представлен последовательностью положительных случайных чисел.

Решение, отвечающее функционалу максимума энтропии и ограничениям (1), является максимально произвольным, наиболее вероятным [8]. Параметр ρ регулирует вклад энтропии шума в функционале (2).

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i ln x_i - \rho \sum_{i=1}^{n} x_{i+n} ln x_{i+n} \to max, \quad (2)$$

Симулированный сигнал s_i получали размытием двух δ -пиков амплитудами 0,5 и 0,7 функцией $h_{ij} = exp(-0,25(i-j)^2)$, с добавлением шума в диапазоне (0; 0,1). Условия задачи и неравенства, задающие диапазоны изменения переменных, вводили непосредственно в командную строку алгоритмов да и раtternsearch. Результаты реконструкции (рис. 1, а, б), полученной без использования множителей Лагранжа, демонстрируют близость исходных данных модели и полученных оценок.

В рассмотренных примерах для реконструкции структуры размытого распределения необходимо знать функцию размытия h_{ij} . Когда эта функция неизвестна, ее вид выбирают из дополнительных соображений. В задачах спектроскопии распространенной ее формой являются лоренциан или гауссиан.

Учитывая, что свертка лоренциана с лоренцианом дает лоренциан, а гауссиана с гауссианом — гауссиан, на первом этапе к экспериментальному распределению применяли процедуру с выбранной таким образом функцией h_{ij} , ширина которой равна меньшей ширине наиболее узкой компоненты распределения. В результате в оценке распределения проявлялись моды, указывающие на возможное число компонент распределения и диапазоны изменения их параметров [12]. Эту информацию использовали при поиске параметров компонент, который проводили, минимизируя невязку экспериментального и модельного распределений:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(s_i - A_1 exp\left(-\left(\frac{i-t_1}{g_1}\right)^2\right) - A_2 exp\left(-\left(\frac{i-t_2}{g_2}\right)^2\right)\right)^2$$
 (3)

Результаты метода наименьших квадратов для двух компонент приведены на рис. 2.

Анализ значений функции приспособленности и параметров модели при разных прогонах алгоритма показал, что целесообразно выбирать результаты с наименьшим значением функции приспособленности. Оценки средних значений и дисперсий параметров при разных реализациях алгоритма дают ошибки параметров, связанные с процессом оптимизации. Ошибки параметров, зависящие от погрешностей измерений, определяли, разыгрывая исходное распределение в коридоре трех среднеквадратичных отклонений содержимого разрядов гистограммы и усредняя параметры модели, полученные в реализациях.

Примеры реконструкции структур размытых спектров и распределений

Задача декомпозиции сложных контуров распределений на компоненты возникает в разных областях исследований. В материаловедении ее актуальность определена существованием размытых спектров и рентгенограмм материалов, которые сложно поддаются анализу традиционными методами. На рис. З представлены результаты разложения ИК-спектра порошка кианита (а) и рентгенограммы дистиллированной воды (б) [1] на гауссовы компоненты, полученные алгоритмом patternsearch. Предварительно тем же методом были определены моды распределений и возможные диапазоны изменения их параметров. ИК-спектр порошка кианита был зарегистрирован на спектрофотометре «Спекорд М 80». Проведенная обработка подтвердила реальную сложность данных, выявила их структуру, продемонстрировала способность алгоритмов оптимизации оперировать большим числом компонент. С другой стороны, появилась проблема интерпретации, наполнения результатов моделирования физическим смыслом, отнесения полученных компонент к определенному типу колебаний или структурных характеристик. В этом плане показательна проблема воды. Несмотря на современные методы ее изучения [5], ясности в вопросе о структуре воды нет. Сложность проблемы частично может быть объяснена неадекватным методическим обеспечением исследований. Так, использование в анализе ближнего порядка функций радиального распределения электронной плотности, отражающих вклад разных координационных сфер [13], не учитывает характерную для воды направленность водородных связей.

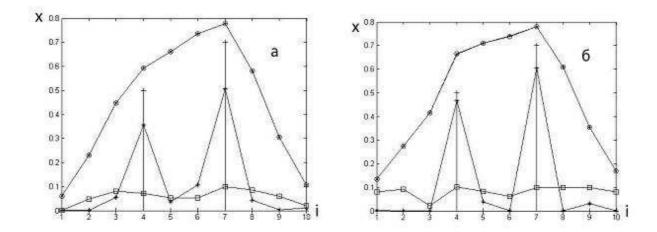
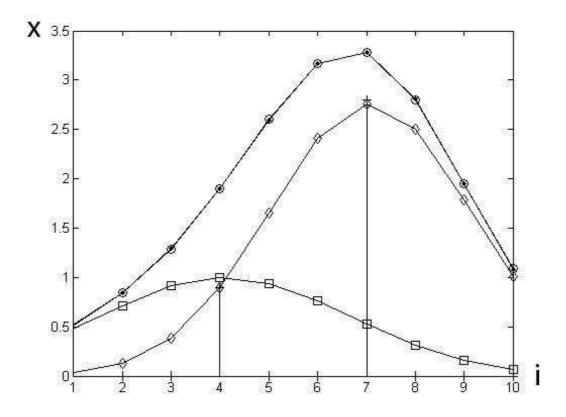
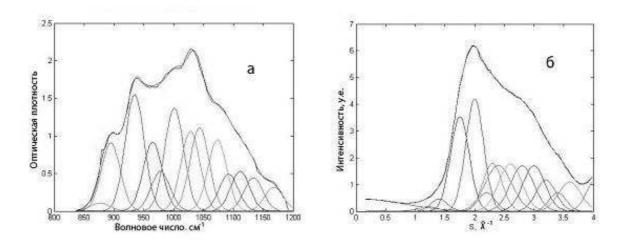


Рис. 1. Результаты реконструкции структуры сигнала и шума методом максимума энтропии с применением алгоритмов глобальной оптимизации ga (a) и patternsearch (б) системы компьютерной математики «МАТLAВ»: исходные δ-пики (+), данные (о), оценка данных (.), оценка функции (*) и шума (□). Параметр $\rho = 18$



Puc. 2. Подгонка параметров модели по методу наименьших квадратов алгоритмом patternsearch: исходные δ-пики (+), данные (0), оценка данных (.), оценки компонент (□,◊)

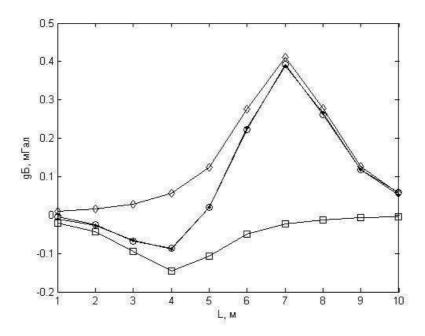
.



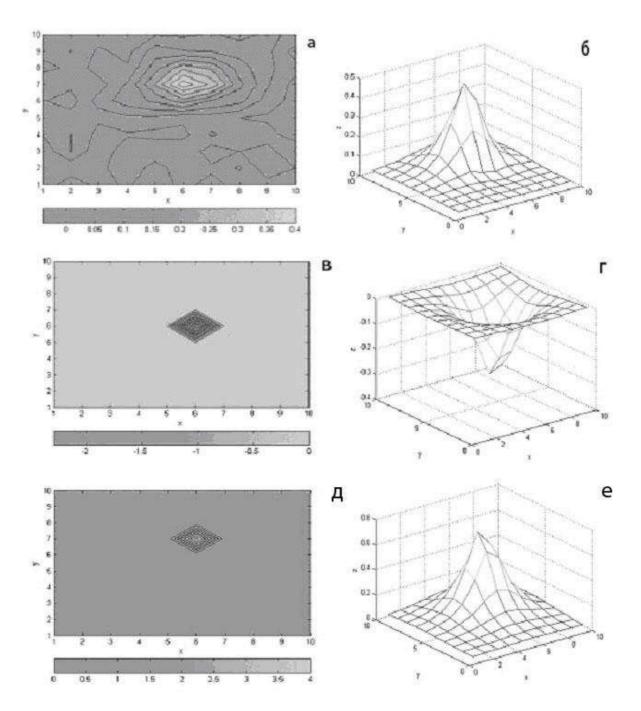
Puc. 3. Разложение на компоненты алгоритмом patternsearch ИК-спектра порошка кианита (а) и рентгенограммы дистиллированной воды (б)

Положения компонент рентгенограммы воды и аналоги межплоскостных расстояний

| $N_{ar{o}}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $s, \stackrel{\circ}{A}^{-1}$ | 0,98 | 1,22 | 1,40 | 1,75 | 2,00 | 2,20 | 2,30 | 2,40 | 2,60 | 2,80 | 3,00 | 3,20 | 3,40 |
| d, \mathring{A} | 6,43 | 5,10 | 4,49 | 3,59 | 3,14 | 2,86 | 2,73 | 2,62 | 2,42 | 2,24 | 2,09 | 1,96 | 1,85 |



 $Puc.\ 4$. Декомпозиция симулированного гравитационного профиля (о)на компоненты (□,♦) алгоритмом patternsearch 1: A1e = −1,0 (A1 = −1,2); g1e = 3,6 (g1 = 4,0); L1e = 4,0(L1 = 4,0); и компоненту 2: A2e = 2,2 (A2 = 2,1); g2e = 3,1 (g2 = 3,0); L2e = 7,0 (L2 = 7,0). Невязка между исходным контуром и контуром, построенным по реконструированным компонентам, составила (.) 0,00002



Puc.~5. Реконструкция гравиметрических данных алгоритмом patternsearch с выявлением отрицательной и положительной аномалий с источниками, лежащими вблизи одной вертикали: модельные данные (а) и площадные распределения первой (в) и второй (д) компонент и их 3D формы (б, r, e – соответственно)

Предлагаемый подход свободен от этого недостатка. Вычисленные по положениям компонент дифрактограммы s (см. рис. 3, 6) по формуле $d=2\pi/s$, аналоги межплоскостных расстояний d приведены g таблице. Аналоги, совпавшие g расстояниями между ближайшими водородосвязанными и неводородосвязанными молекулами воды g гексагональном льде g [6], выделены жирным шрифтом. Малый вклад этих компонент g рентгенограмму свидетельствует g том, что клатратные модели [5] не могут дать полного объяснения структуры воды.

Разобранные примеры содержали положительные компоненты распределений. Для расширения области применения алгоритмов глобальной оптимизации были опробованы распределения с компонентами разных знаков. Эта ситуация является типичной при селекции аномалий потенциальных полей в геофизике. Эффективность алгоритмов глобальной оптимизации в этом случае подтверждает разложение гравитационного профиля на компоненты (рис. 4).

При анализе гравитационного профиля параметр, задающий ширину компоненты, дает глубину залегания источника аномалии. Традиционными методами оказывается сложным разделить гравитационные аномалии в случаях, когда их источники находятся вблизи одной вертикали [3]. Алгоритмы глобальной оптимизации, использованные при селекции плоскостных модельных гравитационных распределений (рис. 5), справляются с этой ситуацией вполне приемлемо.

Благодаря единой методике обработки гравиметрических и магнитометрических данных [2] алгоритмы глобальной оптимизации распространены и на селекцию магнитных аномалий.

Заключение

С помощью генетических алгоритмов, алгоритма поиска по шаблону, адаптированных к методам максимума энтропии и наименьших квадратов, реконструированы скрытые структуры распределений случайных величин в разных предметных областях. Эвристические алгоритмы оптимизации имеют понятную основу, не детализированы, не подвержены преждевременной сходимости, дают единственное решение, близкое к глобальному экстремуму задачи, не требуют выполнения условий непрерывности и дифференцируемости функций, не используют множители Лагранжа, допускают многопараметрическую оптимизацию функций, позволяют получить устойчивые, наиболее вероятные оценки структур распределений, адекватны физической природе исследуемых объектов. Их применение способно повысить качество результатов и эффективность обработки данных.

Литература

- 1. Алешина Л. А., Люханова И. В. Рентгенографические исследования взаимодействия технических целлюлоз с водой // Ученые записки ПетрГУ. 2012. № 6 (111). С. 55–59.
- 2. *Блох Ю. И.* Обнаружение и разделение гравитационных и магнитных аномалий. М.: Изд-во МГГА, 1995, 80 с.
- 3. Бычков С. Г. Определение глубины аномалиеобразующих источников в системе «ВЕКТОР» // Материалы междунар. школысеминара «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей». Апатиты: ОИФЗ РАН, 2002. С. 17–18.
- 4. *Грешилов А. А.* Прикладные задачи математического программирования: Учебное пособие. М.: Логос, 2006. С. 34–38.
- 5. Захаров С. Д., Мосягина И. В. Кластерная структура воды. Препринт ФИАН, М., 2011.
- 6. Зацепина Г. Н. Физические свойства и структура воды. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 70.
- 7. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом, 2-изд-е. М.: РХД, 2000.
- 8. Копцик В. А. Экстремальные принципы информационно-синергетической эволюции / Глобализация, синергетический подход // сайт С. П. Курдюмова «Синергетика». http://spkurdymov.ru/ (дата обращения: 12.09.2013).
- 9. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы: Учебное пособие. Астрахань: Астраханский университет, 2007. 87 с.
- 10. Полак Л. С. Вариационные принципы механики их развитие и применения в физике. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.
- 11. Фурсова П. В., Левич А. П., Алексеев В. Л. Экстремальные принципы в математической биологии // Успехи современной биологии. 2003. Том 123. С. 115–137.
- 12. Belashev B. Z. Methods to reveal Hidden Structures of Signals and their Applications // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2010. № 3(2). С. 132–135.
- 13. Cochran T. W., Chiew Y. C. Radial distribution function of freely jointed hardsphere chains in the solid phase // Journal of Chemical Physics. 2006, Vol. 124, no 7 P.074901 http://dx.doi.org/10.1063/1.2167644. (дата обращения: 12.09.2013).

14. Holland J. Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan Press Ann Arbor, USA, 1975.

15. http://matlab.exponenta.ru/genalg/08.03.03.php. (дата обращения: 17.09.2013).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Белашев Борис Залманович

ведущий научный сотрудник, д. т. н. Институт геологии Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 профессор кафедры информационно-измерительных систем и физической электроники Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: belashev@krc.karelia.ru тел.: (8142) 782753

Кабедев Алексей Владимирович

аспирант кафедры информационно-измерительных систем и физической электроники Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: akabedev@mail.ru тел.: (8142) 719675

Belashev, Boris

Institute of Geology, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185610 Petrozavodsk, Karelia, Russia Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: belashev@krc.karelia.ru tel.: (8142) 719675

Kabedev, Alexey Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: akabedev@mail.ru

tel.: (8142) 782753

УДК 519.24:[581.132:582.475]

ПРИМЕНЕНИЕ КОСИНОР-АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СУТОЧНОЙ ДИНАМИКИ CO_2 -ГАЗООБМЕНА ПОБЕГОВ СОСНЫ

В. К. Болондинский 1 , С. Н. Шереметьев 2

 1 Институт леса Карельского научного центра PAH

Метод косинор-анализа является удобным инструментом для обработки данных временных рядов физиологических процессов у растений. Его применение особенно эффективно в ситуациях, когда использование классического аппарата временных рядов некорректно. В статье обсуждаются достоинства и недостатки косинор-анализа на примере исследования суточной динамики CO_2 -газообмена у сосны обыкновенной на протяжении вегетации.

Ключевые слова: косинор-анализ, временные ряды, CO_2 -газообмен, суточная динамика фотосинтеза, внешние факторы среды, суточные ритмы, ультрадианные ритмы.

V. K. Bolondinskii, S. N. Sheremetiev. APPLICATION OF COSINOR-ANALYSIS TO INVESTIGATING OF DIURNAL CO_2 EXCHANGE DYNAMICS IN PINE SHOOTS

The method of cosinor-analysis is a convenient tool for processing time series of physiological processes in plants. It is especially effective in situations when the application of classical methods of time series processing is incorrect. Advantages and shortcomings of cosinor-analysis are discussed in the paper through the example of the investigation of daily dynamics of CO_2 exchange in Scots pine shoots during the growing season.

 Key words: cosinor-analysis, time series, CO_2 exchange, diurnal photosynthesis dynamics, environmental factors, diurnal rhythms, ultradian rhythms.

Введение

Физиологические процессы растений имеют ритмический характер. Их суточная динамика в значительной степени обусловлена периодическими изменяющимися факторами внешней среды. Выделить, какие изменения процессов обусловлены биологическими часами на фоне ритмически изменяющихся внешних факторов, далеко не простая задача. Определенные успехи здесь достигнуты при исследовании водного режима [9, 10, 15], апикально-

го и радиального роста [11]. Суточные ритмы являются одним из частных проявлений существующих в растениях биологических циркадных часов. Предполагается, что циркадные часы, прогнозируя изменения среды и координируя физиологические процессы, увеличивают приспособленность растений к среде и их выживаемость. Наиболее характерный пример проявления действия циркадных часов — раскрытие устьиц. Устьица начинают раскрываться перед рассветом, максимально открываться перед рассветом, максимально откры-

 $^{^{2}}$ Ботанический институт им. В. Л. Комарова PAH

ты при первых лучах солнца, а затем происходит постепенное сужение устьичной апертуры к полудню. Данный ритм остается почти неизменным по форме в широком диапазоне внешних факторов среды [15].

В отличие от устьичной проводимости, транспирации, процессов митоза и других физиологических процессов, имеющих эндогенную ритмику и лишь частично зависящих от факторов внешней среды, фотосинтез (Ph) напрямую зависит от освещенности (I) и прекращается при отсутствии света. При этом хорошая корреляция фотосинтеза с освещенностью наблюдается лишь в пасмурную погоду, а также при восходе и заходе солнца. С температурой (T) и дефицитом водяного пара в воздухе (WPD) корреляции еще ниже [4]. Поэтому дневные колебания CO_2 -газообмена лишь в определенной мере отражают ход основных факторов среды, и анализ их формы и ритмологических характеристик может дать весьма ценную информацию о состоянии растения и его адаптационных возможностях. В современной литературе описание суточных ритмов проводится, как правило, на качественном уровне. При этом многие закономерности процессов остаются незамеченными.

В настоящее время подавляющее большинство моделей фотосинтеза основано на прямой зависимости процесса от факторов внешней среды. Громоздкие модели, содержащие десятки трудноизмеримых параметров, тем не менее далеко не адекватно описывают суточную динамику CO_2 -газообмена. Временной характер зависимости, как правило, игнорируется. Одна из причин этого явления – отсутствие доступного математического аппарата. Классическая теория анализа временных рядов применяется при исследовании физиологических процессов в естественных условиях, но возможности ее использования ограничены. Математическое исследование этих рядов требует особых методов, адаптированных к природе данных.

Сложность, а часто и невозможность использовать аппарат анализа временных рядов связана в основном с двумя обстоятельствами. Во-первых, длина рядов и плотность точек часто ограничены условиями эксперимента. Вовторых, ряды данных могут быть получены по смешанным пробам, взятым от разных объектов. При этом далеко не всегда процессы в этих объектах протекают синхронно. Например, при измерении фотосинтеза современными приборами типа газометрической системы Li-6400 достаточно часто происходит смена листа или побега. В нашем эксперименте измере-

ние фотосинтеза проводилось длительное время с помощью многоканальной газометрической установки непрерывного действия на одном и том же объекте, но по техническим причинам редко удавалось получить длину ряда более 144 значений (3 суток) без существенных пауз.

В 70-80-е годы мы обрабатывали наши данные с помощью аппарата анализа временных рядов. Нами делались попытки исследовать временную структуру процесса фотосинтеза и других физиологических процессов у сосны обыкновенной [7]. Исследовались короткие временные ряды CO_2 -газообмена [1, 2], транспирации [4], изменения диаметра ствола [6] и других процессов. Длина исследуемых рядов обычно не превышала 480 значений (10 суток). Пропущенные значения заменялись интерполированными данными. Для этого методом множественного регрессионного анализа моделировали зависимость фотосинтеза (Ph)от основных факторов внешней среды – I, Tи WPD. Коэффициент детерминации такой модели был выше 0,97. Приближенность модельных значений к реальным данным сильно зависела от типа погоды. В солнечную погоду максимальные величины наблюдаемых и предсказанных значений различались не более чем на 12 %, а суммы – не более 3 %. В пасмурную погоду различия были более существенными – 30 и 7 % соответственно. После такого рода трудоемких и не всегда удачных процедур проводился анализ.

Были определены циркадная (околосуточная) и 12-часовая составляющие процессов, построены оценки автокорреляционных и взаимокорреляционных функций, проведен спектральный и Фурье-анализ в разные периоды вегетации. Полученные количественные характеристики суточных ритмов для экологов и физиологов не представляли большой ценности и были в целом тривиальны. Наиболее интересные для физиологов выявление и анализ ультрадианных (с периодом менее 20 часов) ритмов вызывали большие трудности.

Еще в 60–70-е годы был разработан достаточно простой метод косинор-анализа, ставший инструментом обнаружения многих биомедицинских ритмов, особенно физиологических ритмов, и позволяющий проводить объективные и количественные оценки их амплитуды и фазы [5]. Этот метод широко используется последние десятилетия при ритмологических исследованиях человека и животных. Работ, где бы он применялся для изучения физиологических процессов у растений, во много раз меньше [9–11, 12].

Процессы CO_2 -газообмена как у нас, так и за рубежом практически не анализировались этим методом. В тех случаях, когда применение аппарата анализа временных рядов некорректно, этот метод может дать количественные характеристики ритмов CO_2 -газообмена и выявить степень синхронизации ритма процесса с ритмами факторов внешней среды в разные периоды вегетации.

Целью нашего исследования являлось изучение возможностей метода косинор-анализа при исследовании газообмена на примере суточной динамики на протяжении вегетации у побега сосны обыковенной.

Материалы и методы

Эксперимент по измерению CO_2 -газообмена (нетто фотосинтеза) у однолетних побегов 45-летней сосны и внешних факторов среды проводился на полевой базе Института леса в 50 км к северу от г. Петрозаводска (Габозеро) в сосняке черничном свежем [3]. Использовалась многоканальная автоматическая установка непрерывного действия на базе инфракрасного газоанализатора Infralyt-4. Внешние факторы среды измерялись стандартными метеорологическими приборами. Измерения велись с марта по ноябрь, и длина ряда за период с минимальными пропусками (апрель-сентябрь) составила 7320 наблюдений (48 измерений в сутки). Пропуски более 48 значений были редкими, а по 5-10 значений имели место почти каждую неделю. Эпизодически наблюдения велись в феврале-марте и в октябре-ноябре. При обработке данных весь сезон был разбит на двухнедельные периоды.

Измерения могут быть равноотстоящие или разноотстоящие друг от друга, то есть шаг наблюдений не обязательно должен быть постоянным. Не обязательны также и требования по измерениям в одни и те же часы суток. В нашем случае для каждой суточной хронограммы мы имели обычно 48 равноотстоящих измерений, или 35-40 измерений с 1–2 интервалами отсутствующих данных CO_2 -газообмена. Ряды внешних данных имели гораздо меньше пропусков. Входной информацией для косинор-анализа служил пучок из 14 хронограмм. Выходным результатом косинор-анализа, получаемым на основании усредненного пучка 14 хронограмм, были оценки амплитуды колебаний (A), акрофазы (φ) – момента времени, когда колебание достигает своего максимального значения, и мезора (h) – величины среднего уровня косинусоиды для заданного периода (рис. 1). Эти данные рассчитывались как для отдельных косинусоид, так и для средней косинусоиды. Для амплитуды и акрофазы строились доверительные интервалы. Обычно вероятность, с которой доверительные интервалы накрывают эти параметры, выбирается равной 0,95. Каждая хронограмма аппроксимировалась косинусоидой методом наименьших квадратов. В полярных координатах каждая косинусоида изображалась на плоскости точкой, расстояние которой от центра координат равно амплитуде, а угол наклона к горизонтальной оси прямой, проведенной от точки до начала координат, равен акрофазе (см. рис. 1). Все полученные таким образом точки в декартовых координатах рассматриваются как реализации двумерной случайной величины с гипотетическим нормальным законом распределения, и строится эллипс рассеяния ошибок генерального среднего. Построение эллипса рассеяния (или эллипса ошибок) необходимо для определения достоверности существования ритмов на принятом доверительном уровне (например, на уровне 0,95).

Пусть известны экспериментально полученные измерения $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_n$ в различные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n$. Измерения аппроксимируются методом наименьших квадратов косинусоидой:

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) + h = x\cos(\omega_0 t) + y\sin(\omega_0 t) + h,$$

где $x = A\cos\varphi$, $y = A\sin\varphi$. Угловая частота ω_0 предполагается заданной. Амплитуда A, акрофаза φ и уровень h подлежат оцениванию. Чтобы найти соответствующие оценки, минимизировали выражение

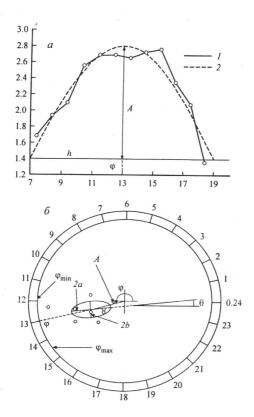
$$I = \sum (u(t) - u_i)^2.$$

Отсюда приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными – x, y, h, из которой находятся оценки параметров. Далее находим амплитуду и акрофазу: $A = \sqrt{(x^2 + y^2)}$,

$$\varphi = \arctan(y/x), \quad x \geqslant 0,$$

 $\varphi = \arctan(y/x) + \pi, \quad x < 0.$

Производя указанную процедуру, последовательно вычисляются все x_j , y_j , h_j , $j=1,2,\ldots,n$. Далее необходимо построить эллипс равных вероятностей для точек $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. Обычно доверительная вероятность P того, что все точки (x_j,y_j) лежат внутри эллипса, выбирается 0,95. Для того чтобы изобразить эллипс графически, рассчитываются следующие величины: средние x_c и y_c — центр эллипса, полуоси эллипса — a и b, угол наклона θ эллипса в прямоугольной системе координат.



Puc. 1. Пример применения косинор-анализа для получения характеристик дневных ритмов транспирации Potenlilla anserine [10]: а – на основе 10 хронограмм рассчитана средняя синусоида, где h – мезор, A – амплитуда, φ – акрофаза. 1 – дневной ход транспирации, 2 – расчетная синусоида. По оси абсцисс – часы суток, по оси ординат – интенсивность транспирации (г/(г сух. массы) за час)); б – эллипс рассеяния средней синусоиды для интенсивности транспирации на 24-часовом циферблате. $\varphi_{min}, \ \varphi_{max}$ – доверительный интервал для φ . 2a, 2b – удвоенные большая и малая полуоси эллипса. θ — угол наклона большой оси эллипса к оси абсцисс. Кружками обозначены параметры синусоид (в полярных координатах - модуль и фаза, которые равны амплитуде и акрофазе соответствующей синусоиды) для каждого дня наблюдений. Остальные обозначения те же, что и на a

Расчетные данные косинор-анализа получали $^{\rm c}$ помощью компьютерной про-«Cosinor-Analisis 2.4 граммы for Excel 2000/XP», разработанной С. Н. Шереметьевым [9, 10] и выложенной на сайте http://www.excelstat.newmail.ru. В основу положен алгоритм, приведенный в книге И. П. Емельянова [5]. Наряду с расчетной косинусоидой и основными параметрами ритмов A, φ, h) программа дает ряд показателей, достаточных для построения эллипса рассеяния (полуоси эллипса, декартовые координаты центра эллипса, угол наклона эллипса и др.). Построение эллипса необходимо для определения достоверности существования ритмов на принятом доверительном уровне, определения доверительных интервалов акрофаз с помощью касательных к эллипсу, опущенных из начала координат на циферблат (см. рис. 1). Если какая-либо часть эллипса попадает на начало координат, то соответствующий ритм следует считать статистически недостоверным на принятом доверительном уровне [5].

Результаты и обсуждение

Достоверность суточных ритмов CO_2 газообмена подтверждается практически для всех дней вегетации. Единственный случай, когда эллипс рассеяния касается начала координат, - это трехдневный период в конце марта. Побег днем слабо поглощал углекислоту. Ночные морозы снижали дыхание и особенно фотосинтез. Суточный ритм газообмена практически отсутствовал. Во время вегетации у всех основных внешних факторов среды подтверждается достоверность суточных ритмов. Зимой (январь-февраль) имелись периоды, когда не удавалось диагностировать достоверность суточного ритма температуры воздуха (p = 0.95). Перепад между ночными и дневными температурами зимой часто не превышает 1 градус Цельсия. Затем следует похолодание, и снова температура стабилизируется. Визуальный анализ графиков хода температуры также показывает, что ритм зимой исчезает. Хотя признаки CO_2 -газообмена при низких отрицательных температурах у хвои отсутствуют, некоторые биохимические процессы все же имеют место. Если в феврале наступает оттепель и температура положительная, теоретически CO_2 -газообмен возможен. Однако эксперимент говорит об обратном. В мартовский же период суточный ритм температуры воздуха достоверен, и потепление во вторую половину марта сразу же включает фотосинтетический и дыхательный аппарат. Возможно, именно появление стабильного ритма температуры воздуха в начале марта дает сигнал растению о приближении весны и включает соответствующие реакции, делающие потенциально возможными дыхательную и фотосинтетическую деятельность, что и реализуется при температуре, близкой к нулю.

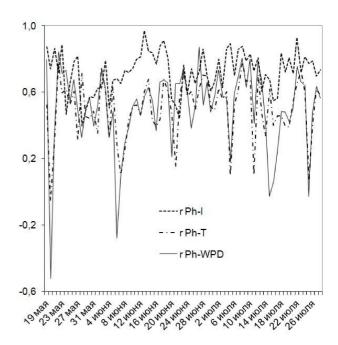
На протяжении вегетационного периода проведен анализ сезонных изменений акрофазы, амплитуды, доверительных интервалов акрофаз и других ритмологических параметров у CO_2 -газообмена и факторов внешней среды.

Для 14-дневных периодов были построены эллипсы рассеяния, траектория перемещения которых, величины их площади, расстояние от центра координат дают важную информацию как о контроле внешними факторами исследуемого процесса, так и о его автономности.

Интервалы акрофаз фотосинтеза гаются с утренних, предполуденных в июне к полуденному времени в августе-сентябре — факт, который находит четкое физиологическое объяснение и связан в первую очередь со степенью открытия устьиц (уменьшением устьичной проводимости от утренних к полуденным часам). При этом акрофазы температуры воздуха, дефицита водяных паров воздуха находятся в основном в интервале 15-16 часов, то есть запаздывают на 2-3 часа. Перемещение эллипса рассеяния у освещенности носит нерегулярный характер и мало соответствует траектории перемещения эллипса у фотосинтеза. Хотя акрофазы как фотосинтеза, так и освещенности находятся в достаточно узком (2–2,5 часа) коридоре, соответствия между ними не выявлено. Часто наблюдаемое, особенно в период интенсивного роста, более раннее наступление акрофаз фотосинтеза, опережающее акрофазы освещенности, говорит прежде всего о недостаточном водоснабжении побегов.

Нами были оценены коэффициенты корреляции (r) фотосинтеза с параметрами внешней среды для каждых суток вегетационного периода. Кроме того, в разные периоды вегетации проводили корреляционный анализ для амплитуд Ph и I, Ph и T, Ph и WPD. Коэффициенты корреляции наиболее велики были для Ph и I (рис. 2). В июне в период интенсивного роста сосны в некоторые дни они составляли 0.90-0.95 и были значимы при P =0,95. Среднесезонный коэффициент корреляции Ph и I составил 0,76. Средние величины коэффициентов корреляции Ph с T и WPDсоставляли 0,56 и 0,54 соответственно. Коэффициент корреляции амплитуд фотосинтеза и температуры до начала июня составлял 0.45 и был значимым при P = 0.95. На протяжении июля-августа г не превышал 0,23 и для всего периода был незначим. Незначимы коэффициенты корреляции и для амплитуд I и Ph. Значимым оказался коэффициент корреляции амплитуд Ph и WPD (0.68) в период май – середина июля. При низких температурах в начале вегетации величины WPD невелики и не оказывали сильного влияния на фотосинтез.

В конце мая – начале июня, когда почва насыщена влагой, рост WPD совпадал с ростом интенсивности фотосинтеза.



 $Puc.\ 2.$ Сезонные изменения суточных коэффициентов корреляции (r) фотосинтеза (Ph) с внешними факторами среды (освещенностью -I, температурой -T и дефицитом водяных паров в воздухе -WPD)

В дальнейшем большие величины этого фактора вели к сужению устьиц и снижали фотосинтез. В целом корреляционный анализ дает очень ограниченную информацию о связи фотосинтеза с внешними факторами среды и выявляет лишь некоторые тенденции. Анализ траекторий перемещения эллипсов рассеяния и их параметров показал (рис. 3; табл. 1), что именно WPD, несмотря на двухчасовой фазовый сдвиг, являлся синхронизирующим фактором суточного ритма фотосинтеза. Но фазовый сдвиг ритма Ph и WPD приводил к тому, что коэффициенты корреляции Ph и WPD в целом были ниже, чем у Ph и I. В результате этому фактору многие исследователи не оказывают должного внимания. Наш анализ показывает, что для всего периода вегетации наиболее важным фактором, определяющим ритмы фотосинтеза, являлся именно дефицит водяного пара в воздухе. Данный вывод нам не удалось получить, используя корреляционный анализ, а ранее - метод анализа временных рядов [1, 2, 7].

Начиная со второй половины августа происходило как уменьшение амплитуд Ph и WPD, так и сужение доверительных интервалов их акрофаз. Наблюдалось синхронное уменьшение площадей эллипсов рассеяния и расстояний центров эллипсов от центра координат. Анализ сезонного хода площадей эллипса рассеяния (см. рис. 3; табл. 1), амплитуд, доверительных интервалов акрофаз позволил выявить определенные закономерности. Площадь эллипса рассеяния, наряду с его близостью к началу координат, определяет доверительные интервалы изменения акрофаз процесса. Обычно у всех исследуемых нами рядов за исключением освещенности приближение эллипса к началу координат сопровождалось уменьшением его площади. В результате доверительные интервалы акрофаз изменялись в достаточно узких пределах. Как у фотосинтеза, так и у факторов внешней среды изменения этих параметров в целом однотипны. Однако корреляционный анализ (табл. 2) выявил достаточно высокий достоверный коэффициент корреляции (r=0,91) площадей эллипсов рассеяния у Ph и WPD при P=0,95.

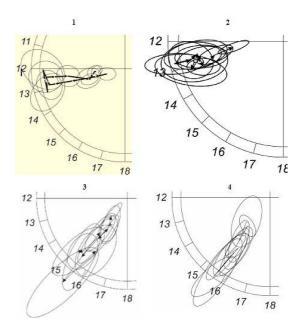
У площадей эллипсов рассеяния температуры (S_T) и фотосинтеза $(S_{\rm Ph})$ был самый низкий коэффициент корреляции (0,13). Сравнительно невысок он и у площадей фотосинтеза $(S_{\rm Ph})$ и освещенности (S_I) – 0,24. Их значимость при P=0,95 не подтверждается. Факт сильной взаимосвязи $S_{\rm Ph}$ и $S_{\rm WPD}$ представляется на первый взгляд несколько неожиданным. В отличие от освещенности доверительные интервалы акрофаз сдвинуты у T и WPD на 2-2,5 часа по сравнению с интервалами у Ph, что проявилось в сравнительно низких коэффициентах корреляции фотосинтеза с этими факторами (см. рис. 2).

В то же время высокая корреляция площадей эллипсов рассеяния Ph и WPD говорит о высокой синхронизации их ритмов, что находит четкое физиологическое объяснение. Устьичная регуляция является основным внутренним фактором, определяющим интенсивность фотосинтеза. Именно степенью открытости устьиц определяется поглощение углекислоты растением, а также интенсивность транспирации. WPD является основным фактором, влияющим на транспирацию. Его увеличение уже в утренние часы приводит к уменьшению устьичной проводимости, что ограничивает рост транспирации. В результате диффузионное поступление CO_2 через устьица также уменьшается, что, как правило, приводит и к снижению фотосинтеза.

Поэтому после восхода солнца WPD становится наиболее существенным фактором, вли-яющим на раскрытие устьиц и определяющим интенсивность фотосинтеза. Непосредственное влияние температуры играло заметную роль лишь ранней весной или в поздний

осенний период (см. рис. 2). В летний период это влияние было косвенным – через WPD.

Если факт достоверности суточных ритмов у фотосинтеза и внешних факторов среды для физиологов достаточно тривиален, то выявление ритмов с периодом менее суток и показ их достоверности при определенном уровне значимости более интересны. В большинстве случаев первая цель исследования изменяющейся во времени биологической или физиологической переменной – найти ее собственные частоты. Кроме циркадных ритмов с периодом, близким к 24 часам, существуют ритмы с периодами менее суток (от нескольких минут до 12—15 часов), получившие название ультрадианных. Этот класс ритмов достаточно распространен у животных и имеет разную периодичность для различных функций. У растений также отмечается наличие такого рода ритмов [2, 9, 10, 15]. Нами после снятия 24-часового тренда у фотосинтеза с помощью косинор-анализа были обнаружены ультрадианные ритмы с периодом около 10 часов (рис. 4) для весеннего восстановительного периода (18 апреля – 18 мая) и для летнего периода интенсивного роста и развития растения (19 мая – 28 июля). В осенний период (август-сентябрь) появляется 7,5-часовой ритм.



 $Puc.\ 3.$ Сезонный ход эллипсов рассеяния для двухнедельных периодов с 18 апреля по 22 сентября. 1 — фотосинтез, 2 — освещенность, 3 — дефицит водяного пара в воздухе, 4 — температура воздуха. Параметры эллипсов см. в табл. 1

Таблица 1. Параметры позиционирования эллипсов рассеяния средней синусоиды за 14-дневные периоды для интенсивности фотосинтеза и внешних факторов среды

| | Фото | синтез | | | | | Освещенность | | | | | |
|--------------|------|--------|------|------|----------|-------|--------------|---------|------|------|----------|-------|
| Даты | Х | У | 2a | 2b | θ | S | X | У | 2a | 2b | θ | S |
| 18.04 - 3.05 | -10 | -3,1 | 10,4 | 7,5 | 0,7 | 0,6 | -21 | -4,9 | 15,9 | 9,4 | 4,8 | 11733 |
| 4.05 - 19.05 | -21 | -5,6 | 15,1 | 11,2 | 25,8 | 1,3 | -22 | -6.8 | 17,2 | 7,3 | -8,5 | 9831 |
| 20.05 - 4.06 | -44 | -9,6 | 17,6 | 14,4 | 113,7 | 2,0 | -19 | -3,6 | 12,6 | 5,4 | 3,2 | 5331 |
| 5.06 - 20.06 | -48 | -0.6 | 28,1 | 20,5 | -37 | 4,5 | -26 | -5,4 | 14,0 | 4,9 | 3,6 | 5386 |
| 21.06 - 6.07 | -45 | -14 | 24,5 | 17,1 | 52,7 | 3,3 | -22 | -4,4 | 10,9 | 8,5 | -18 | 7270 |
| 7.07 - 22.07 | -46 | -4,8 | 20,1 | 18,4 | 0,4 | 2,9 | -20 | -3,1 | 15,3 | 6,4 | 11,8 | 7654 |
| 23.07 - 7.08 | -33 | -4,4 | 13,9 | 12,3 | -18 | 1,3 | -20 | -3,9 | 10,8 | 4,9 | 15,1 | 4163 |
| 8.08 - 23.08 | -20 | -6,2 | 10,4 | 6,1 | 18,4 | 0,5 | -19 | -6,0 | 7,9 | 4,0 | 0,9 | 2462 |
| 24.08 - 8.09 | -17 | -1,6 | 9,4 | 6,4 | 27,3 | 0,5 | -16 | -3,2 | 9,1 | 3,3 | 22,5 | 2388 |
| 9.09 - 22.09 | -16 | -1,9 | 7,2 | 5,3 | 73,8 | 0,3 | -11 | -1,4 | 7,7 | 1,9 | 20,3 | 1147 |
| | WPD | | | | | | | ература | | | | |
| 18.04 - 3.05 | -10 | -16 | 24,4 | 9,1 | 70,2 | 17348 | -20 | -30 | 30,2 | 7,8 | 60,7 | 1,9 |
| 4.05 - 19.05 | -27 | -35 | 44,1 | 14,6 | 64,3 | 50588 | -29 | -42 | 44,9 | 12,7 | 55,7 | 4,5 |
| 20.05 - 4.06 | -16 | -20 | 27,6 | 9,2 | 52,1 | 19966 | -21 | -32 | 29,5 | 11,2 | 51,2 | 2,6 |
| 5.06 - 20.06 | -39 | -51 | 57,5 | 19,0 | 44,0 | 85772 | -32 | -44 | 31,9 | 10,9 | 40,9 | 2,7 |
| 21.06 - 6.07 | -19 | -32 | 34,6 | 19,3 | 56,5 | 52451 | -18 | -28 | 26,8 | 10,0 | 59,7 | 2,1 |
| 7.07 - 22.07 | -30 | -32 | 39,9 | 16,1 | 42,0 | 50332 | -25 | -33 | 33,4 | 8,2 | 50,5 | 2,1 |
| 23.07 - 7.08 | -27 | -32 | 23,8 | 15,4 | 55,8 | 28765 | -19 | -27 | 15,4 | 8,8 | 48,3 | 1,1 |
| 8.08 - 23.08 | -12 | -18 | 16,5 | 10,2 | 68,9 | 13234 | -13 | -16 | 13,3 | 7,0 | 120,5 | 0,7 |
| 24.08 - 8.09 | -18 | -25 | 19,5 | 9,5 | 50,1 | 14518 | -18 | -25 | 24,8 | 8,4 | 69,5 | 1,6 |
| 9.09 - 22.09 | -9,7 | -11 | 20,0 | 4,5 | 52,1 | 7048 | -13 | -13 | 29,9 | 15,0 | 70,7 | 3,5 |

 $\Pi puмечание. S$ – площадь эллипса, остальные обозначения – см. рис. 1.

Таблица 2. Корреляционная матрица площадей эллипсов рассеяния

| | S_I | S_T | S_{WPD} | S_{Ph} |
|-----------|-------|-------|-----------|----------|
| S_I | 1,00 | 0,27 | 0,37 | 0,24 |
| S_T | 0,27 | 1,00 | 0,30 | 0,13 |
| S_{WPD} | 0,37 | 0,30 | 1,00 | 0,91 |
| S_{Ph} | 0,24 | 0,13 | 0,91 | 1,00 |

Примечание. S_I , S_T , S_{WPD} , S_{Ph} – площади эллипсов рассеяния соответственно освещенности, температуры воздуха, дефицита водяного пара в воздухе и фотосинтеза. Выделены максимальные значения коэффициентов корреляции.

Появление 10-часового ритма связано со сдвигом акрофаз Ph на более ранние утренние часы [2, 3, 7]. Последнее обусловлено недостаточным водоснабжением побегов сосны в основном из-за того, что высокое сопротивление ствола движению влаги ограничивало поток транспирируемой воды. При этом запасы влаги в прикорневом слое почвы в период интенсивного роста были максимальными за сезон [3]. Осенью, когда запасы влаги в почве были в минимуме, потребность дерева в углекислоте значительно снизилась, устыца прикрылись и наблюдался сбалансированный водный режим. 10-часовой ритм исчез

(достоверность его не подтверждалась даже с вероятностью 90 %). Таким образом, причиной появления данного ультрадианного ритма является несбалансированность водоснабжения побегов (при достатке влаги в почве). После дождливых периодов летом, когда водный баланс дерева восстанавливался, 10-часовой ритм на какое-то время становился недостоверным. Амплитуда 10-часового ритма тем больше, чем выше T и WPD. При умеренных температурах его амплитуда снижалась.

Данный ритм лишь в определенной мере синхронизирован T и WPD. В период интенсивного роста CO_2 -газообмен побега может сохраняться на достаточно высоком уровне и при уменьшении устьичной проводимости. Чтобы сохранить высокий уровень поглощения углекислоты, усиливаются процессы активации и регенерации ферментов, ответственных за связывание CO_2 , уменьшается внутриклеточная концентрация CO_2 и поток углекислоты в лист не ослабевает [8]. Явление это носит хотя и кратковременный характер, оказывает влияние на ритмику фотосинтеза. Поэтому появление 10-часового ритма во многом обусловлено и эндогенными причинами.

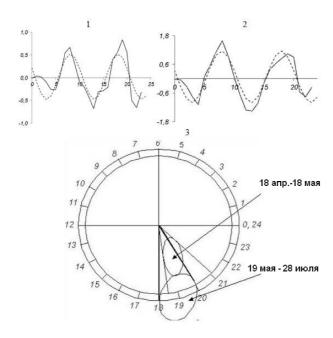


Рис. 4. Пример ультрадианных ритмов. Моделирование синусоидой данных фотосинтеза после снятия суточного тренда для периодов 18 апр. – 18 мая (1), 19 мая – 28 июля (2) и эллипсы ошибок средних синусоид (3)

В то время как 10-часовой ритм связан с полуденным угнетением фотосинтеза, уменьшением поглощения CO_2 в связи с экономией воды растением, 7,5-часовой ритм не находит четкого физиологического объяснения. При хорошей влагообеспеченности растений, оптимальной температуре воздуха и высокой интенсивности фотосинтеза в период активного роста в сосняке черничном свежем в мае-июне на протяжении нескольких дней были обнаружены 2- и 4-часовые ритмы. Причины появления их также неясны. В то же время у внешних факторов среды на протяжении всего сезона вегетации достоверен был только 24-часовой ритм. Таким образом, ультрадианные ритмы фотосинтеза обусловлены в первую очередь физиологическим состоянием дерева.

При изучении CO_2 -газообмена современными приборами типа Li-6400 практически всегда получаются ряды с разноотстоящими друг от друга наблюдениями. Кроме того, на протяжении дня всегда имеются пропущенные наблюдения. Длина рядов также часто бывает ограничена 10–15 наблюдениями за день. Если же удается оптимизировать процесс измерения и получить 20–30 наблюдений, то, как правило, возрастает и количество пропусков.

Такая же ситуация имеет место и с процессами водного обмена [9, 10, 15]. Применение аппарата анализа временных рядов для исследования такого рода данных некорректно. Правда, методы статистики, реализуемые, например, в последних версиях пакета Statistika, приспособлены для работы с пропущенными значениями. В ряде случаев замена пропущенных значений дает положительный результат.

Существует несколько алгоритмов для выполнения этой процедуры: замена средним, вычисленным по N ближайшим значениям с двух сторон от пропуска в данных, медианой N ближайших значений, интерполяцией по ближайшим точкам. В последнем методе пропущенные значения интерполируются по соседним непропущенным значениям. Графически этот метод сводится к замене пропущенного наблюдения путем проведения прямой линии от предыдущего (перед пропущенным) до следующего (после пропущенного) наблюдения. Если пропусков немного и они небольшие, то погрешности, возникающие от применяемых процедур, незначительны. Если же интервалы с пропусками велики и количество их большое, то ход процесса искажается, что ведет к неверному вычислению ритмологических параметров. Таким образом, далеко не всегда в блоке программы Statistika «Анализ временных рядов» можно использовать процедуру замены пропущенных значений. Интерполяция же по моделям, где данные процесса рассчитываются по участкам с похожими погодными условиями, чрезвычайно трудоемка и также дает большие погрешности. Для обработки временных рядов CO_2 газообмена, как и для большинства других биологических процессов, имеющих большое число пропущенных значений, предпочтительней использовать косинор-анализ. Наш эксперимент, осуществленный с помощью автоматической 6-канальной установки по измерению CO_2 -газообмена, позволил получить достаточно длинные ряды равноотстоящих наблюдений без существенных пропусков, которые можно было обрабатывать с помощью программ анализа временных рядов. Такой анализ был проведен и дал важную информацию о синхронизации процесса CO_2 -газообмена и факторов внешней среды, выявил циркадный и 12-часовой ритм фотосинтеза на разных этапах вегетации [1, 2, 7].

Косинор-анализ, использованный в настоящей работе, позволил получить уникальную информацию о сезонной динамике движения эллипсов рассеяния, позволяющей выявить синхронизацию ритмов фотосинтеза и

внешних факторов среды. Динамика изменения площадей эллипсов и их удаленности от начала координат дает информацию об изменении доверительных интервалов акрофаз исследуемых рядов на протяжении вегетации. Определенную информационную ценность представляют и корреляционные соотношения между амплитудами фотосинтеза и амплитудами факторов среды, между среднесуточными значениями и амплитудами. Если для наших данных наличие 24-часового ритма – факт, не требующий доказательств, то для других процессов, например параметров водного режима, он не столь очевиден [9, 10, 15]. Косинор-анализ в ряде ситуаций не подтверждает наличие достоверного 24-часового ритма, как и ритмов с другими периодами у некоторых групп растений для ряда экотопов.

В то же время косинор-анализ имеет определенные ограничения и далеко не всегда позволяет получать достоверные результаты. Если амплитуда колебаний мала, то величина эллипса также незначительна, а центр его близок к началу координат. Даже при использовании большого масштаба не всегда ясно, попадает эллипс какой-либо частью на начало координат или нет. В этом случае достоверность ритма подтвердить достаточно сложно. Такую ситуацию мы имели при анализе временных рядов относительной влажности и температуры воздуха в течение нескольких дней в феврале, когда влажность изменялась в диапазоне 90-93%, а температура – в диапазоне -12...-13градусов Цельсия.

Более серьезным недостатком метода является процедура определения дополнительных частот исследуемого процесса. Использование косинор-теста в качестве метода нахождения частот состоит в «подгонке» модели для различных возможных периодов; в зависимости от того, покрывает или не покрывает доверительный эллипс центр полярной системы координат, соответствующая частота принадлежит или не принадлежит спектру изучаемого явления [5]. При построении эллипса рассеяния ошибок генерального среднего все рассчитанные точки (x_i, y_i) , в декартовых координатах соответствующие амплитуде и акрофазе, рассматриваются как реализации двумерной случайной величины с гипотетическим нормальным законом распределения. Эта гипотеза в теории косинор-анализа нигде не проверяется и принимается без доказательств. Для наших рядов CO_2 -газообмена и внешних факторов среды с ярко выраженной суточной динамикой, имеющих нормальное распределение

[2, 7], это кажется с большой долей вероятности справедливым. Но для сосняков, растущих на суходолах, где фотосинтез сильно подавлен в засуху, предположение о нормальном распределении (x_i, y_i) может и не соответствовать действительности, и процедура построения эллипса оказывается некорректной. При определении ультрадианных ритмов после снятия суточного тренда очень часто получаются квазипериодические кривые, очень отдаленно напоминающие косинусоиду. Если для кривых, приведенных на рис. 4, гипотеза о нормальном распределении (x_i, y_i) с большой долей вероятности верна, то для многих других случаев такой уверенности нет. Мы не смогли найти в литературе, посвященной косинор-анализу, попыток доказательства нормальности распределения (x_i, y_i) , необходимого для построения эллипса рассеяния. Изначально при разработке метода постулировалось, что у исследуемого процесса имеется одна-единственная частота. Для многих биологических процессов это действительно так. Однако имеется множество примеров как в биологии животных и медицине, так и в физиологии растений, когда присутствуют дополнительные частоты. Наличие дополнительных (не рассматриваемых) частот приводит к плохим оценкам параметров модели [13, 16]. Явление наложения спектров, т. е. интерференция между частотой выборки и собственной (природной) частотой процесса, приводит к появлению биений. Это явление присуще любой периодической функции и, в частности, ухудшает оценки параметров модели, включающей одну-единственную периодическую составляющую. Уже во время разработки этого метода в 60-70-е годы подчеркивалось, что в случае наличия нескольких частот его следует использовать с большой осторожностью [16, 17]. В случае, когда имеется более чем одна частота, такая процедура может привести к неверной интерпретации данных. Считается, что происходит это из-за отсутствия проверки предположения независимости пар (x_i, y_i) , на котором основан расчет доверительных интервалов, а также из-за наложения спектров [17]. Проблемы косиноранализа, на которые указывали математики в 60-70-е годы [16, 17], изредка звучат и в статьях последнего десятилетия [13, 14]. Поиск в базе Web of Science для косинор-анализа дает более тысячи работ в биологических областях и лишь единицы в математике. В то же время сотни экспериментаторов в биологии и медицине продолжают пользоваться этим единственным для большинства из них приемлемым методом, основанным на теории полувековой давности, и число их растет. В последние годы косинор-анализ стал применяться и в экофизиологии растений [9–11]. С помощью него мы получили ценные данные о синхронизации 24-часовых ритмов фотосинтеза и факторов внешней среды. В то же время результаты определения частот ультрадианных ритмов не находят подтверждения в физиологии растений. Неясно, связано ли это с недостатком наших знаний или с недоработкой метода.

Выводы

- 1. Для временных рядов CO_2 -газообмена, как и для других физиологических процессов с непостоянным шагом по времени и пропущенными значениями, косиноранализ является удобным инструментом для исследования суточной ритмики. Он позволяет получить ценную информацию об эллипсах рассеяния параметров исследуемых процессов, их сезонной динамике, доверительные интервалы акрофаз и амплитуд.
- Обработка данных CO₂-газообмена с помощью аппарата исследования временных рядов требует предварительной трудоемкой подготовки по заполнению пропущенных значений. Во многих биологических исследованиях применение этого аппарата нецелесообразно.
- 3. Анализ эллипсов рассеяния ошибок генерального среднего моделей интенсивности фотосинтеза и параметров внешней среды для 14-дневных периодов в сезонном цикле развития показал, что основным фактором, синхронизирующим ритм фотосинтеза в летний период, является дефицит водяного пара в воздухе, и связано это с устьичным ограничением фотосинтеза.
- 4. У внешних факторов среды достоверны только суточные ритмы. Достоверность ультрадианных ритмов подтверждается лишь для процесса фотосинтеза. После снятия суточного тренда для СО2-газообмена побега сосны был обнаружен 10-часовой ритм, связанный с полуденной депрессией фотосинтеза. Обнаруженный в осенний период 7,5-часовой ритм, а также 2- и 4-часовые ритмы в конце весеннего периода на сегодняшний день не находят физиологического объяснения.
- 5. Метод косинор-анализа в ряде случаев работает некорректно при поиске частот

ритмов, присущих процессу, а не заданных а ргіогі. Недостатки особенно серьезны, если имеются два и более ритма. Теория косинор-анализа в последнее десятилетие прогрессирует очень слабо, и сотни исследователей пользуются математическими разработками 60–70-х годов. Критика математиками этого метода в период его разработки актуальна и в настоящее время. Требуется серьезная доработка метода.

Литература

- 1. Болондинский В. К. Влияние температуры на ритмическую организацию газообмена древесных растений // Влияние термического фактора на сезонную ритмику растений. М., 1979. С. 17–18.
- 2. *Болондинский В. К.* Структура временной организации процесса фотосинтеза древесных растений // Оперативно-информационные материалы. Физиология и биохимия растений. Петрозаводск, 1978. С. 42–45.
- 3. Болондинский В. К., Кайбияйнен Л. К. Динамика фотосинтеза в сосновых древостоях // Физиология растений. 2003. Т. 50. С. 105–114.
- 4. Веселков Б. М., Болондинский В. К. Метод исследования динамики и временной организации процесса транспирации у древесных растений в полевых условиях // Биологические проблемы Севера. Физиология и биохимия растений. Петрозаводск, 1976. С. 34–36.
- 5. *Емельянов И. П.* Форма колебаний в биоритмологии. Новосибирск: Наука, 1976. 128 с.
- 6. Кайбияйнен Л. К., Балыков Н. Г. Временная организация процессов роста у сосны // Вопросы адаптации древесных растений к условиям Севера. Петрозаводск, 1975. С. 154–163.
- 7. Кайбияйнен Л. К. Методы структурно-диахронического исследования в экофизиологии древесных растений // Биофизические методы исследования в экофизиологии древесных растений. Л.: Наука, 1979. С. 3–17.
- 8. Фотосинтез: физиология, онтогенез, экология: [посвящ. памяти А. Т. Мокроносова] / Ред. Ю. В. Гамалей и др. Калининград: Изд-во КГТУ, 2009. $368~\rm c.$
- 9. Шереметьев С. Н. Дневная динамика транспирации травянистых растений на градиенте влажности почвы // Ботанический журнал. 2004. Т. 89. № 5. С. 749–773.
- 10. Шереметьев С. Н. Травы на градиенте влажности почвы (водный обмен и структурнофункциональная организация). М.: Т-во науч. изд. КМК. 2005. 271 с.

- 11. Barlow P. W., Mikulecky M. Sr., Strestik J. Tree-stem diameter fluctuates with the lunar tides and perhaps with geomagnetic activity / Protoplasma. 2010. Vol. 247, N 1-2. P. 25-43.
- 12. Couderchet M., Retzlaff G. Daily changes in the relative water-content of velvetleaf (abutilontheophrasti medic) may explain its rhythmic sensitivity to bentazon // Journal of plant physiology. 1995. Vol. 145. N 4. P. 501–506.
- 13. Mikulich S. K., Zerbe G. O., Jones R. H. and Crowley T. J. Comparing linear and nonlinear mixed model approaches to cosinor analysis. // Statistics in Medicine. 2003. Vol. 22. P. 3195–3211.
- 14. Mikulich S. K., Zerbe G. O., Jones R. H. and Crowley T. J. Relating the classical covariance adjustment techniques of multivariate growth

- curve models to modern univariate mixed effects models // Biometrics. 1999. Vol. 55. N 3. P. 957-
- 15. Nardini A., Salleo S., Andri S. Circadian regulation of leaf hydraulic conductance in sunflower (Helianthus annuus L. cv Margot). Plant, Cell and Environment, 2005. Vol. 28. P. 750–759.
- W., Tong Y. L., Lee J.-K., Halberg F. Methods for cosinor-rhythmometry // Chronobiologia. 1979. Vol. 6. N 4. P. 305–322.
- Van Cauter E., Huyberechts S. Problems in Statistical Analysis of Biological Time Series: The Cosinor Test and the Periodogram // Journal of interdisciplinary cycle research. 1973. N 1. P. 41-

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Болондинский Виктор Константинович

научный сотрудник, к. б. н. Институт леса Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: bolond@krc.karelia.ru тел.: (8142) 768160

Шереметьев Сергей Николаевич

старший научный сотрудник, д. б. н. Ботанический институт им. В. Л. Комарова РАН проф. Попова, 2, Санкт-Петербург, Россия, 197376 эл. почта: sn.sheremetiev@gmail.com

тел.: (812) 4670619

Bolondinskii, Viktor

Forest Research Institute, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: bolond@krc.karelia.ru tel.: (8142) 768160

Sheremetiev, Sergey

V. L. Komarov Botanical Institute, Russian Academy of Sciences 2 Prof. Popova Št., 197376 Saint-Petersburg, Russia e-mail: sn.sheremetiev@gmail.com tel.: (812) 4670619

УДК 338.45:621.31(470.22)

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ НАГРУЗОЧНЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Г. А. Борисов, Т. П. Тихомирова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

В статье обосновывается выделение динамической составляющей нагрузочных потерь энергии в элементах электрических сетей и ее использование для анализа и минимизации потерь методом полной стабилизации мощности.

Ключевые слова: элемент электрической сети, минимум потерь энергии, минимум расчетной мощности, стабилизация мощности (нагрузки).

G. A. Borisov, T. P. Tikhomirova. ESTIMATION OF THE DYNA-MIC COMPONENT OF LOAD LOSSES OF ENERGY FROM ELEMENTS OF POWER GRIDS

Isolation of the dynamic component of load losses from elements of power grids and its application for the analysis and optimal management by the total power leveling method are substantiated.

Key words: power grid element, minimum power losses, minimum rated capacity, power (load) leveling.

Основной целью «Энергетической стратегии России на период до 2030 года» является максимально эффективное использование природных энергетических ресурсов, из которых с середины XX столетия в большинстве индустриальных стран и в мире в целом в потери уходит 61-63 % [2, 6]. В их число входят технологические расходы электроэнергии, составляющие в отечественных магистральных сетях 9 %, а в распределительных – 15–20 % [3]. В статье обосновывается выделение в нагрузочных потерях энергии элементов электрических сетей динамической составляющей, ее количественная оценка и метод минимизации путем полной стабилизации нагрузки.

Нагрузочные потери активной энергии в элементах электрических сетей – линиях электропередачи и трансформаторах – при передаче активной энергии

$$W = \Delta t \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{1}$$

с графиком мощности на выходе элемента $\{P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_n\}$ составляют величину

$$\Delta W_{\rm m} = \frac{R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} \sum_{i=1}^n P_i^2, \tag{2}$$

где R – активное сопротивление элемента;

 $U_{
m cp}$ — среднее напряжение на нем; Δt — одинаковые интервалы времени, на которых мощность считается равной P_i .

Сформулируем следующую задачу. При заданных активном сопротивлении R, среднем напряжении $U_{\rm cp}$ и количестве передаваемой энергии W по элементу электрической сети

определить множество таких нагрузок $\{P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n\}$, при которых нагрузочные потери энергии были бы минимальны, т. е. найти

$$\min \Delta W = \frac{R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} \sum_{i=1}^n P_i^2. \tag{3}$$

В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа [5] для достижения условного минимума функции (3) требуется равенство ее производных по аргументам P_i :

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial P_1} = \dots = \frac{\partial \Delta W}{\partial P_i} = \dots = \frac{\partial \Delta W}{\partial P_n} = \lambda.$$
 (4)

Откуда

$$\frac{2R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} P_1 = \dots = \frac{2R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} P_n = \lambda \qquad (5)$$

и $P_1=\ldots=P_i=\ldots=P_n.$ Также, исходя из (1), $W=\Delta t\cdot n\cdot P_{
m cp}$ и

$$P_i = \frac{W}{\Delta t \cdot n} = \frac{W}{T} = P_{\rm cp}. \tag{6}$$

Таким образом, относительный минимум потерь энергии на элементе при ее заданной величине достигается в том случае, когда при передаче заданного количества энергии W мощность постоянна.

Если нагрузка элемента отклоняется от среднего значения P, то это должно привести к появлению дополнительных потерь энергии сверх минимальных. Определим эти дополнительные потери. Для этого последовательно выполним ряд преобразований формулы (6):

$$\sum_{i=1}^{n} P_{\text{cp}} = \sum_{i=1}^{n} P_{i};$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} P_{\text{cp}}^{2} - 2 \sum_{i=1}^{n} P_{i} \cdot P_{\text{cp}} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i}^{2} = 2 \sum_{i=1}^{n} P_{\text{cp}}^{2} - 2 \sum_{i=1}^{n} P_{i} \cdot P_{\text{cp}} + \sum_{i=1}^{n} P_{i}^{2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{n} P_{\text{cp}}^{2} + \sum_{i=1}^{n} (P_{\text{cp}} - P_{i})^{2};$$

$$\frac{R \cdot \Delta t}{U^2} \sum_{i=1}^{n} P_i^2 = \frac{R \cdot \Delta t}{U^2} \sum_{i=1}^{n} P_{\text{cp}}^2 + \frac{R \cdot \Delta t}{U^2} \sum_{i=1}^{n} (P_{\text{cp}} - P_i)^2.$$
(7)

В результате преобразований получили разделение полных нагрузочных потерь энергии при передаче энергии W в элементе электрической сети $\Delta W_{\rm n}$ (2) на две составляющие — статическую $\Delta W_{\rm c}$ и динамическую $\Delta W_{\rm g}$:

$$\Delta W_{\pi} = \Delta W_{\rm c} + \Delta W_{\pi}. \tag{8}$$

Первая составляющая $\Delta W_{\rm c}$ зависит от суммы квадратов среднего значения нагрузки $P_{\rm cp}^2$ или по формуле (6) – от суммы квадратов переданной энергии W^2 , поделенной на T^2 . Она соответствует той части полных потерь энергии в элементе, которая может быть получена при минимизации потерь путем полной стабилизации передаваемой мощности. Вторая составляющая потерь $\Delta W_{\rm d}$ зависит от суммы квадратов отклонений текущего значения нагрузки от ее среднего значения, которая в [2] называется неуправляемостью нагрузки ($\frac{R}{U_{\rm cp}^2}$). Произведение неуправляемости нагрузки на величину $\frac{R}{U_{\rm cp}^2}$ следует назвать динамической составляющей потерь энергии элемента.

Нагрузочные потери энергии в электрических сетях определяются по коэффициенту формы графика [1]

$$k_{\Phi}^2 = \frac{\Delta t \sum_{i=1}^n P_i^2}{\Delta t \sum_{i=1}^n P_{\rm cp}^2},$$
 (9)

поэтому

$$\frac{R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} \sum_{i=1}^n P_i^2 = \frac{R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} \cdot k_{\rm d}^2 \sum_{i=1}^n P_{\rm cp}^2, (10)$$

V

$$\Delta W_{\rm II} = k_{\rm ch}^2 \cdot \Delta W_{\rm c},\tag{11}$$

т. е. полные нагрузочные потери пропорциональны статическим потерям. Тогда после подстановки (11) в (8) получим

$$\Delta W_{\rm d} = \Delta W_{\rm c}(k_{\rm d}^2 - 1). \tag{12}$$

Эта формула дает возможность воспользоваться для приближенного определения динамической составляющей нагрузочных потерь действующей нормативной базой с применением значений коэффициентов заполнения суточных графиков k_3 [1]:

$$k_{\Phi}^2 = \frac{1 + 2k_3}{3k_3}. (13)$$

При стабилизации нагрузки элемента сети $(P_i = P_{\rm cp})$ динамическая составляющая потерь энергии снижается до нуля и полные потери энергии становятся равными статической составляющей. Ввиду этого статическую составляющую потерь энергии можно считать пределом снижения полных потерь, а динамическую — теоретическим (валовым) потенциалом снижения потерь энергии. Минимум достигается при полной стабилизации передаваемой по элементу нагрузки.

При минимизации потерь энергии методом стабилизации нагрузки, когда $P_i = P_{\rm cp}$, достигается еще один минимум - минимальная расчетная нагрузка элемента, величина которой влияет на выбор основных параметров элементов сети - номинального напряжения, сечений проводов линий электропередачи и номинальных мощностей у трансформаторов - и определяет суммарные приведенные затраты на элементе сети. Это происходит потому, что из множества нагрузок графика $\{P_1,$ $P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$, необходимых для передачи заданного количества энергии W, одна является наибольшей и равной $P_{i\,max}$. Замена неравномерного графика на стабильный с постоянной нагрузкой P снижает расчетную нагрузку с $P_{i\,max}$ до $P_{\rm cp}$. Последняя $(P_{\rm cp})$ является минимальной из всех возможных для передачи заданного количества W.

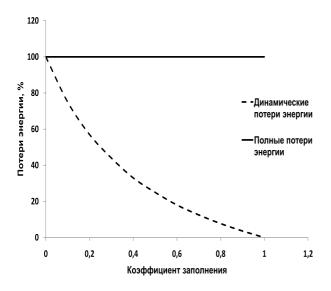
Потенциал снижения расчетной нагрузки при ее полной стабилизации может быть оценен с использованием коэффициента заполнения k_3 суточного графика:

$$\frac{P_{\text{max}}}{P_{\text{cp}}} = \frac{1}{k_3}.\tag{14}$$

или

$$\Delta P = P_{\text{max}} - P_{\text{cp}} = \frac{P_{\text{cp}}}{k_3} (1 - k_3).$$
 (15)

В зависимости от коэффициента заполнения k_3 суточного графика соотношения динамических, статических и полных потерь энергии в элементе представлены на рис.



Зависимость потерь энергии от коэффициента заполнения графика

График дает представление о потенциале и практической возможности снижения динамической составляющей нагрузочных потерь при полной стабилизации нагрузки элемента сети и может использоваться в случае частичной стабилизации нагрузки с увеличением коэффициента заполнения графика нагрузки.

При передаче по элементу сети в i-й промежуток времени реактивной мощности Q_i нагрузочные потери энергии в нем составляют величину, определяемую по формуле

$$\Delta W = \frac{R \cdot \Delta t}{U_{\rm cp}^2} \sum_{i=1}^n Q_i^2, \tag{16}$$

которая идентична формуле (2) для потерь при передаче активной энергии. Поэтому минимум потерь активной энергии методом стабилизации также достигается при передаче реактивной или полной мощности.

Количественная оценка потенциала снижения потерь активной энергии и потерь активной мощности в элементах и частях электрической сети за счет исключения динамической составляющей потерь энергии методом стабилизации нагрузки легко получается по формулам (12), (13) с использованием коэффициентов заполнения суточных графиков нагрузки k_3 , имеющихся в литературе [1, 4]. Такие оценки приведены в табл.

Выводы

- 1. Нагрузочные потери энергии на элементе сети с активным сопротивлением разделяются на две составляющие статическую и динамическую, зависящие от различных влияющих на них параметров. Динамическая составляющая потеры энергии зависит от суммы квадратов отклонения текущих значений нагрузки от ее среднего значения.
- 2. Нагрузочные потери электрической энергии в элементе электрической сети достигают условного минимума при полной стабилизации графика нагрузки на уровне среднего значения нагрузки за рассматриваемый период за счет снижения до нуля их динамической составляющей.
- 3. Стабилизация нагрузки одновременно приводит к максимальному снижению требующейся расчетной нагрузки и минимуму потерь активной энергии при передаче реактивной и полной.

Количественные оценки динамической составляющей потерь активной энергии

| Графики | Литера- | Коэф. | Коэф. | Стати- | Динами- | Снижение | Снижение |
|--------------|----------|----------|--------------|-------------|---------|-----------|-----------|
| нагрузки | турный | запол- | формы | ческие | ческие | полных | расчетной |
| потребителей | источник | нения | k_{Φ}^2 | потери | потери, | потерь, | мощности, |
| | | k_3 | Ŧ | $\Delta,\%$ | % | разы | разы |
| Энерго- | [3] | 0,7-0,77 | 1,14-1,16 | 86-88 | 12–14 | 1,13-1,16 | 1,33-1,43 |
| система | | | | | | | |
| региона | | | | | | | |
| Жилые | [6] | 0,4 | 1,5 | 67 | 33 | 1,5 | 2,5 |
| дома с | | | | | | | |
| газовыми и | | | | | | | |
| дровяными | | | | | | | |
| плитами | | | | | | | |
| летом | | | | | | | |
| ЛЭП | [5] | 0,3 | 1,78 | 56 | 44 | 1,8 | 3,33 |
| 0,4 кВ | | | | | | | |
| Отдельные | *) | 0,07-0,2 | 2,33-5,4 | 18,5-43 | 57-81,5 | 2,3-5,4 | 5-14,3 |
| городские | | | · | | | | · |
| квартиры | | | | | | | |

^{*) –} данные получены по результатам натурных наблюдений студентов в г. Петрозаводске.

Литература

- 1. Железко Ю. С., Артемьев А. В., Савченко О. В. Расчет, анализ и нормирование потерь энергии в электрических сетях: Руководство для практических расчетов. М.: Издательство НЦ ЭНАС, 2006. 280 с.
- 2. *Макаров А. А.* Научно-технологические прогнозы и проблемы развития энергетики России до 2030 г. Вестник РАН, 2009. Т. 79, № 3, С. 206–215.
- 3. Родионов В. Г. Энергетика: проблемы настоящего и возможности будущего. М.: ЭНАС, 2010. 352 с.
- 4. Справочник по электроснабжению и электрооборудованию / Под общ. ред. А. А. Федорова. Т. 2. М.: Энергоатомиздат, 1987. 592 с.
- 5. Фихтенгольц Γ . M. Основы математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1968. 463 с.
- 6. Энергетика и геополитика / Под. ред В. В. Костюка, А. А. Макарова. Российская академия наук. М.: Наука, 2011. 397 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Борисов Георгий Александрович

старший научный сотрудник, к. т. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: borisov@krc.karelia.ru тел.: (8142) 766312

Тихомирова Тамара Петровна

ученый секретарь, к. т. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: tihomiro@krc.karelia.ru тел.: (8142) 785520

Borisov, Georgy

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: borisov@krc.karelia.ru tel.: (8142) 766312

Tikhomirova, Tamara

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: tihomiro@krc.karelia.ru tel.: (8142) 785520 УДК 519.25

АВТОМАТИЧЕСКАЯ КАЛИБРОВКА ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ КАРТЫ СИЛ СИГНАЛОВ

Р. В. Воронов¹, О. В. Лукашенко², А. П. Мощевикин^{1,3}

Для определения местоположения объекта в закрытых помещениях часто используют локальные системы позиционирования, основанные на методе построения шаблонов карт слышимости от нескольких базовых радиостанций (fingerprinting technique). Для создания этих шаблонов необходимо провести ряд замеров силы сигнала во многих точках здания. Изменение окружающей обстановки (перестановка мебели, движущиеся объекты, изменение положения антенн и пр.) значительно ухудшает точность локации. В статье предложен способ автоматической рекалибрации системы расчетов локации при изменении внешних условий. Таким образом, для учета изменений нет необходимости проводить повторную процедуру обучения системы.

Ключевые слова: локальные системы позиционирования, локация, базовая станция, сила сигнала.

R. V. Voronov, O. V. Lukashenko, A. P. Moschevikin. AUTOMATIC RECALIBRATION OF A LOCAL POSITIONING SYSTEM BASED ON THE FINGERPRINTING TECHNIQUE

Local positioning systems based on the fingerprinting technique are widely used for localization indoors. This technique requires preliminary measurements of the received radio signal strength in many points inside a building. The changes in surroundings (rearrangement of furniture, changing antenna orientation, blocking of line-of-sight by large moving objects, etc.) substantially decrease the localization accuracy. This paper discusses the proposed method of the automatic recalibration of the position calculation system in case of changes in the environment. Thus it is not necessary to carry out additional measurements in order to consider these changes.

Key words: local positioning systems, location, base station, signal strength.

Введение

Известно, что спутниковые системы навигации невозможно использовать в закрытых пространствах: в зданиях, шахтах и т. д. В таких случаях разрабатываются специальные

системы локации на основе беспроводных сетей датчиков. При этом для определения местоположения мобильных объектов используют различные методы, в том числе основанные на определении мощности входного сигна-

¹ Петрозаводский государственный университет

²Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

³ ЗАО «РТЛ-Сервис»

ла [4, 5]. В помещении устанавливаются стационарные базовые станции сети, каждая из которых имеет свою зону покрытия. Для создания подобных систем используют беспроводные технологии локальных сетей WiFi, ZigBee, nanoLOC, UWB, Bluetooth и др.

Под локацией понимают определение местоположения каких-либо объектов. Необходимым условием для расчета локации является предварительная настройка устанавливаемой системы — разбиение пространства помещения на зоны и определение для каждой из них сил принимаемых сигналов от базовых станций. Обычно зона не превышает размеров комнаты (иногда в комнатах можно выделить несколько зон). Для каждой зоны заранее формируется набор средних значений сил сигнала от базовых станций (шаблоны слышимости). Когда мобильный объект в очередной раз выходит в эфир, его сигнал регистрируется всеми базовыми станциями в пределах слышимости. Этот набор сил сигналов сравнивается с заранее полученными шаблонами. В качестве искомой зоны локации выбирается зона с тем шаблоном, который наилучшим образом совпадает с зарегистрированным набором сил сигналов [4–6].

Необходимо отметить, что сила сигнала на приемной стороне является дискретной величиной, поскольку радиопередача осуществляется в цифровой форме, и входной сигнал регистрируется, например, с использованием аналого-цифровых преобразователей или управляемых автоматических регуляторов усиления.

Пусть N — число точек (или зон) пространства, в которых может находиться мобильный объект, D — число базовых станций. Множество сил сигналов от базовых станций является дискретным. Тогда в ходе настройки системы необходимо для каждой базовой станции d определить вероятности $p_d(x|j)$ того, что будет зафиксирована сила сигнала x при условии нахождения мобильного объекта в зоне $j=1,\ldots,N$.

В ходе эксплуатации системы местоположение мобильного объекта определяется следующим образом. Пусть p_j — априорная вероятность нахождения объекта в точке j ($j=1,\ldots,N$). Предположим, что зарегистрирован вектор сил сигнала $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_D)$, где x_d — сила сигнала базовой станции d. Тогда апостериорная вероятность q_j нахождения объекта в точке j равна

$$q_{j} = \frac{p_{j} \prod_{d=1}^{D} p_{d}(x_{d}|j)}{\sum_{k=1}^{N} p_{k} \prod_{d=1}^{D} p_{d}(x_{d}|k)}.$$
 (1)

Поскольку сила сигнала на приемной стороне сильно зависит от числа отражений, величины и формы препятствий по пути распространения электромагнитной волны, любые изменения в помещении (перестановка мебели, изменение ориентации антенн базовых станций и т. д.) приводят к необходимости заново настраивать систему.

Кроме этого, в ходе инсталляции системы позиционирования всегда стараются уменьшить количество используемых базовых станций с целью минимизации стоимости оборудования. Поэтому зачастую используют следующий итерационный сценарий. Сначала устанавливают «узловые» базовые станции в расчетных зонах здания, обучают систему, строят шаблоны и карты слышимости, а затем по мере необходимости в разных частях здания добавляют еще несколько станций, улучшая точность локации в этих зонах. Поскольку процесс обучения системы занимает достаточно много времени, в некоторых случаях его можно заменить автоматической процедурой формирования новых шаблонов сил сигнала в новых зонах или от ранее не использованных базовых станций. Понятно, что эффективность автоматической конфигурации зависит от плотности расположения базовых станций, т. е. от фактора пересечения зон радиопокрытия разных базовых станций.

В данной статье предлагается подход, позволяющий произвести автоматическую перенастройку системы. Подход основан на оценке неизвестных параметров распределения мощности сигнала в ходе эксплуатации системы. Такая перенастройка может быть осуществлена в случаях:

- добавления новых базовых станций;
- изменения конфигурации помещения;
- добавления новых зон, которые ранее не были нанесены на карту;
- изменения условий работы базовой станции (наклон антенны и прочее).

Модель потерь мощности сигнала в эфире

В большинстве работ [7–9], в которых рассматривается процесс распространения электромагнитных волн для диапазона частот выше $1~\Gamma\Gamma$ ц, приводится следующая модель затухания:

$$PL(s) = \left[PL_0 + 10\gamma \lg\left(\frac{s}{s_0}\right)\right] + \zeta, \ s \geqslant s_0, \quad (2)$$

где PL(s) – потеря мощности сигнала между передатчиком и приемником (path loss), выраженная в децибелах. Слагаемое в квадратных скобках описывает детерминированную составляющую потерь, зависящую от расстояния s между радиоустройствами, а ζ – случайная компонента. PL_0 – это потеря мощности на заранее известном расстоянии s_0 , например, в 1 м. Характер зависимости уменьшения мощности сигнала с увеличением расстояния зависит от значения показателя γ , связанного с особенностями окружения. Например, для офисных помещений γ может изменяться от значения 1,7 для условий прямой видимости (LOS, Line-of-Sight) между передатчиком и приемником до значений 3,5 и выше для условий отсутствия прямой видимости (NLOS, Non-Line-of-Sight) [7]. Некоторые исследователи вводят в модель параметры, отвечающие за число стен, встречающихся на пути распространения сигнала, их толщину и материал |11|.

Вторая компонента в формуле (2) описывает изменчивость локальных условий на стороне приемника радиосигнала. Она включает в себя учет множественных путей распространения электромагнитных волн, огибания ими препятствия, интерференционного сложения фаз и амплитуд. ζ зависит от конфигурации помещений и расположения объектов и помех на пути распространения волны, ориентации и диаграммы направленности антенны, размера антенны, степени поляризации излучения и др. Компонента ζ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Часто предполагается, что ζ – случайная величина, имеющая нормальное распределение $N(0,\sigma)$ с нулевым математическим ожиданием и некоторым стандартным отклонением σ [7-9].

Содержательно формула (2) показывает, что потеря мощности сигнала (а значит, и сама мощность сигнала на принимающей стороне) может моделироваться как нормальная случайная величина $N(a,\sigma)$, где параметры $a,\sigma>0$.

На рисунке в качестве иллюстрации величины потерь мощности сигнала внутри помещений приведена карта слышимости одной точки доступа в технологии RealTrac [2, 3, 10]. Числа в квадратах обозначают потери мощности сигнала, выраженные в децибелах. Местоположение стационарного устройства А590 обозначено темным квадратом с перекрестием внутри. Мощность выходного сигнала точки доступа равнялась 20 дБм (100 мВт). Числа внутри ячеек метровой длины соответствуют средним потерям сигнала в децибелах. Например, для числа 64 (желтая ячейка), соответствующего уровню потерь в эфире PL =64 дБм, зарегистрированная сила входного сигнала на мобильном радиоузле, находящемся в данном квадрате, равнялась -44 д $B_{\rm M}$.

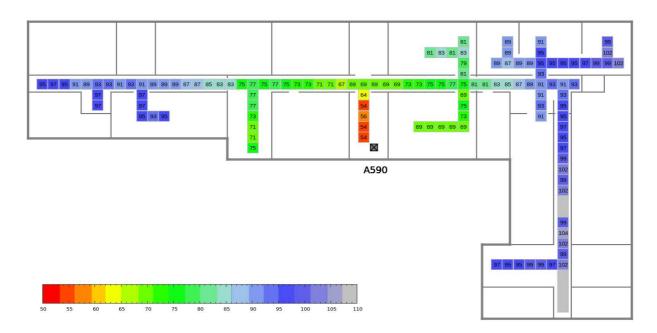
Приведенная карта радиопокрытия также подтверждает возможность расчета локации на основе силы входного сигнала. Если зарегистрированное значение потерь в эфире от точки доступа А590 оказалось, скажем, около 80 дБм, то набор вероятных мест нахождения объекта резко уменьшается (это либо небольшая часть длинного коридора, либо одна из комнат). Если на одном этаже установлено 3–5 таких точек доступа, то достаточно легко добиться точности локации на уровне комнаты (room level).

МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОЙ КАЛИБРОВКИ СИСТЕМЫ ЛОКАЦИИ

Рассмотрим случай, когда имеется некоторое множество базовых станций, для которых известны распределения вероятностей силсигнала в каждой зоне пространства. Тем самым мы имеем возможность определять вероятность нахождения объекта в определенной зоне

Пусть добавляется еще одна базовая станция, для которой нам не известны распределения вероятностей сил сигнала в зонах. Периодически мобильный узел выходит в эфир и точки доступа регистрируют силу входного сигнала. Для простоты предположим, что сила входного сигнала от новой базовой станции во время і-го по счету измерения является непрерывной случайной величиной X_i с плотностью $p_i(x)$. Таким образом, предполагается, что мобильный объект меняет свое местоположение от измерения к измерению, причем в момент регистрации измерения местоположение объекта неизвестно.

Проводится M независимых измерений, в результате которых сила сигнала приняла значения x_1, \ldots, x_M . Таким образом, значение x_i



Карта слышимости устройства A590. Числа внутри ячеек метровой длины соответствуют средним потерям сигнала в децибелах

– это реализация случайной величины X_i , i=1,...,M.

В соответствии с моделью (2) предполагается, что условная плотность распределения силы сигнала в зоне j равна

$$p(x|j;a_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a_j)^2}{2\sigma^2}\right), \ j = 1,\dots, N,$$
(3)

где параметр σ является известным и одинаковым для всех зон j=1,...,N. Параметры a_j условные математические ожидания значений сил сигнала в зонах j=1,...,N неизвестны. Требуется найти их точечные оценки.

Для удобства введем обозначения $\bar{x} = (x_1, \dots, x_M)$ и $\bar{a} = (a_1, \dots, a_N)$.

Пусть q_{ij} — известные вероятности нахождения объекта в точке j в момент регистрации i-го измерения. Вероятности q_{ij} могут быть рассчитаны по формулам (1) теми базовыми станциями, для которых имеются готовые карты сил сигналов, либо иным способом. По формуле полной вероятности для плотности распределения $p_i(x)$ силы сигнала в момент измерения i справедливо следующее выражение:

$$p_i(x) = \sum_{j=1}^{N} p(x|j; a_j) q_{ij}.$$

Будем искать оценки параметров a_j с помощью метода максимального правдоподобия.

Запишем функцию правдоподобия для измерений x_1, \ldots, x_M :

$$L(\bar{x}; \bar{a}) = \prod_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} p(x_i|j; a_j) q_{ij}.$$
 (4)

Строго говоря, функция (4) не является классической функцией правдоподобия, так как содержит плотности вероятностей различных распределений. Но если q_{ij} не будут зависеть от i, то есть $q_{ij} = q_j$ для всех i = 1, ..., M, то (4) является функцией правдоподобия.

Для получения точечных оценок параметров \bar{a} найдем максимум этой функции. Удобнее это сделать при помощи поиска максимума логарифмической функции правдоподобия:

$$\ln L(\bar{x}; \bar{a}) = \sum_{i=1}^{M} \ln \left(\sum_{j=1}^{N} p(x_i|j; a_j) q_{ij} \right).$$

Частные производные по a_k логарифмической функции правдоподобия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \ln L(\bar{x}; \bar{a})}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma^2} c_{ik}(\bar{a})(x_i - a_k), \ k = 1, \dots, N,$$
(5)

где

$$c_{ik}(\bar{a}) = \frac{\exp\left(-\frac{(x_i - a_k)^2}{2\sigma^2}\right) q_{ik}}{\sum_{i=1}^{N} \exp\left(-\frac{(x_i - a_j)^2}{2\sigma^2}\right) q_{ij}}.$$
 (6)

Величины $c_{ik}(\bar{a})$ в дискретном случае имеют смысл вероятностей нахождения объекта в точке k при условии регистрации измерения x_i .

Приравняв к нулю производные, получим систему уравнений:

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^{M} c_{ik}(\bar{a}) x_i}{\sum_{i=1}^{M} c_{ik}(\bar{a})}, \qquad k = 1, \dots, N.$$

Обозначим

$$\gamma_{ik}(\bar{a}) = \frac{c_{ik}(\bar{a})}{\sum\limits_{l=1}^{M} c_{lk}(\bar{a})}.$$

При фиксированных значениях i и k величина γ_{ik} может быть проинтерпретирована как вес i-го измерения по отношению к зоне k. Тогда

$$a_k = \sum_{i=1}^{M} \gamma_{ik}(\bar{a}) x_i, \qquad k = 1, \dots, N.$$
 (7)

То есть математическое ожидание силы сигнала в точке k равно взвешенной сумме сил сигналов. Введем обозначения:

$$f_k(\bar{a}) = \sum_{i=1}^M \gamma_{ik}(\bar{a})x_i, \qquad k = 1, \dots, N,$$

$$f(\bar{a}) = (f_1(\bar{a}), \dots, f_N(\bar{a})).$$

В этих обозначениях система (7) запишется следующим образом:

$$\bar{a} = f(\bar{a}). \tag{8}$$

Для численного решения системы уравнений (8) будем использовать метод простых итераций [1]. Опишем итерационную процедуру:

$$\bar{a}^{(0)} = (0, \dots, 0),$$

$$\bar{a}^{(t+1)} = f(\bar{a}^{(t)}), \qquad t = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\bar{a}^{(t)}$ вычисляется до тех пор, пока $||\bar{a}^{(t)} - \bar{a}^{(t+1)}|| > \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Если в качестве начального приближения взять $\bar{a}^{(0)}=(0,\dots,0),$ то

$$a_k^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{M} q_{ik} x_i}{\sum_{i=1}^{M} q_{ik}},$$
(9)

что уже будет близко к решению уравнения (8).

Эксперименты

Для проверки адекватности предложенного подхода было проведено два вычислительных эксперимента. Первый заключался в имитации перемещения мобильного объекта по зонам помещения и программной генерации регистрируемых сил сигналов от базовых станций. Второй эксперимент проводился на реальных данных, собранных в ходе эксплуатации действующей системы локации.

Опишем имитационный эксперимент. Вначале необходимо было определить число зон N, число базовых станций D, число измерений M, выбрать значение среднеквадратического отклонения σ и условные математические ожидания a_{id} сил сигнала базовых станций $d=1,\ldots,D$ в зонах $j=1,\ldots,N.$ Все, кроме одной, базовые станции использовались для определения локации мобильного объекта, после чего для последней базовой станции строилась карта зон видимости. В ходе эксперимента для каждого из измерений i = 1, ..., Mслучайным образом выбиралась зона j и для всех базовых станций $d = 1, \dots, D$ программно генерировались силы сигнала x_{id} как реализации нормально распределенных случайных величин с математическими ожиданиями a_{id} и среднеквадратическим отклонением σ . На основе значений x_{id} от всех, кроме одной, базовых станций $d=1,\ldots,D-1$ по формуле (1) вычислялись вероятности q_{ij} нахождения мобильного объекта в зонах в момент i-го измерения. После имитации всех измерений с помощью предложенного в статье алгоритма вычислялись оценки математических ожиданий a_i сил сигнала для последней базовой (d=D)станции во всех зонах $j=1,\ldots,N$. Найденные значения a_j сравнивались с a_{jD} при помощи метрики $\Delta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |a_j - a_{jD}|.$ При реализации имитационного экспери-

При реализации имитационного эксперимента были использованы следующие значения параметров: число зон N=10, число базовых станций D=5. Для каждой из пяти базовых станций (б. с.) для каждой зоны бы-

ли назначены значения математических ожиданий сил сигнала a_{id} (см. табл. 1).

 ${\it Таблица} \ {\it 1.}\ {\it H}$ азначенные значения параметров a_{id}

| б. с. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|----|----|----|----|----|
| 1 | 50 | 43 | 40 | 38 | 35 |
| 2 | 48 | 45 | 41 | 39 | 36 |
| 3 | 45 | 52 | 44 | 40 | 37 |
| 4 | 41 | 51 | 48 | 42 | 38 |
| 5 | 40 | 43 | 50 | 43 | 39 |
| 6 | 39 | 42 | 55 | 49 | 40 |
| 7 | 38 | 39 | 57 | 50 | 42 |
| 8 | 37 | 38 | 45 | 47 | 44 |
| 9 | 36 | 35 | 41 | 45 | 48 |
| 10 | 35 | 35 | 39 | 42 | 52 |

Вычисления проводились для различных значений M и σ . В табл. 2 представлена зависимость Δ от M и σ .

Tаблица 2. Вычисленные значения Δ

| σ M | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 |
|--------------|------|------|------|------|------|------|
| 0,5 | 0,29 | 0,55 | 0,48 | 0,41 | 0,46 | 0,53 |
| 1 | 0,87 | 0,66 | 0,59 | 0,5 | 0,54 | 0,48 |
| 1,5 | 1,25 | 0,7 | 0,72 | 0,65 | 0,6 | 0,53 |
| 2 | 1,24 | 1 | 0,87 | 0,77 | 0,7 | 0,5 |
| 2,5 | 1,94 | 0,87 | 1,08 | 1,34 | 0,91 | 0,91 |
| 3 | 2,1 | 1,14 | 1,17 | 1,3 | 0,78 | 1,02 |

Была отмечена быстрая сходимость алгоритма, что дает основание использовать в качестве приближенного значения для a_j формулу (9).

Теперь опишем эксперимент, проведенный на реальных данных. В помещении ІТ-парка Петрозаводского государственного университета было выделено 100 зон (N=100) и задействовано 6 базовых станций (D=6). Для определения оценок математических ожиданий a_{jd} сил сигнала базовых станций $d=1,\ldots,D$ было проведено по 80 замеров в каждой зоне $j=1,\ldots,N$.

После этого в каждой зоне было проведено по 10 измерений (M=1000). Используя данные от первых пяти базовых станций, по формуле (1) в момент каждого измерения i вычислялись вероятности q_{ij} нахождения объекта в зонах $j=1,\ldots,N$. Затем с использованием предложенного алгоритма вычислялись оценки математических ожиданий a_j в зонах $j=1,\ldots,N$ для шестой базовой станции. Параметр σ был равен трем. Найденные значе-

ния a_j сравнивались с a_{jD} при помощи метрики $\Delta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |a_j - a_{jD}|$. Итоги эксперимента таковы. Значение $\Delta = 1, 2$, число зон с различным значением $|a_j - a_{jD}|$ представлено в табл. 3.

 ${\it Tаблица}\ 3.\ {\it Число}\ {\it зон}\ {\it c}\ {\it pазличным}\ {\it значением}\ |a_i-a_{iD}|$

| $a_j - a_{Dj}$ | число зон |
|----------------|--------------|
| [0-1) | 56 |
| [1-2) | 28 |
| [2-3) | 9 |
| [3-4) | 4 |
| >4 | 3 |

Заключение

В статье рассмотрена задача автоматической рекалибрации системы расчетов локации при изменении внешних условий. Предложен способ оценки неизвестных параметров распределения мощности сигнала в ходе эксплуатации системы. По мнению авторов, результаты экспериментов позволяют считать, что предложенный метод может быть использован на практике.

Исследования проводились в рамках деятельности МИП ООО «Наносети» и ЗАО «РТЛ-Сервис», а также поддерживались Петрозаводским государственным университетом (Программа стратегического развития ПетрГУ на 2012—2016 гг.), Министерством образования и науки РФ (гос. контракт 14.ВВВ.21.0162), Фондом СР МФП в НТС, Американским фондом гражданских исследований и развития (CRDF) и Министерством экономического развития Республики Карелия.

Литература

- 1. $\it Kanumкuh H. H. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.$
- 2. Мощевикин А. П., Галов А. С., Волков А. С. Локация в беспроводных сетях датчиков стандарта nanoLOC // Информационные технологии. 2011. № 8. С. 43–47.
- 3. Мощевикин А. П., Галов А. С., Волков А. С. Точность расчета локации в беспроводных сетях датчиков стандарта nanoLOC // Информационные технологии. 2012. № 9. С. 37–41.

- 4. Chandrasekaran G., Ergin M., Yang J., Liu S., Chen Y., Gruteser M., Martin R. Empirical Evaluation of the Limits on Localization Using Signal Strength: Beyond Cramer-Rao Bounds // Proceedings of IEEE SECON. 2009. P. 1–9.
- 5. Elnahrawy E., Li X., Martin R. The Limits of Localization Using Signal Strength: A Comparative Study // Proceedings of IEEE SECON. 2004. P. 406–414.
- 6. Galov A., Moschevikin A., Voronov R. Combination of RSS localization and ToF ranging for increasing positioning accuracy indoors // Proceedings of the 11th International Conference on ITS Telecommunications (ITST). 2011. P. 299–304
- 7. Ghassemzadeh S. S., Jana R., Rice C. W., Turin W., Tarokh V. Measurement and modeling of an ultra-wide bandwidth indoor channel // IEEE Tran. Commun. 2004. Vol. 52. P. 1786–1796.

- 8. Molisch A.F., Balakrishnan K., Chong C. C., Emami S., Fort A., Karedal J., Kunisch J., Schantz H., Schuster U., Siwiak K. IEEE 802.15.4a ChannelModel FinalReport, Tech. Rep., Document IEEE 802.1504-0062-02-004a, 2005.
- 9. Molisch A. F. Ultrawideband Propagation Channels Theory, Measurement, and Modeling // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2005. Vol. 54, No. 5. P. 1528–1545.
- 10. Moschevikin A., Galov A., Soloviev A., Mikov A., Volkov A., Reginya S. Realtrac technology overview // EvAAL 2013, Communications in Computer and Information Science series CCIS. 2013. Vol. 386, P. 60—71.
- 11. Osama W. Ata, Ala'Eddin M. Shahateet, Mutaz I. Jawadeh, Adnan I. Amro. An Indoor Propagation Model Based on a Novel Multi Wall Attenuation Loss Formula at Frequencies 900 MHz and 2.4 GHz // Wireless Personal Communications. 2013. Vol. 69, Issue 1. P. 23–36.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Воронов Роман Владимирович

доцент, к. т. н. Петрозаводский государственный университет, математический факультет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: rvoronov76@gmail.com тел.: (8142) 711068

Лукашенко Олег Викторович

младший научный сотрудник, к. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: lukashenko-oleg@mail.ru тел.: (8142) 763370

Мощевикин Алексей Петрович

доцент, к. ф.-м. н. Петрозаводский государственный университет, физико-технический факультет ул. Университетская, 10а, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: alexmou@rtlservice.com тел.: (8142) 719671

Voronov, Roman

Petrozavodsk State University, Faculty of Mathematics 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: rvoronov76@gmail.com tel.: (8142) 711068

Lukashenko, Oleg

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: lukashenko-oleg@mail.ru tel.: (8142) 763370

Moschevikin, Alexey

Petrozavodsk State University, Faculty of Physical Engineering 10A Universitetskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: alexmou@rtlservice.com tel.: (8142) 713237 УДК 517.977

ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

М. Е. Галахова¹, А. Н. Кириллов²

¹ Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров ² Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассмотрены задачи управления экономическими динамическими системами со структурными изменениями. Предлагается модель производственного объединения с переменным количеством входящих в него однородных предприятий. Строится управление в виде кредитной функции, обеспечивающей экономический рост к заданному уровню.

К лючевые слова: динамическая экономическая система, переменная структура, управление.

M. E. Galakhova, A. N. Kirillov. THE DYNAMICS OF ECONOMIC GROWTH WITH STRUCTURAL ALTERATIONS

The problems of variable structure dynamical economic systems control are considered. The economic association model consisting of variable number of homogeneous enterprizes is proposed. The control credit function, providing the economic growth to a certain given level, is constructed.

Key words: dynamical economic system, variable structure, control.

Введение

В [1, 2] был предложен подход для описания динамики структурных изменений в системе S; в ее состав могут входить подсистемы S_i , количество которых k(t) в момент времени t изменяется в процессе функционирования S, $k(t) \in \{1,...,n\}$. Подсистемы S_i могут подключаться к S или отключаться от нее. При этом подсистемы, входящие в S, взаимодействуют между собой. Введем вектор $\gamma(t) = (\gamma_1,...,\gamma_n)$, где $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S, $\gamma_i(t) = 0$ – в противном случае. Вектор $\gamma(t)$ можно назвать внешней структурой системы S. Для задания динами-

ки структуры вводится понятие эволюционного времени $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$, описываемого дополнительной динамической системой. При достижении переменной $y_i(t)$ порогового значения происходит отключение или подключение подсистемы S_i к системе S. Тем самым система переходит в другое фазовое пространство, возможно, не мгновенно, а через некоторое время. Если допустимы только структуры вида $\gamma = (1, ..., 1, 0, ..., 0)$, где первые kкомпонент вектора γ равны 1, а остальные – 0, и переход между структурами происходит добавлением (k+1)-й единицы или исключением k-й единицы, то система S называется последовательной системой со структурными изменениями (ССИ). Если возможны произвольные структуры и переходы между ними, то S называется параллельной ССИ.

В настоящей работе предложенный подход к моделированию динамики систем со структурными изменениями применяется к некоторым задачам управляемой экономической динамики, в которых структура зависит от эффективности экономической системы.

Описание модели

Рассмотрим некоторую экономическую систему, изменение структуры которой происходит согласно правилам, устанавливаемым управляющим органом. Конкретизируем систему как производственное объединение (ПО), в состав которого входят предприятия, выпускающие однородную продукцию. Пусть $x_i(t)$ – количественная характеристика состояния i-го предприятия в момент времени t, $x_i(t) \geqslant 0$. Вудем считать, что динамика предприятия задается уравнением

$$\dot{x}_i = \mu_i(t)x_i + w_i(x_i, t), \tag{1}$$

где $\mu_i(t)x_i, w_i(x_i,t)$ – скорости прироста инвестиций в предприятие i за счет его собственных средств и кредита банка соответственно; $\mu_i(t)$ – скорость прироста собственных средств, направляемых на инвестирование, на единицу объема продукции; $\mu_i(t), w_i(x_i,t)$ – кусочно-непрерывные неотрицательные функции. Уравнение (1) обобщает модель, построенную в [3]. Введем компоненты $y_i(t)$ эволюционного времени

$$y_i(t) = y_i(t_0) + \int_{t_0}^t (c_i - w_i)dt,$$
 (2)

где c_i — пороговые значения, t_0 — начальный момент времени. Переменную $y_i(t)$ будем называть эволюционным временем предприятия i. Значение $y_i(t)$ влияет на присутствие i-го предприятия в системе. Дифференцируя (2), получим

$$\dot{y}_i = c_i - w_i. \tag{3}$$

Поясним смысл эволюционного времени. Введем постоянные пороги $q_i, i=1,...,n$. Пусть для некоторого $r\in\{1,...,n\}$ найдется наименьший момент времени t_r , такой что $y_r(t_r)=q_r$ при условии, что $y(t)>q_r$ при $t\in[t_0,t_r)$. Тогда в момент времени t_r происходит закрытие r-го предприятия. Экономический смысл предложенной процедуры состоит в следующем. Эффективно работающее предприятие должно в большей степени развиваться не за счет кредитов, а за счет собственных средств. Превышение функцией

 $y_r(t)$ порогового значения означает, что r-е предприятие набирает слишком много кредитов, которые придется погашать, используя собственные средства. Это является признаком неэффективной деятельности, что приводит к принятию органом управления решения о закрытии (или приостановке работы) предприятия. Возникает вопрос: когда закрывать предприятие? Если произвести закрытие в момент достижения кредитной функцией $w_r(x_r(t_r), t_r)$ некоторого порогового значения, то процесс закрытия станет слишком чувствительным, реагируя на мгновенные сбои в работе предприятия, приводящие к малозначительным снижениям его эффективности. Для органа управления желательно некоторое время наблюдать за деятельностью предприятия, прежде чем принимать решение. Наличие интеграла в условии закрытия, $y_r(t_r) = q_r$, придает некоторую инерционность в принятии решения о закрытии предприятия, что дает последнему возможность отработать временные сбои. Напротив, если низкая эффективность его работы, что проявляется в выполнении условия $w_r > c_r$, наблюдается в течение достаточно длительного промежутка времени, то орган управления закрывает r-е предприятие в момент времени t_r . После закрытия r-го предприятия динамика ПО, состоящего теперь из (n-1)-го активного предприятия, задается уравнениями (1),(3), где $i \neq r$, а r-е предприятие переходит в пассивный режим, которому соответствует система уравнений

$$\dot{x}_r = -p_r(t)x_r, \ x_r > 0, \quad \dot{x}_r = 0, \ x_r = 0,$$
 (4)

$$\dot{y}_r = c_r,\tag{5}$$

где $p_r(t) > 0$. Теперь рассмотрим процедуру возобновления работы предприятия r. Пусть $y_r(t) < q_r$ на интервале (t_r, \bar{t}_r) и $y_r(\bar{t}_r) = q_r$. Тогда в момент времени \bar{t}_r орган управления переводит предприятие из пассивного в активный режим, и его динамика задается уравнениями (1),(3). При этом $x_r(\bar{t}_r) = x_r(\bar{t}_r + 0) = \bar{x}_r, \ y_r(\bar{t}_r + 0) = q_r + \delta_r$, где \bar{x}_r, δ_r – заданные положительные постоянные. Наличие постоянной δ_r приводит к скачкообразному изменению $y_r(t)$ при достижении ею порогового значения q_r . Это значит, что предприятие получает начальный кредит на развитие, иначе может оказаться, что сразу после открытия его придется закрывать.

Замечание 1. Можно рассмотреть процедуру открытия нового предприятия, а не ранее замороженного. Будем, например, считать, что ПО расширяется, открывая новое предприятие в момент достижения всеми предпри-

ятиями, входящим в него, некоторых заданных уровней развития e_i . Пусть \widetilde{t} – наименьший момент времени, для которого выполняются условия $y_i \geqslant e_i, \ i=1,...,n,$ причем при $t<\widetilde{t}$ хотя бы одно из этих неравенств не выполняется. Тогда в момент времени \widetilde{t} орган управления ПО открывает (n+1)-е предприятие, динамика которого задается уравнениями $(1),\ (3),\ i=n+1,\$ и при этом $x_{n+1}(\widetilde{t})=\widetilde{x}_{n+1},\ y_{n+1}(\widetilde{t})=\widetilde{y}_{n+1},\ \widetilde{x}_{n+1},\widetilde{y}_{n+1}-$ заданные постоянные, причем $d_{n+1}<\widetilde{y}_{n+1}< e_{n+1},\ y_i(\widetilde{t}+0)=e_i+\delta_i\ i=1,...,n,$ где $\widetilde{\delta}_i-$ заданные положительные постоянные.

Задачи управления экономическим развитием

Рассмотрим задачу управления ПО с целью достижения предприятиями заданных уровней развития к заданному моменту времени. Назовем ее задачей развития ПО. Обозначим k(t) количество активных предприятий, входящих в ΠO в момент времени t. Пусть $k(t_0) =$ n и динамика ΠO задается системой уравнений (1), (3). Будем считать постоянными пороги c_i и коэффициенты μ_i . В качестве управляющих воздействий рассмотрим кредитные функции $w_1, ..., w_n$, которые будем полагать кусочно-постоянными. Введем вектор внешней структуры $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, где $\gamma_i = 1$, если предприятие i входит в состав ΠO , i = 0 в противном случае. Представим некоторые задачи управления.

Найти управление, переводящее систему (1), (3) из состояния $x(t_0)=x^0$ в состояние $x(t_0+T)=x^1$ при условии

a. $k(t) = n, \ t \in [t_0, t_0 + T],$ 6. $k(t_0) = k(t_0 + T) = n,$

B. $k(t_0) = k(t_0 + T) = n$, B. $k(t_0) = n$, $k(t_0 + T) > 0$.

Отметим, что задача 16 решена в [4]. В задачах 16 и 1в количество предприятий переменно, что соответствует переменной размерности динамической системы, моделирующей процесс развития Π O. На промежутке управления $[t_0, t_0 + T]$ некоторые предприятия могут переходить в пассивный режим и возобновлять свою деятельность. Перевод предприятия в пассивный режим можно назвать его замораживанием.

Перейдем теперь к задачам управления без замораживания, но с закрытием нерентабельных и открытием новых предприятий. Построение соответствующей модели будет основано на понятии последовательной системы со структурными изменениями. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность положительных действительных чисел

 $d_k, \ d_{k+1} > d_k, \ k = 1, 2,$ Пусть динамика ПО задается уравнениями

$$\dot{x}_i = a_i \mu_i x_i + a_i w_i, \ i = 1, ..., m, \tag{6}$$

а динамика эволюционного времени y(t) уравнением

$$\dot{y} = c - \sum_{i=1}^{m} b_i w_i \tag{7}$$

на том промежутке времени, для которого выполнено условие $d_m < y < d_{m+1}$. Здесь a_i, b_i, c – положительные постоянные, управления $w_i(t) \geqslant 0$ кусочно-постоянны.

Процесс закрытия предприятия происходит в тот момент времени t^- , в который $y(t^{-}) = d_m$ при условии, что $y(t) \in (d_m, d_{m+1})$ при $t \in (t^{-} - \delta, t^{-})$ для некоторого $\delta > 0$. Закрывается предприятие с номером j, для которого наименьшее значение принимает величина $x_i(t^-)$. Можно рассмотреть и другие сценарии выбора предприятия для закрытия. При этом переменная у совершает скачок на уровень $y(t^- + 0) = d_m - \delta_m$, где заданная положительная постоянная δ_m такова, что $d_{m-1} <$ $d_m - \delta_m$. После этого предприятия перенумеруются так, что номера 1,...,j-1 остаются прежними, а номера j + 1, ..., m переходят в j, ..., m-1 соответственно. Динамика ПО при $t > t^-$ задается системой

$$\dot{x}_i = a_i \mu_i x_i + a_i w_i, \ i = 1, ..., m - 1,$$
 (8)

$$\dot{y} = c - \sum_{i=1}^{m-1} b_i w_i \tag{9}$$

при условии $d_m < y < d_{m+1}$.

Процесс открытия предприятия происходит в тот момент времени t^+ , в который $y(t^+)=d_{m+1}$ при условии $y(t)\in (d_m,d_{m+1})$ при $t\in (t^+-\widetilde{\delta},t^+)$ для некоторого $\widetilde{\delta}>0$. Открывается предприятие с номером m+1 с начальным условием $x_{m+1}(t^+)=x_{m+1}^+$, где x_{m+1}^+ — заданная положительная постоянная. При этом переменная y совершает скачок на уровень $y(t^++0)=d_{m+1}+\widetilde{\delta}^+$, где $0<\widetilde{\delta}^+< d_{m+2}-d_{m+1}$. Динамика ПО при $t>t^+$ задается системой

$$\dot{x}_i = a_i \mu_i x_i + a_i w_i, \ i = 1, ..., m + 1,$$
 (10)

$$\dot{y} = c - \sum_{i=1}^{m+1} b_i w_i \tag{11}$$

при условии $d_{m+1} < y < d_{m+2}$.

Поясним смысл процессов закрытия-открытия предприятий. Переменная

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (c - \sum_{i=1}^{k(\tau)} b_i w_i(\tau)) d\tau$$
 (12)

характеризует интегрированную активность кредитования предприятий ΠO в смысле отличия скорости суммарного объема кредитования $W(t) = \sum_{i=1}^{m+1} b_i w_i$ действующих предприятий ΠO от порогового значения c на промежутке $[t_0,t]$. В случае достаточно длительного превышения порогового значения величиной W(t), что означает малоэффективную работу ΠO , которое испытывает недостаток в собственных средствах для инвестирования в развитие, закрывается наименее успешное предприятие. В противном случае в составе ΠO открывается новое предприятие. Таким образом, происходит в некотором смысле реструктуризация ΠO .

Поставим следующую задачу управления: построить кусочно-постоянное управление $w=(w_1,...,w_{k(t)})$, переводящее ПО из заданного состояния $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ в момент времени t_0 в конечное состояние $x(t_0+T)\in X(t_0+T)\subset \mathbb{R}^{k(t_0+T)}$ такое, что

$$X(t_0+T) = \{x(t_0+T) : \sum_{i=1}^{k(t_0+T)} x_i(t_0+T) = \tilde{X}\},$$
(13)

где $\widetilde{X}-$ заданный суммарный объем производства в конечный момент времени. Рассмотрим сначала случай $k(t)\in\{1,2\}$ при $t\in[t_0,t_0+T],\ k(t_0)=1,$ т. е. количество предприятий не может превышать двух на промежутке управления. Тогда на некотором начальном промежутке времени динамика ПО задается системой уравнений

$$\dot{x}_1 = a_1 \mu_1 x_1 + a_1 w_1,\tag{14}$$

$$\dot{y} = c - b_1 w_1,\tag{15}$$

для которой $d_1 < y(t) < d_2$, при начальных условиях $y(t_0) = y_0, \ x_1(t_0) = x_1^0.$

Пусть управление, кредитная функция w_1 , ограничено сверху: $w_1\leqslant\overline{w}$. Это вполне естественное требование: кредит не может быть неограниченным. При этом предположим, что наибольшая возможная скорость роста \overline{w} кредитных поступлений \overline{w} недостаточна для достижения предприятием уровня \widetilde{X} в момент времени t_0+T . Это означает, что $x_1(t_0+T)<\widetilde{X}$ при $w_1=\overline{w}$, или, полагая $t_0=0$, получаем

$$(x_1^0 + \frac{\overline{w}}{\mu_1})e^{a_1\mu_1T} - \frac{\overline{w}}{\mu_1} < \widetilde{X}.$$
 (16)

При этом пусть при $w_1 = \overline{w}$ предприятие не закрывается и не открывается новое, т. е.

$$d_1 < y_0 + (c - b_1 \overline{w})t < d_2, \ t \in [0, T),$$
 (17)

причем $d_1 < y(T) < d_2$, $y(0) = y_0$. Последнее неравенство перепишем в виде

$$d_1 < y_0 + (c - b_1 \overline{w})T < d_2. \tag{18}$$

Предполагая выполнение (17), (18), мы хотим исследовать задачу управления, т. е. развития ПО, при недостатке ресурсов у одного предприятия. Тогда возникает вопрос: можно ли за счет открытия второго предприятия достичь заданного уровня в момент времени T, расширятся ли возможности управления при открытии второго предприятия? Дадим ответ на этот вопрос. Возьмем сначала значение кусочно-постоянного управления $w_1 = w_{11}$ таким, что

$$w_{11} < \max(\overline{w}, \frac{c}{b_1}). \tag{19}$$

Это условие позволяет обеспечить возрастание функции y(t) при допустимом управлении. Пусть найдется момент времени $t^+ \in (0,T)$ такой, что

$$y(t^+) = d_2,$$
 (20)

причем $d_1 < y(t) < d_2$, при $t \in [0, t^+)$. Условие (20) равносильно тому, что

$$y_0 + (c - b_1 \overline{w})t^+ = d_2,$$

откуда получаем

$$t^{+} = \frac{d_2 - y_0}{c - b_1 w_{11}} < T. \tag{21}$$

Следовательно,

$$w_{11} < \frac{1}{b_1} \left(c - \frac{d_2 - y_0}{T} \right). \tag{22}$$

Вместе с (20) получаем, учитывая (18), (19), что в качестве w_{11} в начальный момент надо брать постоянную, удовлетворяющую условию (22). Тогда $y(t^+)=d_2$, где t^+ определено в (21). Согласно описанной выше модели, в момент t^+ произойдет открытие второго предприятия с числовой характеристикой x_2 . При этом переменная y(t) совершает положительный скачок: $y(t^++0)=d_2+\delta_2$, причем $x_2(t^+)=x_2^+-$ заданная положительная постоянная такая, что $x_1(t^+)+x_2^+<\widetilde{X}$. Динамика ПО при $t>t^+$ задается уравнениями

$$\dot{x}_1 = a_1 \mu_1 x_1 + a_1 w_1, \ \dot{x}_2 = a_2 \mu_2 x_2 + a_2 w_2, \ (23)$$

$$\dot{y} = c - b_1 w_1 - b_2 w_2,\tag{24}$$

с начальными условиями $x_1(t^++0)=x_1(t^+),\ x_2(t^++0)=x_2(t^+)=x_2^+,\ y(t^++0)=d_2+\delta_2.$ При этом

$$x_1(t^+) = e^{a_1\mu_1t^+}(x_1^0 + \frac{w_{11}}{\mu_1}) - \frac{w_{11}}{\mu_1}.$$
 (25)

Остановимся теперь на выборе управлений w_1, w_2 при $t > t^+$. Предположим, что найдены постоянные w_{12}, w_{22} такие, что $w_{12} < \overline{w}, w_{22} < \overline{w}$, решающие задачу управления. Тогда должно выполняться условие

$$x_1(T, w_{12}) + x_2(T, w_{22}) = \widetilde{X},$$

где $x_1(T, w_{12}), x_2(T, w_{22})$ – решения уравнений (23), соответствующие управлениям w_{12}, w_{22} с начальными условиями, приведенными выше. Последнее равенство равносильно тому, что

$$\sum_{i=1}^{2} ((x_i(t^+) + \frac{w_{i2}}{\mu_i})e^{a_i\mu_i(T-t^+)} - \frac{w_{i2}}{\mu_i}) = \widetilde{X}, (26)$$

где t^+ имеет вид (21). При этом должно выполняться условие существования обоих предприятий на отрезке $[t^+, T]$: $y(T) > d_2$, которое сволится к

$$\delta_2 + (c - b_1 w_{12} - b_2 w_{22}) (T - \frac{d_2 - y_0}{c - b_1 w_{11}}) \geqslant 0.$$
 (27)

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть k(t) = 1 при $t \in [0, t^+]$, k(t) = 2 при $t \in [t^+ + 0, T]$, $\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 \leq \overline{w}$, а также выполнены условия

- (16), (18) недостатка кредитного ресурса для одного предприятия;
- (27) сохранения двух предприятий при $t \in [t^+, T];$
 - (26) терминальное условие.

Тогда кредитные функции $w_1 = w_{11}$, $w_2 = 0$ при $t \in [0, t^+]$, $w_1 = w_{12}$, $w_2 = w_{22}$ при $t \in [t^+ + 0, T]$ решают задачу перевода ПО в терминальное множество (13). При этом на промежутке $[0, t^+]$ ПО состоит из одного, а на промежутке $[t^+, T]$ – из двух предприятий

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Галахова Мария Евгеньевна

аспирантка Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров ул. Ивана Черных, 4, Санкт-Петербург, Россия, 198095 эл. почта: secretgate@mail.ru тел.: (812) 7712780

Кириллов Александр Николаевич

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru тел.: (8142) 763370

Заключение

Предложен подход к моделированию динамики экономической системы с переменным количеством предприятий. Рассмотрены некоторые задачи развития предприятий на заданном промежутке времени. Количество предприятий, входящих в производственное объединение, определяется эффективностью их деятельности.

Работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора Программой стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Литература

- 1. *Кириллов А. Н.* Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационноуправляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
- 2. *Кириллов А. Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.
- 3. *Кириллов А. Н.* Одна математическая модель распределения капитальных вложений // Экономика и математические методы. 1982. Т. 18, № 5. С. 922–925.
- 4. Kupuллов A. H. Модель инвестирования экономической системы с переменной структурой // Труды института системного анализа РАН. 2007. С. 281-287.

Galakhova, Mariya

State Technological University of Plant Polymers 4 Ivan Chernykh St., 198095 Saint-Petersburg, Russia e-mail: secretgate@mail.ru tel.: (812) 7712780

Kirillov, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: kirillov@krc.karelia.ru tel.: (8142) 763370 УДК 519.7

РАВНОВЕСИЕ В ИГРЕ РАЗМЕЩЕНИЯ НА РЫНКЕ АВИАПЕРЕВОЗОК

 $X. \Gamma ao^1, B. B. Мазалов^2, Ц. <math>Xy^3, A. B.$ Щипцова 2

Рассматривается двухшаговая некооперативная игра на рынке авиаперевозок. Исследуется равновесие по Нэшу для размещения самолетов в транспортном графе и равновесие по Нэшу в игре ценообразования для транспортных сетей авиакомпаний. Представлены результаты численного моделирования для игры размещения на российском и китайском авиационных рынках.

 ${\rm K}$ лючевые слова: дуополия Хотеллинга, равновесие по Нэшу, игра размещения, транспортные сети.

H. Gao, V. V. Mazalov, J. Hu, A. V. Shchiptsova. EQUILIBRIUM IN LOCATION GAME ON AIRLINE MARKET

This paper studies a two stage non-cooperative game in airline market. We analyze the Nash equilibrium for planes allocation in a transportation graph and Nash equilibrium in a price game for fixed airline transportation networks. Some numerical results for Russian and Chinese airline markets are presented.

 $K\,e\,y\,$ w o r $d\,s$: Hotelling's duopoly, Nash equilibrium, location game, transportation networks.

Введение

Данная статья посвящена исследованию конкурентного поведения на рынке авиаперевозок. Предполагается, что каждая авиакомпания принимает решение о размещении своих самолетов в транспортном графе и устанавливает цены на билеты. Впервые исследование пространственной и ценовой конкуренции было выполнено в модели Хотеллинга [6], в которой описано конкурентное поведение двух фирм на «линейном рынке».

В работе [5] было показано, что равновесие в задаче ценообразования для дуополии Хотеллинга существует не для всех размещений фирм. Для решения проблемы существования равновесия в игре ценообразования

было предложено использовать квадратичные транспортные расходы. Салоп [9] провел исследование конкурентного поведения игроков в модели «кругового города», где участники рынка располагаются вдоль окружности на одинаковом расстоянии друг от друга. В работах [7], [1] показано решение задачи о размещении на плоскости для двух игроков. Достаточные условия существования равновесия в игре ценообразования для $n \geqslant 2$ игроков были предложены в работе [4]. Задача ценообразования на плоскости для $n \geqslant 2$ игроков рассмотрена в статье [2].

Данная работа продолжает исследование конкурентного поведения в игре размещения для $n\geqslant 2$ игроков. В первой части статьи описана теоретико-игровая модель рынка авиапе-

¹ Математический колледж, Университет Циндао, Китай

 $^{^2}$ Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра PAH

³Школа бизнеса, Университет Циндао, Китай

ревозок на графе. Затем проведен анализ конкурентного поведения в построенной модели и выполнено численное моделирование для российского и китайского рынков авиаперевозок.

Модель рынка авиаперевозок

Пусть рынок авиаперевозок представлен некоторым транспортным графом G(V, E). Будем считать, что в вершинах графа расположены аэропорты. Множество ребер графа — это возможные направления, по которым авиакомпании осуществляют пассажирские перевозки.

На рынке оперируют n авиакомпаний. Каждая авиакомпания размещает m_i самолетов по ребрам транспортного графа G(V, E), не более одного на ребро. Таким образом, авиакомпания формирует свою транспортную сеть E^i . Вектор x_i определяет размещение самолетов авиакомпании в транспортном графе:

$$\forall j \in \{1, \dots, |E|\}: \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \sum_{r=1}^{|E|} x_{ir} = m_i.$$

Каждое ребро графа G(V,E) характеризуется потенциальным пассажиропотоком $d(e_j)$ $(e_j \in G(V,E))$. Будем предполагать, что величина потенциального пассажиропотока зависит от количества населения в городах отправления и прибытия:

$$d(e_j) = \frac{\sqrt{P(v_j^1)P(v_j^2)}}{2}, \quad e_j = (v_j^1, v_j^2), \quad (1)$$

где Р обозначает количество населения в соответствующем городе.

Доля авиакомпании i в потенциальном пассажиропотоке на ребре e_j зависит от цены на рейс p_{ij} и цен конкурирующих авиакомпаний на этом ребре. Будем предполагать, что распределение пассажиропотока описывает мультиномиальная логит-модель [8]. Тогда доля авиакомпании i в потенциальном пассажиропотоке на ребре e_j равна

$$M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}) = e^{a_1 p_{ij} + (a, k_{ij})} / \left(\sum_{s=1}^{|N_j|} e^{a_1 p_{sj} + (a, k_{sj})} + e^{\rho} \right), \quad e_j \in E^i, \quad (2)$$

где $a_1 < 0$, a – вектор констант, k_{ij} – вектор характеристик рейса, N_j – множество конкурирующих авиакомпаний на ребре e_j . Пассажир может отказаться от использования воздушного транспорта, поэтому в знаменатель (2) входит слагаемое e^ρ .

Прибыль авиакомпании на ребре e_j зависит от цены на рейс и доли авиакомпании в пассажиропотоке

$$h_{ij}(\{p_{rj}\}_{r \in N_j}) = (p_{ij} - c_{ij}) \times X$$

 $\times M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}) d(e_j), \quad i \in N_j, \quad (3)$

где c_{ij} — себестоимость перевозки на одного пассажира.

Таким образом, прибыль авиакомпании i в транспортном графе G(V, E) равна

$$H_{i}(\{p_{r}\}_{r\in N}, \{x_{r}\}_{r\in N}) = \sum_{j=1}^{|E|} h_{ij}(\{p_{rj}\}_{r\in N_{j}})x_{ij}, \quad (4)$$

где компонентами вектора p_r являются цены в транспортной сети E^r .

Мы определили бескоалиционную игру Γ с полной информацией для n игроков (авиакомпаний). Стратегией игрока i является пара векторов (x_i, p_i) .

Игра проходит в три шага:

- 1. Игроки одновременно определяют размещение своих самолетов на рынке $\{x_i\}_{i\in N}$.
- 2. Игроки одновременно объявляют цены на рейсы $\{p_i\}_{i\in N}$.
- 3. Пассажиры выбирают того игрока, чей рейс они будут использовать, и игроки получают выигрыши $\{H_i\}_{i\in N}$, исходя из выбранной транспортной сети и цен на ресурсы.

Требуется найти равновесие по Нэшу $\{x_i^*\}_{i\in N}$, т. е. такие x_i^* , которые для $\forall\, x_i,\ i\in N$ удовлетворяют условию

$$H_{i}(\{\tilde{p}_{r}(x_{i},\{x_{r}^{*}\}_{r\in N\setminus\{i\}})\}_{r\in N},x_{i},\{x_{r}^{*}\}_{r\in N\setminus\{i\}})) \leqslant \leqslant H_{i}(\{\tilde{p}_{r}(x_{i}^{*},\{x_{r}^{*}\}_{r\in N\setminus\{i\}})\}_{r\in N},x_{i}^{*},\{x_{r}^{*}\}_{r\in N\setminus\{i\}}),$$
(5)

где $\{\tilde{p}_r(\{x_i\}_{i\in N})\}_{r\in N}$ – равновесие в игре ценообразования для фиксированного размещения самолетов на графе G(V,E).

Для любых выбранных транспортных сетей игроков $\{\tilde{x}_r\}_{r\in N}$ требуется найти равновесие по Нэшу $\{p_i^*\}_{i\in N}$, т. е. такие p_i^* , которые для $\forall p_i$, $i\in N$ удовлетворяют условию

$$H_i(p_i, \{p_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}, \{\tilde{x}_r\}_{r \in N}) \leqslant \leqslant H_i(p_i^*, \{p_r^*\}_{r \in N \setminus \{i\}}, \{\tilde{x}_r\}_{r \in N}).$$
 (6)

Равновесие в игре размещения

В задаче ценообразования прибыль i-го игрока зависит от цены p_{ij} , которую авиакомпания устанавливает для своего рейса на ребре e_j , и от цен конкурентов на этом ребре. Таким образом, можно рассматривать отдельные задачи ценообразования на каждом ребре транспортного графа G(V, E). Существование и единственность равновесия в игре ценообразования на ребре e_j следует из работы [4].

Равновесие $\{p_{ij}^*\}_{i\in N_j}$ можно построить как точку, к которой сходится последовательность наилучших ответов игроков. Наилучший ответ игрока i на стратегии других игроков удовлетворяет уравнению

$$(1 - M_{ij}(p_{ij}, \{p_{rj}\}_{r \in N_j \setminus \{i\}}))(c_{ij} - p_{ij}) = \frac{1}{a_1}. (7)$$

Следует заметить, что при добавлении нового игрока в игру ценообразования на ребре e_j выигрыши игроков в равновесии уменьшаются.

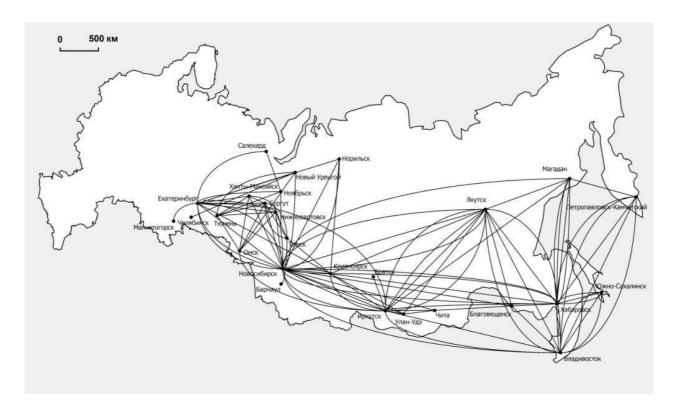
В игре размещения для двух игроков можно применить следующую процедуру для поиска равновесия. Пусть первая авиакомпания оптимально разместила свои самолеты в

транспортном графе G(V,E). Будем размещать самолеты второй авиакомпании последовательно один за другим, каждый раз находя равновесие. Равновесие для m_1 самолетов первой авиакомпании и n+1 самолетов второй авиакомпании можно построить, используя последовательность наилучших ответов игроков. Легко показать, что последовательность наилучших ответов сходится, используя тот факт, что выигрыш игрока на ребре транспортного графа будет меньше, если кроме него это ребро выберет и другой игрок.

Моделирование

Предложенная модель рынка авиаперевозок была использована для исследования конкурентного поведения на авиарынках России и Китая. Транспортные графы рассматриваемых рынков представлены на рис. 1 и 2.

В таблице 1 приведены характеристики рынков. Следует заметить, что количество вершин и ребер в транспортном графе российского рынка больше, чем в графе китайского рынка. Однако общее количество рейсов выше для последнего, а значит, для этого рынка характерен и более высокий уровень конкуреннии.



Puc. 1. Рынок авиаперевозок России

Таблица 1. Характеристики рынков

| Показатель | Россия | Китай |
|----------------------|--------|-------|
| Число аэропортов | 27 | 14 |
| Число маршрутов | 95 | 61 |
| Число прямых рейсов | 239 | 351 |
| Число рейсов с пере- | 74 | 14 |
| садками | | |
| Число авиакомпаний | 11 | 5 |
| Макс. число авиаком- | 5 | 3 |
| паний на ребре | | |
| Средняя частота рей- | 2,8 | 6,4 |
| сов в неделю | | |

В случае российского рынка в характеристики отдельного рейса были включены время перелета, индикатор прямого рейса γ_{ij} ($\gamma_{ij} \in \{0,1\}$), геометрическое среднее среднедушевых доходов населения в регионах, где расположены аэропорты отправления и прибытия, и расстояние между аэропортами отправления и прибытия. Таким образом, получаем

$$(a, k_{ij}) = a_2 t_{ij} + a_3 \gamma_{ij} + a_4 income_{ij} + a_5 \ln(dist_{ij}), \ e_j \in E^i.$$
 (8)

На рынке авиаперевозок Китая к перечисленным характеристикам был добавлен индикатор занятости пассажирских кресел для авиакомпании, который равен 1, если средний процент занятости пассажирских кресел больше 80 %. В случае китайского рынка время перелета, среднедушевой доход и расстояние между аэропортами были взяты как величина этих факторов для рассматриваемого рейса, деленная на наименьший показатель среди конкурирующих рейсов на ребре транспортного графа:

$$(a, k_{ij}) = a_2 t_{ij}^{ratio} + a_3 \gamma_{ij} + a_4 income_{ij}^{ratio} + a_5 dist_{ij}^{ratio} + a_6 loading_{ij}, \ e_j \in E^i.$$
 (9)

Оценивание параметров в мультиномиальной логит-модели распределения пассажиропотока было выполнено с использованием

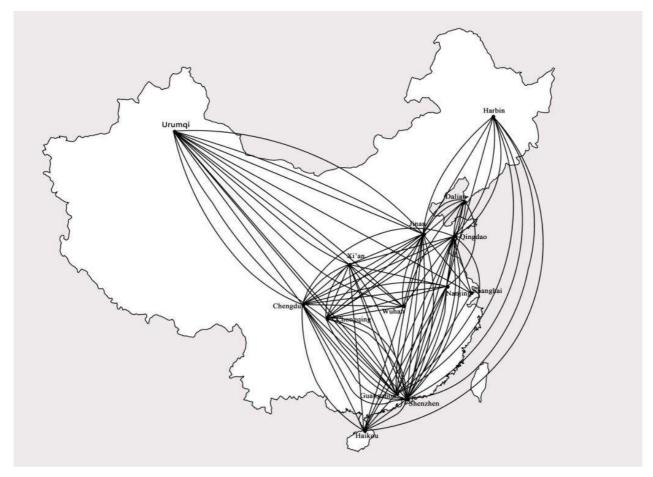


Рис. 2. Рынок авиаперевозок Китая

BLP-метода [3], так как в модель были включены характеристики рейса и общие показатели рынка авиаперевозок и не включены индивидуальные предпочтения потребителей.

В полезность для пассажира от выбора авиакомпании i на рейсе e_j добавляется константа ξ_{ij} , которая обозначает влияние всех ненаблюдаемых характеристик в среднем. Таким образом, доля авиакомпании в пассажиропотоке на ребре e_j равна

$$M_{ij} = e^{a_1 p_{ij} + (a, k_{ij}) + \xi_{ij}} / \left(\sum_{s=1}^{|N_j|} e^{a_1 p_{sj} + (a, k_{sj}) + \xi_{sj}} + e^{\rho} \right), \quad e_j \in E^i \quad (10)$$

Без потери общности положим, что полезность для потребителя от отказа в использовании воздушного транспорта равна нулю. Тогда из (10) получаем

$$\ln M_{ij} - \ln M_{sj} = a_1 p_{ij} + (a, k_i) + \xi_{ij}, \quad (11)$$

где M_{sj} — доля других видов транспорта (или отказ от путешествия) в потенциальном пассажиропотоке.

Оценивание параметров модели выполнялось с использованием линейной регрессии

для соотношения (11) с применением метода инструментальных переменных. В данном исследовании за инструментальную переменную был взят показатель расхода авиационного топлива. Результаты представлены в таблице 2.

Равновесие в задаче ценообразования было получено через последовательность наилучших ответов конкурирующих авиакомпаний. Для нахождения наилучшего ответа использовалось уравнение (7).

В таблице 3 представлены результаты для направления Иркутск – Новосибирск на российском рынке. Реальное поведение авиакомпаний не соответствует полученному равновесному решению, что может говорить о нарушении рыночных условий на этом направлении. Из полученных результатов моделирования для российского рынка следует, что цены авиакомпаний не соответствуют равновесным. Поведение авиакомпаний на китайском рынке близко к конкурентному поведению в равновесии (табл. 4). Следует заметить, что порядковая разница между реальными и равновесными ценами в таблице 3 и 4 связана с тем, что в себестоимость авиаперевозки была включена только стоимость авиационного топлива.

Таблица 2. Оценка параметров для модели распределения пассажиропотока

| | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | c |
|--------|-----------|--------|-------|----------|--------|-------|---------|
| Россия | -0,000656 | -0,288 | 0,628 | 0,000141 | 3,83 | | -28,305 |
| Китай | -0,00196 | -1,138 | 0,135 | 3,845 | -6,571 | 1,142 | 3,845 |

Таблица 3. Равновесие для рейсов на направлении Иркутск – Новосибирск

| Авиакомпания | Время | Частота | Расстояние | Кол-во | Цена в равнове- | Доля в |
|--------------|----------|----------|------------|---------|------------------|----------|
| | (4.) | (в нед.) | (км) | переса- | сии (и на рынке) | пассажи- |
| | | | | док | | ропотоке |
| Сибирь (S7) | 2,4 | 4 | 1462,6 | 0 | 3029,95 (9930) | 0,23 |
| ИрАэро | $3,\!55$ | 5 | 1520,918 | 1 | 2986,04 (10930) | 0,1 |
| Ангара | 2,1 | 3 | 1462,6 | 0 | 3347,28 (6630) | 0,2 |
| Руслайн | 2,4 | 3 | 1462,6 | 0 | 3115,01 (9825) | 0,21 |
| NordStar | 5,2 | 3 | 1520,918 | 1 | 2854,08 (7495) | 0,07 |

Таблица 4. Равновесие для рейсов на направлении Нанкин – Харбин

| Авиакомпания | Время | Частота | Расстояние | Цена в равнове- | Доля в пасса- |
|-------------------|-------|----------|------------|------------------|---------------|
| | (ч.) | (в нед.) | (KM) | сии (и на рынке) | жиропотоке |
| Shenzhen Airlines | 2,4 | 7 | 1665 | 709,95 (1650) | 0,28 |
| Sichuan Airlines | 2,5 | 7 | 1665 | 702,96 (1650) | 0,28 |
| Xiamen Airlines | 2,4 | 6 | 1665 | 576,84 (1620) | 0,12 |

Игра размещения была исследована для двух авиакомпаний на рассматриваемых рынках авиаперевозок. Для этого был выделен подграф транспортного графа G(V, E), на котором авиакомпании вступают в конкуренцию. Для поиска равновесия в игре размещения самолетов были найдены выигрыши авиакомпаний на каждом ребре рассматриваемого транспортного графа в случае, когда на ребре присутствует только одна авиакомпания, и в случае, когда на ребре есть конкуренция между авиакомпаниями. После этого была применена процедура поиска равновесия с использованием последовательности наилучших ответов. Результаты представлены на рис. 3 и 4.

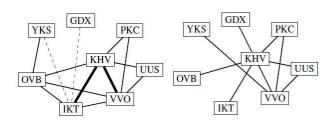


Рис. 3. Равновесное размещение (Россия)

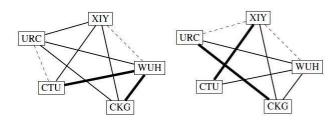


Рис. 4. Равновесное размещение (Китай)

В равновесии авиакомпании меняют размещение двух самолетов по направлениям в рассматриваемых транспортных графах российского и китайского рынков (1-я авиакомпания в случае российского рынка, 1-я и 2-я авиакомпании в случае китайского рынка). Следует заметить, что предложенная модель не учитывает влияние хабов и базовых аэропортов на формирование транспортных сетей авиакомпаний.

Заключение

В данной статье предложена двухшаговая теоретико-игровая модель конкуренции для рынка авиаперевозок. Для представленных рынков России и Китая найдено равновесное

размещение самолетов авиакомпаний в транспортном графе. Равновесие получено, исходя из условия, что после принятия стратегического решения по планированию транспортной сети авиакомпании начинают конкурировать между собой за распределение общего пассажиропотока, назначая цены на билеты. Предложен алгоритм нахождения равновесия в игре размещения и игре ценообразования с использованием последовательности наилучших ответов и проведено численное моделирование для указанных рынков. В дальнейшем предполагается расширение модели размещения на графе с целью включения таких факторов на рынке авиаперевозок, как наличие хабов, базовых аэропортов и т. п.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-01-91158- $\Gamma\Phi EH$ a).

Литература

- 1. *Мазалов В. В., Щипцова А. В., Токарева Ю. С.* Дуополия Хотеллинга и задача о размещении на плоскости // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46, вып. 4. С. 91–100.
- 2. Щипцова А. В. Мультиномиальный логитанализ и конкурентное поведение на рынке // Труды Карельского научного центра РАН. 2011. № 5. С. 120–124.
- 3. Berry S. Estimating Discrete-Choice Models of Product Differentiation // The RAND Journal of Economics. 1994. Vol. 25, N 2. P. 242–262.
- 4. Caplin A., Nalebuff B. Aggregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium // Econometrica. 1991. Vol. 59, N 1. P. 25–59.
- 5. d'Aspremont C., Gabszewicz J., Thisse J. F. On Hotelling's "Stability in Competition"// Econometrica. 1979. Vol. 47, N 5. P. 1145–1150.
- 6. Hotelling H. Stability In Competition // The Economic Journal. 1929. Vol. 39. Issue 153. P. 41–57.
- 7. Mazalov V. V., Sakaguchi M. Location Game On The Plane // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, N 1. P. 1–13.
- 8. McFadden D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior / Ed. P. Zarembka // Frontiers in econometrics. 1973. New York: Academic Press. P. 105–142.
- 9. Salop S. Monopolistic competition with outside goods // Bell journal of Economics. 1979. Vol. 10. P. 141–156.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Гао Хонгвей

профессор Математический колледж, Университет Циндао Циндао, Китай эл. почта: gaohongwei@qdu.edu.cn

Мазалов Владимир Викторович

директор, рук. лаб. математической кибернетики, д. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: vmazalov@krc.karelia.ru тел.: (8142) 781108

Ху Цзиньсун

декан Школа бизнеса, Университет Циндао Циндао, Китай эл. почта: hujingsong@qdu.edu.cn

Щипцова Анна Владимировна

младший научный сотрудник Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: anna.shchiptsova1@gmail.com тел.: (8142) 766313

Gao, Hongwei College of Mathematics, Qingdao University 308 Ningxia Road, 266071 Qingdao, P.R.China e-mail: gaohongwei@qdu.edu.cn

Mazalov, Vladimir Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia

e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

tel.: (8142) 781108

Hu, Jinsong

Business School of Qingdao University 308 Ningxia Road, 266071 Qingdao, P.R.China e-mail: hujingsong@qdu.edu.cn

Shchiptsova, Anna

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia

e-mail: anna.shchiptsova1@gmail.com

tel.: (8142) 766313

УДК 519.6:539.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА

Ю. В. Заика

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается дегазация методом термодесорбции (ТДС) образца конструкционного материала, насыщенного водородом. Представлены математические модели ТДС-эксперимента и метод их параметрической идентификации.

Ключевые слова: водородопроницаемость, краевые задачи ТДС-дегазации, параметрическая идентификация.

Yu. V. Zaika. ESTIMATION OF HYDROGEN THERMODESORPTION PARAMETERS

The degassing of a hydrogen presaturated structural material sample by the thermal desorption method is considered. The mathematical models of a TDS-experiment and parametric identification method are presented.

 ${\rm K\,e\,y}\ {\rm w\,o\,r\,d\,s};$ hydrogen permeability, boundary-value problems of TDS-degassing, parametric identification.

Введение

Интерес к взаимодействию водорода с различными материалами носит многоплановый характер [1-3, 5, 7, 8, 10-12, 18]. Достаточно упомянуть задачи энергетики, защиты металлов от водородной коррозии, проектирования химических реакторов, ракетостроения. В частности, поскольку в термоядерных реакторах (пока в отдаленной перспективе) предполагается использование радиоактивного изотопа водорода — трития, возникает проблема возможных диффузионных утечек трития и его накопления в конструкционных материалах. Основное внимание уделялось проблеме водородной хрупкости металлов, но постепенно акцент смещается в сторону использования полезных свойств водорода. Гидриды позволяют удерживать большое количество этого экологически чистого энергоносителя. С этим связаны перспективы водородных аккумуляторов и двигателей с относительно высоким уровнем безопасности: без высоких давлений и низких температур. На обратимом легировании металлов водородом основаны пластифицирование и термоводородная обработка титановых сплавов. Некоторые частные задачи исследованы в [9, 13–17]. Энтузиасты говорят не только о водородной энергетике, но и о водородной экономике.

Для повышения эффективности экспериментальных исследований, решения прикладных задач и обобщений необходимы математические модели взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами и методы их параметрической идентификации.

Экспериментальный опыт показывает, что лимитирующими являются не только диффузионные процессы внутри металла, но и физикохимические явления на поверхности [1, 2]. Параметры переноса зависят и от технологических особенностей получения партии материала, поэтому вряд ли следует ориентироваться на получение «табличных данных», нужны эффективные алгоритмы обработки экспериментальных кривых. Адсорбция, растворение, диффузия являются предметом теоретических и экспериментальных исследований. Но каждый дополнительный коэффициент приводит к скачку уровня сложности обратной задачи параметрической идентификации. В статье остановимся на методе термодесорбции, учитывая лишь лимитирующие факторы рассматриваемого далее эксперимента.

Диффузия с обратимым захватом и (де)сорбция

Рассмотрим перенос водорода сквозь образец тестируемого металла (пластину толщиной ℓ). Физико-химическую терминологию в дальнейшем используем в минимально необходимом объеме. Кратко говорим о металлической мембране, хотя это может быть многокомпонентный сплав, интерметаллид. Считаем, что нагрев относительно медленный, практически равномерный, так что градиент температуры пренебрежимо мал и диффузионный поток можно считать пропорциональным градиенту концентрации. Концентрация растворенного водорода (в атомарном состоянии) мала и часть его взаимодействует с ловушками. Здесь под ловушками понимаем микродефекты кристаллической структуры, которые могут удерживать водород. В качестве модели диффузии с обратимым захватом внутри мембраны примем систему дифференциальных уравнений

$$c_t(t,x) = D(T)c_{xx} - a_1(T)c + a_2(T)z,$$
 (1)

$$z_t(t,x) = a_1(T)c(t,x) - a_2(T)z(t,x),$$
 (2)

где t — время, $(t,x) \in Q_{t_*} = (0,t_*) \times (0,\ell)$; c(t,x) — концентрация диффундирующего водорода (атомарного); z(t,x) — концентрация захваченного диффузанта; D — коэффициент диффузии; a_1, a_2 — коэффициенты поглощения и выделения атомов H ловушками. Ограничение емкости ловушек осуществляется заменой произведения a_1c на $[1-z/z_{\rm max}]a_1c$.

Для определенности полагаем, что величины D, a_i зависят от температуры T(t) по закону Аррениуса с предэкспоненциальными множителями D_0 , a_{0i} и энергиями активации E_D , E_i (R — универсальная газовая постоянная):

$$D = D_0 \exp\{-E_D/[RT(t)]\}, \ a_i = \dots$$

Графиками таких зависимостей f(T) являются S-образные кривые насыщения.

Известны более детализированные модели переноса. В частности, можно учесть несколько каналов диффузии (транскристаллическую, по границам зерен, вдоль дефектов) с взаимообменом между ними [1]. В контексте прикладных задач, выделяя только лимитирующие факторы, находят компромисс между полнотой модели и реальными возможностями ее параметрической идентификации используемым экспериментальным методом.

Определенные трудности численного моделирования связаны с нелинейными граничными условиями. Пусть поверхность мембраны контактирует с газообразным водородом. С учетом сорбционных процессов краевые условия моделируются следующим образом [1, с. 177–206 (Габис, Компаниец, Курдюмов)]:

$$c(0,x) = \bar{c}(x), \ z(0,x) = \bar{z}(x), \ x \in [0,\ell], \ (3)$$

$$c_0 = q(T)q_0(t), c_\ell = q(T)q_\ell(t), t \in [0, t_*],$$
 (4)

$$\dot{q}_0(t) = \mu s(T)p_0(t) - b(T)q_0^2(t) + D(T)c_x|_0,$$
 (5)

$$\dot{q}_{\ell}(t) = \mu s(T)p_{\ell}(t) - b(T)q_{\ell}^{2}(t) - D(T)c_{x}|_{\ell},$$
 (6)

$$b(T) = b_0 \exp\{-E_b/[RT]\}, \ s(T) = \dots$$

Здесь: $c_0(t) \equiv c(t,0), c_{\ell}(t) \equiv c(t,\ell)$ — граничные объемные концентрации диффундирующего атомарного водорода; $q_0(t), q_{\ell}(t)$ — концентрации на поверхностях мембраны (x = $(0,\ell); g(T)$ — параметр локального равновесия между концентрациями на поверхности и в приповерхностном объеме; μ — кинетический коэффициент; s(T) — коэффициент, отражающий тот факт, что только малая часть «налетающего» водорода окажется в форме атомов на поверхности (будем называть з коэффициентом прилипания, имея, однако, в виду, что он характеризует итог общего процесса физадсорбции-диссоциациихемосорбции молекулярного газа в атомы на поверхности); $p_0(t), p_{\ell}(t)$ — давление газа (H_2) с соответствующих сторон мембраны; b(T) коэффициент десорбции.

Соотношения (4) означают, что объемные приповерхностные концентрации $c_0(t)$, $c_\ell(t)$ пропорционально «отслеживают» текущие концентрации $q_0(t)$, $q_\ell(t)$ на поверхности, скорость растворения относительно велика. В балансе потоков (5), (6) учитывается возможность накопления H на поверхности.

В модели фигурирует как молекулярный, так и атомарный водород. Для единообразия подсчет будем вести в атомах: $[c] = 1/\text{cm}^3$, $[q] = 1/\text{cm}^2$, $[Dc_x] = [J] = 1/\text{cm}^2$ s $(J \equiv bq^2)$. В терминах кинетической теории газов величина μp определяет число частиц (в данном случае молекул H_2), соударяющихся с единичной площадкой поверхности в единицу времени. Но за счет безразмерного множителя s удобно в дальнейшем воспринимать μsp как плотность потока атомов, оседающих на поверхности. Это интегральный показатель, без разделения процесса на различные стадии.

Показатели E в экспонентах называем энергиями активации, хотя они могут быть линейными комбинациями энергий активаций и теплот более элементарных стадий процессов и иметь разный знак. Детально обсуждать границы применимости модели не будем, у нее своя ниша в широком спектре исследований.

Замечание 1. Давления и концентрации считаем относительно малыми. При необходимости можно ввести в рассмотрение зависимость коэффициента диффузии от концентрации. Наиболее распространенный вариант [3]: в уравнении (1) слагаемое Dc_{xx} заменяют на

$$\partial_x (D \partial_x c(t,x)), D = D(T,c) = D_*(T)(1+\alpha c).$$

Здесь и в дальнейшем, когда это удобно, в обозначениях частных производных помимо индекса будем использовать символ ∂ . Учет зависимости коэффициента диффузии от концентрации в форме так называемого термодинамического множителя $(1+\alpha c)$ является одним из возможных вариантов наряду, например, с экспоненциальным представлением $D=D(T,c)=D_*(T)\exp\{\alpha c\}$. Обычно значение α относительно мало, применима техника метода малого параметра. В прямых задачах нетрудно дополнительно учесть неравномерность прогрева пластины, эффекты термодиффузии и переноса тепла частицами.

Замечание 2. Модель (4) быстрого растворения (локального равновесия) на поверхности

получается из более общих соотношений баланса потоков

$$k^{-}(T)q_{0}(t) - k^{+}(T)c_{0}(t) = -D(T)c_{x}(t,0),$$

$$k^{-}(T)q_{\ell}(t) - k^{+}(T)c_{\ell}(t) = D(T)c_{x}(t,\ell).$$

Коэффициенты k^- , k^+ характеризуют интенсивность процессов растворения в объеме и выхода на поверхность. Если эти процессы в рассматриваемом диапазоне температур существенно быстрее диффузии ($Dc_x \approx 0$), то получаем соотношение (4) с $g=k^-/k^+$. Если поверхность изотропна (в смысле $E_{k^-}\approx E_{k^+}$), то g(T) слабо зависит от температуры. Формально можно записать аррениусовскую зависимость $g(T)=g_0\exp\{-E_g/[RT\}],\ E_g=E_{k^-}-E_{k^+}$, но «энергия активации» E_g не обязательно положительна. Дополнительно можно учитывать степени заполнения поверхности и насыщенности объема:

$$k^{-}(T) \left[1 - c_{0,\ell}(t) c_{\max}^{-1} \right] q_{0,\ell}(t) -$$

$$- k^{+}(T) \left[1 - q_{0,\ell}(t) q_{\max}^{-1} \right] c_{0,\ell}(t) = \mp D(T) c_x \big|_{x=0,\ell}.$$

Наличие «порогового» множителя $(1-c/c_{\rm max})$ приводит к следующему. Если концентрация c в приповерхностном объеме близка к максимально возможной, то растворение практически прекращается. Величина $\theta(t) =$ $q(t)/q_{\rm max}$ означает степень заполнения поверхности. В уравнениях (5), (6) можно моделировать плотность потока адсорбции атомов H(диссоциативной хемосорбции водорода на поверхности) выражением $\mu s(T)p(t)(1-\theta(t))^2$. В диапазоне малых концентраций $\theta \ll 1$, что согласовано с квадратичной десорбцией, линейностью уравнения диффузии, $D \neq$ D(c). Зависимостью кинетической константы от температуры ($\mu \sim 1/\sqrt{T}$) обычно пренебрегают на фоне экспоненты в s(T). Формально можно объединить «всю зависимость» от T, не считая s(T) аррениусовским параметром.

Замечание 3. Не для всех материалов целесообразно придавать особую роль поверхности. Часто достаточно уравнения (4)—(6) заменить граничными условиями III рода:

$$\mu s(T)p_{0,\ell}(t) - b(T)c_{0,\ell}^2(t) = \mp D(T)c_x\big|_{0,\ell}.$$
 (7)

Формально (7) получается из (5), (6) при малой ($\dot{q} \approx 0$) скорости накопления на поверхности. Коэффициент десорбции обозначается

одной буквой, хотя в (7) и (5), (6) это разные величины (включая размерность). С учетом «усреднения» многостадийного процесса коэффициент объемной десорбции в в условии (7) (ОД-модель) является эффективным коэффициентом рекомбинации [5].

Модель нацелена на задачи, в которых необходимо учесть поверхностные процессы: защитные покрытия, или даже стенки, когда для больших промежутков времени желательно писать меньше нулей в граничных условиях. В качестве предостережения отметим, что при чтении экспериментальных работ целесообразно уточнять, как надежно «измеренный» коэффициент на самом деле вычислялся. Множество коэффициентов с одним и тем же названием обычно содержит более одного элемента.

Экспериментальный метод

Термодесорбционная спектрометрия (ТДС) [3]. В камеру с лентой из исследуемого металла или сплава подается водород в газовой фазе при сравнительно большом давлении. Лента нагревается электрическим током с целью увеличения скорости сорбции. После того как образец поглотит достаточное количество водорода (до состояния равновесного насыщения), он быстро охлаждается (отключается ток нагрева). При этом резко падают скорости физико-химических процессов, и значительное количество водорода остается в образце. В режиме последующего вакуумирования камеры лента снова нагревается. Закон нагрева T(t) может варьироваться в широких пределах. С помощью масс-спектрометра измеряется давление молекулярного водорода в вакуумной камере, обусловленное десорбционным потоком с поверхности (плотность потока десорбции обозначим через $J(t) \equiv b(t)q^{2}(t)$:

$$p(t) = \theta_1 \int_0^t J(\tau) \exp\{(\tau - t)\theta_0^{-1}\} d\tau.$$
 (8)

Здесь и далее для упрощения обозначений примем сокращенную запись (знак тождества трактуется как равенство по определению):

$$b(t) \equiv b(T(t)), \ g(t) \equiv g(T(t)), \ D(t) \equiv D(T(t)) \dots$$

Для ТДС выполнены условия симметрии:

$$p(t) = p_0 = p_\ell$$
, $q(t) = q_0 = q_\ell$, $c_0 = c_\ell$,
 $D(t)c_x|_0 = -D(t)c_x|_\ell$, $\bar{c}(x) = \bar{c}(\ell - x)...$

Константа θ_1 зависит от площади поверхности ленты S ($\theta_1 = S\theta_2$), θ_0 и θ_2 определяются конкретными характеристиками экспериментальной установки, в частности, объемом камеры V и скоростью откачки вакуумной системы v ($\theta_0 = V/v$). Выбор модели измерений (8) обусловлен опытом: впрыск порции водорода в камеру (δ -импульс) приводит к резкому скачку давления с последующим экспоненциальным затуханием. Уравнение (8) является классическим в теории измерений. Специфику задачи отражает функция J(t). В дифференциальной форме $J(t) = (p(t)/\theta_0 + \dot{p}(t))/\theta_1$.

Если дождаться равновесного предварительного насыщения, то в начальный момент времени (t=0), определяемый повторным нагревом, в (3) $c(0,x)=\bar{c}=\mathrm{const},\ z(0,x)=\bar{z}=\mathrm{const},\ x\in[0,\ell]$. Значения $\bar{c},\ \bar{z}$ априори неизвестны. Но в силу уравнений диффузии с обратимым захватом $(1),\ (2)$ они при t=0 (T=T(0)) связаны соотношением $a_1\bar{c}=a_2\bar{z}$. Время t_* окончания эксперимента определим условием $p(t)\approx 0,\ t\geqslant t_*,\ c(t_*,x)=z(t_*,x)=0$.

Замечание 4. При медленном нагреве пренебрегают производной давления $\dot{p}(t)$: $J(t) = \theta p(t) = p(t)/(\theta_0\theta_1)$. Коэффициент $\theta = 1/(\theta_0\theta_1)$ определяется по результатам калибровки прибора. Если точность оценивания θ недостаточна, приходится оперировать измерениями лишь в относительных единицах (приближенно известно только отношение $J(t)/J_{\rm max}$).

Параметрическая идентификация (объемная десорбция, $a_i \approx 0$)

Остановимся на модели с эффективным коэффициентом рекомбинации согласно граничному условию (7). Кроме того, считаем обратимый захват и ресорбцию второстепенными факторами ($a_i \approx 0$, $\mu sp \approx 0$).

Замечание 5. В ОД-модели граничное условие $Dc_x(t,0)=bc_0^2(t)$ в пределе $(t\to +0)$ формально противоречит равномерному распределению $c(0,x)=\varphi(x)=\bar{c}$. На самом деле в процессе вакуумирования перед ТДС-дегазацией функция $\varphi(x)$ успевает немного «прогнуться» на краях под действием уже активированной десорбции. В алгоритмах идентификации $\varphi(x)$ будет использоваться только интегрально (в соответствии с обобщенным решением), так что искажением можно пренебречь.

Уравнение для оценки параметров

Граничные условия $Dc_x|_{0,\ell} = \pm bc_{0,\ell}^2$ нелинейны. Но по постановке обратной задачи функция $J = bc_{0,\ell}^2$ известна как функция времени. Поэтому формально (без учета погрешностей эксперимента и обработки измерений) можем рассмотреть линейную краевую задачу ІІ рода, заменив $bc_{0,\ell}^2$ на плотность десорбции J(t). Сделаем замену $t' = \int_0^t D(s) ds$ и после преобразований оставим обозначение t:

$$\begin{split} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0} = \tilde{J}(t), \quad \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{\ell} = -\tilde{J}(t), \\ \tilde{J}(t) &= D^{-1}(t)J(t), \quad J(t) = b(t)c_0^2(t) = b(t)c_\ell^2(t). \end{split}$$

Можно было бы сразу перейти к безразмерному (характеристическому) показателю времени диффузии t'/ℓ^2 и нормировкам x/ℓ , c/\bar{c} , но в дальнейших промежуточных выкладках это не является принципиальным. По постановке ТДС-эксперимента в режиме «быстрое охлаждение — медленный нагрев» имеем $J(0)\approx 0$ или по крайней мере $J(0)\ll J_{\rm max}$.

Решение краевой задачи c = c(t, x):

$$\begin{split} c &= \bar{c} - \int_0^t \tilde{J}(\tau) \big\{ G(x,t;0,\tau) + G(x,t;\ell,\tau) \big\} \, d\tau, \\ G(x,t;y,\tau) &= \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \exp \Big\{ \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} (\tau - t) \Big\} \times \\ &\times \cos \frac{n \pi x}{\ell} \cos \frac{n \pi y}{\ell}, \end{split}$$

где G — функция Грина (функция источника). Явное представление $c_0=c_0(t)$:

$$c_0(t) = \bar{c} - \int_0^t \tilde{J}(\tau)K(t-\tau) d\tau,$$

$$K(s) = \frac{2}{\ell} \left[1 + 2\sum_{n=2m}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} s\right\} \right].$$

В исходном времени аргумент $t-\tau$ заменится интегралом $\int_{\tau}^{t} D(s) ds$, а вместо $\tilde{J}(\tau)$ будет $J(\tau)$. Выражение $c_0(t)$ следует подставить в равенство $J(t) = b(t)c_0^2(t)$ (в $\sqrt{J} = c_0\sqrt{b}$). Функция J(t) известна, поэтому получаем семейство уравнений для оценки параметров:

$$\Phi(t; D_0, E_D, b_0, E_b) = 0, \quad t \in [t_1, t_2] \subset (0, t_*).$$

Та же зависимость с учетом $c_x(t,\ell_0) = 0$ получается для отрезка $[0,\ell_0]$ ($\ell_0 = \ell/2$ — центр симметрии). Имеется в виду «эквивалентная»

краевая задача $c_t = Dc_{xx}, x \in (0, \ell_0), \varphi(x) = \bar{c},$ $Dc_x(t, 0) = bc_0^2, c_x(t, \ell_0) = 0.$

Формально можно считать, что обратная задача параметрической идентификации существенно упрощена: осталось подобрать константы в явной формуле. Но коэффициент диффузии D входит в выражение под символами интеграла и ряда, что делает этот этап нетривиальным. Если иметь в виду итерационную процедуру оценивания, то, ограничиваясь частичной суммой ряда, можно вычислять интегралы типа свертки $J_n = J_n(t)$:

$$J_n = \int_0^t J(\tau) \exp\left\{-\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \int_{\tau}^t Dds\right\} d\tau = O(n^{-2})$$

как решения линейных начальных задач

$$\dot{J}_n(t) = -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} D(t) J_n(t) + J(t), \ J_n(0) = 0$$

 $(n=2m,\,m\in\mathbb{N}).$ При численной реализации уравнения следует нормировать на $J_{\max}.$

Замечание 6. Образно говоря, ряд для функции K(s) (0 < $s \ll 1$) сходится плохо, спасает (почленное) интегрирование. Чтобы при аппроксимации не оперировать частичной суммой с большим числом слагаемых, для малых s целесообразно использовать другое представление ряда [3, с. 179]:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-n^2 \pi^2 \theta\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi \theta}} \sum_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n^2}{\theta}\right\},$$
$$\theta = \frac{4}{\ell^2} \int_{-\pi}^{t} D(\xi) d\xi. \tag{9}$$

Возникает задача «склейки» двух частичных сумм с небольшим числом слагаемых на рассматриваемом отрезке времени ТДС-пика.

Если равновесная концентрация \bar{c} известна, а поток регистрируется в относительных единицах $(J(t)/J_{\rm max})$, то уровень плотности термодесорбции $J_{\rm max}$ находится после опыта из материального баланса:

$$\bar{c}\ell = 2\int_0^{t_*} J(\tau) d\tau \Rightarrow 2\int_0^{t_*} J(\tau) J_{\text{max}}^{-1} d\tau = \bar{c}\ell J_{\text{max}}^{-1}$$

Определение коэффициента десорбции

Тождество $\Phi(t; D_0, E_D, b_0, E_b) \equiv 0$ позволяет составлять любое количество уравнений $f(D_0, E_D, b_0, E_b) = 0$. Оценка значе-

ний D_0, E_D, b_0, E_b по одной экспериментальной кривой возможна, но требует решения системы уравнений численными методами. Поставим в некотором смысле противоположную цель: ценою дополнительной экспериментальной информации свести вычисления к минимуму. Это повысит и точность оценивания.

Будем исходить из того, что техника определения равновесных концентраций в диапазоне $\bar{c}=\bar{c}(\bar{p},\bar{T})\propto\sqrt{\bar{p}}$ (закон Сивертса) отработана. Коэффициент диффузии при фиксированной температуре достаточно надежно определяется методом проницаемости, когда за счет большого перепада давлений на входной и выходной сторонах мембраны при относительно высоких температурах и не слишком малых ℓ достигается диффузионный режим проницаемости. Подробный анализ DLR (diffusion limited regime) представлен в [5]. По времени запаздывания t_0 (точка пересечения с осью t асимптоты графика количества H, проникшего сквозь мембрану) находят D = $\ell^2/(6t_0)$ [3]. При этом не обязательно достижение входной концентрацией уровня $c_0 \approx \bar{c}$ главное, чтобы переходные процессы на входе относительно быстро приводили к установлению $c_0(t) \approx c_0 = \text{const}, t > \varepsilon \ (\varepsilon \ll t_*)$. Неявно предполагается, что этот начальный всплеск $c_0(t)$ существенно не изменит начальное распределение $\varphi(x) = 0$ (хотя в модели входной поток $-Dc_x(t,0)$ формально не ограничен). Варьирование температуры образца позволяет оценить значения D_0, E_D .

Гораздо сложнее определять параметры поверхностных процессов, поскольку SLR (surface limited regime) характерен для невысоких температур и давлений. При этом градиент концентрации мал, модель упрощается (в классе обыкновенных дифференциальных уравнений), но резко падает точность измерений. В ТДС-эксперименте (обычно $T_0 =$ T(0) — комнатная температура) по мере нагрева SLR плавно переходит в DLR. Самое интересное (окрестность пика потока) происходит на этапе активного «соизмеримого» взаимодействия диффузии и десорбции. По этим причинам рассматриваем распределенную модель. Чтобы повысить точность оценивания и упростить математическое обеспечение, считаем, что помимо ТДС-кривой J(t) известны равновесная концентрация \bar{c} (при заданных условиях насыщения \bar{p}, \bar{T}) и температурная зависимость D=D(T) (в аррениусовском случае D_0 , E_D). Не обязательно это потребует дополнительных экспериментов. Параметры поверхностных процессов существенно зависят от трудноконтролируемых внешних условий: окислы, примеси, шероховатость. В этом одна из причин разброса оценок. Объемные же параметры \bar{c} , D «старого» конструкционного материала известны и отражены в справочной литературе. Изменение свойств поверхности может быть и целенаправленным: например, напыление защитного (микро)нанослоя.

По заданному закону нагрева T = T(t) определим функции

$$\alpha(t) = \exp\left\{\frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^t D(T(s)) ds\right\},$$

$$J_n(t) = \alpha^{-n^2}(t) \int_0^t J(\tau) \alpha^{n^2}(\tau) d\tau, \ n = 2m.$$

Суммируя достаточное количество J_n , находим концентрацию

$$c_0(t) \approx \bar{c} - 2\ell^{-1}S - 4\ell^{-1}\{J_2(t) + \ldots + J_{2k}(t)\},$$

 $S(t) \equiv \int_0^t J(\tau) \, d\tau$. Подставляя $J = [\dot p + p/\theta_0]/\theta_1$ и интегрируя слагаемые с $\dot p$ по частям, приходим к выражению функций $J_n(t)$ через давление p(t) без производной. Фиксируем отрезок $[t_1,t_2] \subset (0,t_*)$, соответствующий пику ТДС-спектра J(T(t)). На начальном отрезке времени $[0,t_1]$ измерения малоинформативны и имеется рассогласование краевых условий модели при $t \to +0$ (если мыслить в терминах классических решений краевых задач). Остаточную дегазацию $(t>t_2)$ также не рассматриваем по причине $J \ll J_{\rm max}$.

Алгоритм идентификации модели сводится к подбору параметров $b_0,\ E_b$ из условия

$$J(t) = b_0 \exp\{-E_b/[RT]\}c_0^2(t), \ t \in [t_1, t_2].$$

Ориентируясь для определенности на значения E_b в несколько десятков кДж, представим экспоненту в нормированной форме $u^{\nu}(t)$,

$$u(t) = \exp\{-10^4/[RT(t)]\}$$
 $(E_b = 10\nu \, \text{кДж}).$

После логарифмирования приходим к линейному по $\ln b_0$ и ν соотношению:

$$\Lambda(t) \equiv \ln \left\{ J(t)c_0^{-2}(t) \right\} = \ln b_0 + \nu \ln u(t) =$$
$$= \ln b_0 - \nu 10^4 [RT(t)]^{-1}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

На плоскости $\{T^{-1},\Lambda\}$ имеем отрезок прямой, по пересечениям которой с осями координат

находим значения $\ln b_0$, ν (b_0 , E_b). Аппроксимацию данных прямой можно строить и в координатах $\{T, \Lambda T\}$.

Сопряженные уравнения

Рассматриваем эксперимент, когда можно считать $\varphi(x) \approx \bar{c}$, $J(0) \approx 0$ ($J(0) \ll J_{\rm max}$): насыщение, охлаждение, вакуумирование, медленный нагрев. Обычно $T(t) = T_0 + vt$ ($T(t_{\rm m}) = T_{\rm max} \Rightarrow v = 0, \ t \geqslant t_{\rm m}$). В интегральном измерении несущественно рассогласование при $t \to +0$ равномерного насыщения с условием

$$Dc_x(t,0) = b(t)c_0^2(t) \quad (J = bc_0^2).$$

Если не ссылаться на теорию обобщенных решений краевых задач, то можно считать, что к началу отсчета времени $|(\bar{c}-c_0(0))/\bar{c}|\ll 1$ и на отрезках $[0,\varepsilon],\ [\ell-\varepsilon,\ell],\ 0<\varepsilon\ll\ell$, реализуются градиенты концентрации, соответствующие (в классическом смысле) граничным условиям. Запись $J(0)\approx 0$ означает, что начальная температура низка (например, комнатная) и десорбция еще слабо активирована $(b(0)\approx 0)$.

Соотношение, получаемое преобразованием по частям двойного интеграла от произведения $\psi[c_t - Dc_{xx}]$, после подстановки решения сопряженного уравнения $\psi_t = -D(t)\psi_{xx}$ (см. [4]) имеет следующий вид:

$$0 = -\bar{c} \int_0^{\ell} \psi(0, x) dx + \int_0^{t_*} \left[\psi(t, 0) + \psi(t, \ell) \right] D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_0 dt + \int_0^{t_*} c_0 D \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_0^{\ell} dt.$$

Подразумеваем $(\psi c)|_{t_*} \approx 0$, т.е. «пробная» функция ψ если и растет, то значительно медленнее, чем убывает концентрация на этапе остаточной дегазации. Варианты $\psi = 1, \psi = x$ дают общий материальный баланс. Для функции $\psi(t,x) = \beta(t) \exp \sigma x$ с учетом $J = bc_0^2$:

$$\begin{split} X[1+\exp\sigma\ell] + Y\sigma[\exp\sigma\ell - 1] &= \frac{\bar{c}}{\sigma} \left[\exp\sigma\ell - 1\right], \\ \bar{c}\ell &= 2\int_0^{t_*} \!\! J(\tau) \, d\tau, \ \beta(t) = \exp\left\{-\sigma^2\int_0^t \!\! D \, d\tau\right\}, \\ X &\equiv \int_0^{t_*} \!\! \beta J \, dt, \quad Y \equiv \int_0^{t_*} \!\! \beta D\sqrt{b^{-1}J} \, dt. \end{split}$$

Параметр σ варьируем в пределах сравнимости по порядку $\sigma \ell \sim 1$. Это касается как функции $\exp{\{\sigma x\}}$, так и $\beta(t)$. В случае $\sigma = 1/\ell$

в аргументе экспоненты $\beta(t)$ — безразмерное характеристическое «время диффузии». Замена σ на $-\sigma$ не меняет функцию $\beta(t)$, значения X,Y и уравнение с точностью до множителя. При предельном переходе $\sigma \to 0$ имеем $\psi = 1$.

Замечание 7. Аналогично предыдущему можно получить линейные по переменным X, Y уравнения для

$$\psi = \beta(t) \sin \sigma x, \ \psi = \beta(t) \cos \sigma x,$$

$$\beta(t) = \exp\left\{\sigma^2 \int_0^t D(\tau) d\tau\right\}.$$

Здесь уже функция $\beta(t)$ растет, поэтому следует проанализировать условие равенства нулю интеграла от $\psi(t_*,x)c(t_*,x)$ по $x\in[0,\ell]$. В силу симметричности c(t,x) относительно $x=\ell_0\equiv\ell/2$ этого можно добиться, например, выбором $\sigma\ell=2\pi$ (для \sin) и $\sigma\ell=\pi$ (для \cos). Но при этом уравнения вырождаются. По сходным мотивам не рассматриваем краевую задачу на отрезке $[0,\ell_0]$ с условием симметрии $c_x(t,\ell_0)=0$ и ограничение $\psi_x(t,\ell_0)=0$. Следует воспользоваться приближением $c(t_*,x)$, например, параболическим по x выражением $\tilde{c}(t_*,x)=\tilde{c}(t_*,x;D,b)$ (см. далее).

Подытожим вышеизложенное схемой оценки коэффициентов модели D(T), b(T), s(T) $(D_0, E_D, b_0, E_b, s_0, E_s)$. Как минимум нужно два эксперимента с различными температурами насыщения \overline{T} , чтобы при известном коэффициенте десорбции b(T) из соотношений

$$ar{c}\ell = 2\int_0^{t_*} J(au) d au, \quad \mu s \bar{p} = b \bar{c}^2 \left(T = \overline{T}\right)$$

определялись параметры s_0 и E_s . Желательно варьировать давление \bar{p} , чтобы значение \bar{c} существенно изменилось, и скорость нагрева v. Для оценки величин D_0 , E_D , b_0 , E_b берем по два уравнения ($\sigma = \sigma_1, \sigma_2$) вида

$$f \equiv \frac{\sigma \varkappa}{\bar{c}} X + \frac{\sigma^2}{\bar{c}} Y - 1 = 0, \quad \varkappa = \frac{\exp \sigma \ell + 1}{\exp \sigma \ell - 1}$$

 $(\psi = \beta(t) \exp \sigma x)$. Заметим, что функция $\beta(t)$ зависит только от D_0, E_D, σ . Параметрами эксперимента являются $\bar{p}, \bar{T}, v, T_0, T_{\max}$, а значения σ задаются численно. Во избежание плохой обусловленности системы можно добавить семейство уравнений $f'_{\sigma} = 0$. Производные выражений X, Y по переменной σ вычисляются под знаком интеграла. Из-за большого

разброса порядков величин перейдем к комплексам переменных и параметров, например:

$$\begin{split} \hat{f} &\equiv \sigma \ell \varkappa \, \widehat{X} + \widehat{Y} - 1 = 0, \quad \hat{J} = \frac{J t_*}{\overline{c} \, \ell} \,, \ \hat{b} = \frac{b \overline{c} \, t_*}{\ell} \,, \\ \widehat{X} &= \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \! \hat{J}(t) \beta(t) \, dt, \ \widehat{Y} = \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \! \beta \widehat{D} \sqrt{\widehat{b}^{-1} \widehat{J}} \, dt, \end{split}$$

 $\widehat{D} = D\sigma^2 t_*, \quad \sigma \ell \sim 1.$ Далее можно следовать методу наименьших квадратов (МНК):

$$F(D_0, E_D, b_0, E_b) = \sum \alpha_i \hat{f}_i^2 \to \min, \quad \alpha_i > 0.$$

Замечание 8. От предэкспоненты D_0 в функции $\beta(t)$ можно избавиться, выбирая $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2/D_0$ и задавая значения $\bar{\sigma}$. При необходимости вместо равномерного распределения $\varphi(x) = \bar{c}$ можно использовать уточнение $\varphi(x) = \bar{c} - A[x - \ell_0]^{2k}$. Интегрирование функции $-c(0,x)\psi(0,x)$ приведет к появлению слагаемого, линейного по A. Значение A>0 определяется материальным балансом дегазации (равновесную концентрацию \bar{c} считаем известной). Согласование краевых условий $D\varphi'(0) = b\varphi^2(0)$ (t=0) дает дополнительное уравнение связи искомых величин D_0 , E_D , b_0 , E_b .

Уточним алгоритм для варианта $T=\overline{T}$ (D,b)= const: после насыщения сбрасываем давление с помощью дополнительной вакуумируемой емкости и измеряем поток). В качестве пробной функции фиксируем $\psi(t,x)=\beta(t)\exp\sigma x,\;\beta(t)=\exp\{-\sigma^2Dt\}$. Чтобы избежать зависимости подынтегральных функций в X,Y от оцениваемых параметров, удобно положить $\sigma^2=\bar{\sigma}^2/Dt_*$: $\beta(t)=\exp\{-\bar{\sigma}^2t/t_*\}$. Тогда X становится известным числом, а интеграл Y известен с точностью до множителя:

$$X = J_{\text{max}} t_* \bar{X}, \quad Y = \frac{DI_{\text{max}} t_*}{\sqrt{b}} \bar{Y},$$

$$\bar{X} \equiv \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{J(\tau)}{J_{\text{max}}} \beta d\tau, \quad \bar{Y} \equiv \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{I(\tau)}{I_{\text{max}}} \beta d\tau.$$

Уравнение f=0 для оцениваемых параметров принимает вид

$$f(x_1, x_2) \equiv \bar{\sigma} \bar{X} A_1 \varkappa(x_1) \sqrt{x_1} + \bar{\sigma}^2 \bar{Y} x_2 - 1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{I_{\text{max}}}{\bar{c}\sqrt{b}}, \quad A_1 = \frac{J_{\text{max}}t_*}{\ell\bar{c}}, \tag{10}$$

$$\varkappa(x_1) = [\exp{\{\bar{\sigma}\sqrt{x_1}\}} + 1][\exp{\{\bar{\sigma}\sqrt{x_1}\}} - 1]^{-1}.$$

Выбираем два $\bar{\sigma}$ и, исключая линейно входящую переменную x_2 , решаем численно уравнение относительно $y = \sqrt{x_1}, x_1 \in [x_1^-, x_1^+].$

Внесем поправку, возникающую при замене начальной равномерной концентрации $\varphi(x)=c(0,x)=\bar{c}$ на $\varphi(x)=\bar{c}-A(x-\ell_0)^{2k},\ A>0.$ Ограничимся k=1. При вычислении интеграла от $-c(0,x)\psi(0,x)$ появится дополнительное слагаемое L:

$$\int_{0}^{\ell} (c\psi)|_{0}^{t_{*}} dx = -\int_{0}^{\ell} \varphi(x)\psi(0,x) dx =$$

$$= -\bar{c} \int_{0}^{\ell} \psi(0,x) dx + L, \ L \equiv A \int_{0}^{\ell} (x - \ell_{0})^{2} \psi dx =$$

$$= \frac{A(\ell^{2}\sigma^{2} + 8)}{4\sigma^{3}} [\exp \sigma \ell - 1] - \frac{A\ell}{\sigma^{2}} [\exp \sigma \ell + 1].$$

В левой части уравнения (10) (в функции f) добавится слагаемое

$$M \equiv \frac{A}{4\bar{c}\,\sigma^2} \left[\ell^2 \sigma^2 - 4\varkappa \ell \sigma + 8 \right] =$$
$$= \frac{A_2}{4\bar{\sigma}^2} \left[x_1 \bar{\sigma}^2 - 4\varkappa (x_1) \sqrt{x_1} + 8 \right].$$

В последнем равенстве сделаны указанные выше подстановки $Dc_x|_0 = DA\ell = J(0)$,

$$\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{Dt_*}, \ x_1 = \frac{\ell^2}{Dt_*}, \ A_2 = \frac{J(0)t_*}{\bar{c}\ell}.$$

Если точность измерения уровня J(0) недостаточна, то преобразуем A_2 :

$$A_2 = \frac{J(0)t_*}{\ell \bar{c}} = \frac{DA\ell t_*}{\ell \bar{c}} = \frac{A\ell^2}{x_1\bar{c}} \Rightarrow A_2 = A_2(x_1).$$

1. Пусть равновесная концентрация начального насыщения \bar{c} известна. Константа A>0 определяется материальным балансом:

$$\int_0^{\ell_0} \varphi(x) \, dx = \int_0^{t_*} J(\tau) \, d\tau \equiv S_*,$$

 $ar c \ell_0 - 3^{-1} A \ell_0^3 = S_*$. Согласование краевых условий дает b = b(D): $D \varphi'(0) = b \varphi^2(0),$

$$\sqrt{DA\ell} = \sqrt{b} \left[\bar{c} - A\ell_0^2 \right] \implies x_2 = x_2(x_1).$$

В уравнении (10) f=0 с добавкой M в левой части и заменой $x_2(x_1)$ остается одна переменная x_1 . Начальное приближение x_1^0 находим из $DA\ell=J(0)$. Коэффициент $s(\overline{T})$ определяется начальным насыщением: $\mu s \bar{p} = b \bar{c}^2$.

2. Если равновесная концентрация \bar{c} неизвестна, то материальный баланс дает выражение $\bar{c}=\bar{c}(A),$ а согласование краевых условий приводит к функциональной зависимости

 $x_2 = x_2(x_1,A)$. Следовательно, нужны два уравнения при различных значениях $\bar{\sigma}$. Помимо исходного семейства уравнений f=0 целесообразно использовать и соотношения $f'_{\sigma}=0$.

Параболическое приближение

Напомним стадии ТДС-эксперимента: насыщение, охлаждение, вакуумирование, нагрев $(c(0,x)=\varphi(x)=\bar{c})$. Сходимость алгоритмов оценивания в нелинейных задачах обычно локальная. Поэтому актуален выбор предварительной аппроксимации. «Куполообразный» характер распределения концентрации c(t,x) известен. Поэтому в качественном плане за первое приближение удобно взять

$$c(t,x) \approx \tilde{c}(t,x) = B(t) - A(t)(x - \ell_0)^2,$$

 $\ell=2\ell_0,\ B(0)=\bar{c}.$ Симметрия выполнена, функция B(t)>0 аппроксимирует «срединную» концентрацию $c(t,\ell_0),\ A(t)\geqslant 0,\ t>0.$ Напомним, что в модели с объемной десорбцией и $\varphi(x)=\bar{c}$ краевые условия не согласованы при $t\to+0.$ Решение краевой задачи понимается в обобщенном смысле. Значение A(0) определяем граничным условием, а $\varphi(x)=\bar{c}$ означает, что в интегральные соотношения можно подставлять равномерное начальное распределение, пренебрегая «малым прогибом» на краях. Равновесная концентрация \bar{c} оценивается по итогам дегазации интегрированием плотности J(t).

Из материального баланса и граничного условия имеем:

$$\bar{c}\ell - 2S(t) = \int_0^\ell \tilde{c}(t,x) \, dx = B(t)\ell - A(t)\frac{\ell^3}{12},$$

$$S(t) \equiv \int_0^t J(\tau) \, d\tau, \quad D(t)\tilde{c}_x(t,0) = b(t)c_0^2(t) \implies \ell D(t)A(t) = b(t) [B(t) - A(t)\ell_0^2]^2.$$

Выразим отсюда функции A(t), B(t) через коэффициенты модели D,b и известные величины \bar{c} , S(t). В итоге находим аналитическое выражение $\tilde{c}(t,x)=\tilde{c}(t,x;D,b)$. Относительно функции времени \sqrt{A} получаем квадратное уравнение с корнями разных знаков, выбираем положительный. Далее подставляем выражения A=A(D,b), B=B(D,b) в правую часть равенства-определения $\tilde{c}_0(t)=\tilde{c}(t,0)$ и оцениваем значения параметров $D_0=\tilde{D}_0, E_D=\tilde{E}_D, b_0=\tilde{b}_0, E_b=\tilde{E}_b$ из соотношения

$$J^{1/2}(t) = b^{1/2}(t)\tilde{c}_0(t), \ t \in [t_1, t_2] \subset (0, t_*).$$

Замечание 9. В качестве J(t) использована экспериментальная плотность десорбции. Если же нацелиться на «независимость» параболической модели, то следует продифференцировать по t соотношение материального баланса с заменой $J=b\tilde{c}_0^2$. Подставив зависимость B=B(A) из граничного условия, получаем дифференциальное уравнение $\dot{A}=f(A)$. Начальное условие A(0) находим из соотношения $\bar{c}=B(0)=B(A(0))$.

Первое приближение окажется полезным и в ситуации, когда затруднительно варьировать значения \overline{T} , \overline{p} , v. Приведенная выше система уравнений $f_i = 0$ ($\psi = \beta(t) \exp \sigma x$, $\sigma = \sigma_{1,2}$) может оказаться плохо обусловленной. Уточним сопряженное уравнение для вариантов $\psi = \beta(t) \sin \sigma x$ ($\cos \sigma x$):

$$\begin{split} \Psi + X \sin \sigma \ell + Y \sigma [\cos \sigma \ell - 1] - \frac{1 - \cos \sigma \ell}{\sigma \bar{c}^{-1}} &= 0, \\ \Psi + X [1 + \cos \sigma \ell] - Y \sigma \sin \sigma \ell - \frac{\bar{c}}{\sigma} \sin \sigma \ell &= 0, \\ \Psi &= \int_0^\ell (\psi c)|_{t_*} dx, \ \beta(t) &= \exp \left\{ \sigma^2 \int_0^t D(\tau) \, d\tau \right\}. \end{split}$$

Вместо неизвестной концентрации $c(t_*, x)$ подставляем приближенное выражение $\tilde{c}(t_*,x;D,b)$. При этом можно оставить явную формулу по искомым коэффициентам D, b, или ограничиться подстановкой оценочных значений D, b, полученных решением обратной задачи по квадратичному приближению. Попутно изложен вариант схемы простых итераций. При необходимости, когда регистрируется только относительный масштаб $J/J_{\rm max}$, следует провести нормировку уравнений на $J_{\rm max}$ и соответствующие преобразования. В общем случае при $\dot{p}/\theta_1 \ll p/(\theta_0,\theta_1)$ во всех формулах делаем подстановку $J = \theta p$ и воспринимаем θ дополнительной переменной.

Если ограничиться отрезком $[0, \ell_0]$ $(c_x(t, \ell_0) = 0)$, то аналогично получаем

$$\begin{split} 0 &= \int_0^{\ell_0} (\psi c) \big|_{t_*} dx - \bar{c} \int_0^{\ell_0} \psi \big|_{t=0} dx + \\ &+ \int_0^{t_*} \!\! J\psi \big|_{x=0} dt + \int_0^{t_*} \!\! D \Big(c \, \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big) \big|_{x=0}^{\ell_0} dt. \end{split}$$

Концентрацию $c(t,\ell_0)$ аппроксимируем выражением $\tilde{c}(t,\ell_0;D,b)$ или функцией времени $\tilde{c}(t,\ell_0;\widetilde{D},\widetilde{b})$. Для $\psi=x,\,\psi=\beta(t)\exp\sigma x$ первым слагаемым пренебрегаем. В случае роста $\beta(t)$ следует вместо неизвестной концентрации

 $c(t_*,x)$ брать приближение $\tilde{c}(t_*,x)$ с переменными D,b или фиксированными оценочными значениями \tilde{D},\tilde{b} . Поскольку такие уравнения f=0 более грубые, то их целесообразно использовать в качестве стабилизаторов, добавляя к основным слагаемым в целевой функции МНК величину αf^2 с достаточно малым параметром регуляризации $\alpha > 0$.

Аналогично используется любая гладкая симметричная относительно $x=\ell_0$ вогнутая функция $\tilde{c}(t,x;A,B,\ldots)$. Помимо полиномов целесообразно использование фундаментального решения уравнения диффузии.

Функции Грина и уравнения Риккати

Перейдем к ТДС-модели с динамическими граничными условиями:

$$c_t(t,x) = D(t)c_{xx}, \ c(0,x) = \varphi(x) = \varphi(\ell-x),$$

$$c_0 = c_\ell = gq(t), \ \dot{q}(t) = -b(t)q^2(t) + D(t)c_x(t,0).$$

Выполняются равенства $c(t,x)=c(t,\ell-x)$, $c_x(t,0)=-c_x(t,\ell)$. Параметр локального равновесия поверхности и объема g считаем постоянным. Он получается из баланса

$$k^{+}(T)c_{0,\ell}(t) - k^{-}(T)q_{0,\ell}(t) = \pm D(T)c_{x}\Big|_{x=0,\ell}$$

в случае изотропности поверхности и относительной малости правой части: $g=k^-/k^+,$ $E_{k^-}\approx E_{k^+},\ c|_{x=0,\ell}=c_{0,\ell}(t)=gq_{0,\ell}(t).$ Вследствие симметрии $q_0=q_\ell=q,\ J=bq^2$ ($[b]={\rm cm}^2/{\rm s}$). Считаем $\varphi(x)=\bar c=g\bar q$. Равномерное начальное распределение растворенного водорода уже не противоречит граничному условию $\dot q=-bq^2+Dc_x(t,0)$ при $t\to+0$. В общем случае задача может оказаться жесткой, когда выполнено $|\dot q(0)|=b(0)\bar q^2\gg 1$.

Изложим несколько подходов к решению обратной задачи параметрической идентификации. Для этого сначала в компактной форме подытожим представленный выше материал для модели с объемной десорбцией, в которой $J(t) = b(t)c_{0,\ell}^2(t) = \pm D(t)c_x|_{0,\ell} \ \left([b] = \mathrm{cm}^4/\mathrm{s}\right).$

Считая потенциально функцию J(t) известной, переходим к линейной краевой задаче. Здесь два аналогичных варианта: фиксируем для уравнения диффузии граничные условия I рода $c_{0,\ell}(t) = I(t)/\sqrt{b(t)}, I \equiv \sqrt{J}$, или II рода $\pm D(t)c_x|_{0,\ell} = J(t)$. Для определенности остановимся на втором варианте. Линейность краевой задачи позволяет найти явное представление решения c(t,x) (а значит, и

интересующих нас концентраций $c_{0,\ell}(t)$) через соответствующую функцию Грина (функцию источников). Следует иметь в виду, что «явность» формулы условна при наличии символа бесконечной суммы. Полученное таким способом формальное выражение $c_{0,\ell}(t;D,b,J(\cdot))$ подставляем в уравнение измерений

$$I(t) = \sqrt{b(t)}c_{0,\ell}(t), \ t \in [t_1, t_2] \subset (0, t_*).$$

Здесь уже функция J(t) является конкретной входной информацией. Явное уравнение $F(t; D_0, E_D, b_0, E_b) = 0$ (тождество по t) используем для оценки коэффициентов диффузии и десорбции. Заменяем ряд частичной суммой, применяем методы моментов (для получения уравнений $f(D_0, E_D, b_0, E_b) = 0$) и наименьших квадратов $\|F\|_{L_2[t_1, t_2]} \to \min$.

Заметим, что можно расширить возможности для решения обратной задачи, добавив несколько иной вариант линеаризации исходной нелинейной модели: следуя схеме «предиктор-корректор», достаточно представить квадрат граничных концентраций $c_{0,\ell}^2(t)$ в форме $c_{0,\ell}(t)I(t)/\sqrt{b(t)}$.

Метод сопряженных уравнений дает дополнительное («независимое») семейство уравнений для оцениваемых параметров. При этом входные данные являются аргументом помехоустойчивых интегральных операторов. Для достаточно тонких мембран, когда основное внимание уделяем моделированию поверхностных процессов и возможно более грубое описание распределения концентрации в объеме, работоспособным оказывается параболическое приближение $\tilde{c}(t,x) \approx c(t,x)$. При этом переходим от распределенной модели к обыкновенным дифференциальным уравнениям, что существенно упрощает численное решение обратной задачи с точностью, соизмеримой с точностью ТДС-эксперимента. Эффективной представляется комбинация методов оценивания, чтобы избежать плохой обусловленности системы однотипных уравнений.

Адаптируем изложенное для динамических граничных условий. Условие начального насыщения и общий баланс имеют вид

$$\mu s(\overline{T})\bar{p} = b(\overline{T})[\bar{c}\,g^{-1}]^2,$$

$$\bar{c}\,\ell + 2\,\bar{q} = \bar{c}\,[\ell + 2g^{-1}] = 2\int_0^{t_*} J(\tau)\,d\tau.$$

Для оценки s_0, E_s необходимо как минимум два эксперимента при известных значениях

b, g. Основная проблема — определение коэффициентов $D_0, E_D, b_0, E_b, g.$

Применение функции Грина

Использование функции Грина для линейной краевой задачи II рода, как это делалось для модели с объемной десорбцией, остается без принципиальных изменений. Следует только вместо \widetilde{J} использовать функцию \widehat{G} :

$$c_x(t,0) = \tilde{G}(t) \equiv \dot{q}(t) + J(t)D^{-1}(t), \quad t = t'.$$

В исходном времени производная $\dot{q}(t)$ выражается через $b(t),\,J(t),\,\dot{J}(t)$ в силу определения $J=bq^2$. Но дифференцирование экспериментальных данных некорректно с вычислительной точки зрения. Для граничной объемной концентрации $c_0(t)=c_\ell(t)$ справедливо представление $c_0(t)=g\sqrt{b^{-1}J}=$

$$= \bar{c} - \int_0^t \{\dot{q}(\tau) + J(\tau)\} K(\gamma(t,\tau)) d\tau,$$
$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{\ell_0}\right)^2, \ \gamma(t,\tau) = \int_\tau^t D(s) ds,$$
$$K(s) = \frac{1}{\ell_0} \left[1 + 2\sum_{n=1}^\infty \exp\left\{-\mu_n s\right\} \right],$$

 $\ell=2\ell_0$. Ограничимся частичной суммой ряда и слагаемые с $\dot{q}(\tau)$ преобразуем по частям (именно в такой последовательности, иначе появятся расходящиеся ряды). В правой части после преобразований заменяем q(t) на выражение $\sqrt{J(t)/b(t)},\ q(0)=\bar{c}/g$. Интегралы можно подсчитывать как решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее для оценки величин $g,\ D_0,\ E_D,\ b_0,\ E_b$ применяем методы моментов и наименьших квадратов. Если температура постоянна $(T=\bar{T}),$ то $D,b=\mathrm{const},\ \gamma(t,\tau)=(t-\tau)D.$

Сопряженные уравнения

Приведем соотношения метода сопряженных уравнений для варианта $\varphi(x) = \bar{c}$. На решениях уравнения $\psi_t = -D\psi_{xx}$ получаем

$$0 = \int_{0}^{\ell} (\psi c)|_{t_{*}} dx - \bar{c} \int_{0}^{\ell} \psi(0, x) dx + \int_{0}^{t_{*}} (\dot{q} + J) [\psi(t, 0) + \psi(t, \ell)] dt + \int_{0}^{t_{*}} c_{0} D \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\ell} dt.$$
(11)

Выберем $\psi(t, x) = \beta(t) \exp \sigma x$,

$$\beta(t) = \exp\{-\sigma^2 \int_0^t D(\tau)d\tau\}.$$

Тогда первым слагаемым можно пренебречь в силу $\psi \to 0$, $c \to 0$ с ростом t. Слагаемое, содержащее \dot{q} , следует проинтегрировать по частям с учетом $\dot{\beta} = -D\sigma^2\beta$. Начальная концентрация $\bar{c} = g\bar{q} \ (q(0) = \bar{q})$ находится с точностью до неизвестного пока параметра $z = g\ell$ из материального баланса

$$\bar{c}\ell + 2\bar{q} = \bar{c}\ell[z+2]z^{-1} = 2\int_0^{t_*} J(\tau) d\tau \equiv S_*.$$

После элементарных преобразований соотношение (11) примет вид

$$f \equiv \sigma \ell \varkappa X + [\sigma \ell \varkappa + z] \sigma^2 Y - S_* \frac{z + \sigma \ell}{z + 2} = 0,$$

$$X \equiv \int_0^{t_*} \beta J \, dt, \quad Y \equiv \int_0^{t_*} \beta D \sqrt{b^{-1} J} \, dt, \quad (12)$$

 $\varkappa\equiv[\exp\sigma\ell+1][\exp\sigma\ell-1]^{-1}$. Целесообразно уравнение f=0 нормировать на $J_{\max}t_*$:

$$f \equiv \sigma \ell \bar{X} + [\sigma \ell \varkappa + z] \bar{Y} + \frac{z + \sigma \ell}{z + 2} \bar{S}_* = 0,$$

$$\bar{S}_* \equiv \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{J(t)}{J_{\text{max}}} dt, \ \bar{X} \equiv \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{J(t)}{J_{\text{max}}} \beta(t; D) dt,$$

$$\bar{Y} \equiv \frac{1}{t_*} \int_0^{t_*} \frac{\sigma^2 D(t)}{\sqrt{b(t) J_{\text{max}}}} \frac{I(t)}{I_{\text{max}}} \beta(t; D) dt.$$

В случае ТДС-эксперимента с температурой $T(t) = \overline{T} = \text{соnst}$ можно сделать интегралы не зависящими от оцениваемых параметров $D(\overline{T}), b(\overline{T})$ подстановкой $\sigma^2 = \overline{\sigma}^2/Dt_*$. В общем случае удобно фиксировать характерное значение энергии E_* и представлять экспоненту $\exp\{-E/RT\}$ в форме степени $u^{\nu}(t)$, где $u(t) \equiv \exp\{-E_*/RT\}$, $\nu = E/E_*$, T = T(t).

Как минимум для оценивания пяти параметров D_0 , E_D , b_0 , E_b , g по уравнениям f=0 при обработке данных одного эксперимента следует взять три значения σ , а другого эксперимента — два. Вместо варьирования σ лучше дополнительно использовать соотношения $f'_{\sigma}=0$. Коэффициент g исключается, если известна равновесная растворимость \bar{c} . К тому же есть еще параметры s_0 и E_s , для определения которых два эксперимента — минимум (без учета ошибок измерений). Поэтому целесообразно сначала экспериментальные данные обработать по модели с объемной десорбцией и зафиксировать полученные оценки D_0 ,

 E_D . Теперь уже в трех экспериментах можно в уравнениях (12) фиксировать только по одному значению σ . Имеем также в виду, что при отсутствии информации об абсолютных значениях потока J(t) и подстановке $J(t) = \theta p(t)$ появится дополнительная переменная θ .

Интегро-дифференциальное уравнение Риккати

Рассмотрим модель ТДС-дегазации с динамическими граничными условиями:

$$c_{t} = D(t)c_{xx}, \ c(0,x) = \varphi(x), \ c_{0} = c_{\ell} = gq(t),$$
$$\dot{q}(t) = R(t) - b(t)q^{2}(t) + D(t)c_{x}|_{0}, \ R(t) \equiv \mu sp,$$
$$p(t) = \theta_{1} \int_{0}^{t} J(\tau) \exp\left\{(\tau - t)\theta_{0}^{-1}\right\} d\tau, \ J \equiv bq^{2}.$$

Функцию R=R(t) (ресорбцию) отличаем от универсальной газовой постоянной R по контексту. Начальные данные симметричны $(\varphi(x)=\varphi(x-\ell)),\ g={
m const.}$ Для определенности $\varphi(x)=\bar{c}={
m const.}$ При необходимости можно внести поправку для варианта $\varphi(x)=\bar{c}-A[x-\ell_0]^2,\ A\equiv A_0>0,\ \ell=2\ell_0.$ Константа A при известной равновесной концентрации насыщения \bar{c} определяется по итогам дегазации. Для обратной задачи параметрической идентификации входными данными являются функции $p(t),\ J(t).$

Сделаем замену времени $t' = \int_0^t D ds$ (оставив прежнее обозначение t):

$$c_t(t,x) = c_{xx}, \ c(0,x) = \bar{c}, \quad c_0 = c_\ell = gq, \ (13)$$

$$c_x(t,0) = -c_x(t,\ell) = \dot{q}(t) + [J - R]D^{-1}.$$
 (14)

Считаем q(t) функциональным параметром, а уравнение (14) — дополнительным соотношением к линейной краевой задаче (13). Сделаем замену, приводящую граничные условия к однородным:

$$\hat{c}(t,x) = c(t,x) - gq(t), \quad \hat{c}_t(t,x) = \hat{c}_{xx} + f(t),$$

$$f(t) = -g\dot{q}(t), \quad \hat{c}(0,x) = \hat{\varphi}(x) = 0, \quad \hat{c}_{0,\ell} = 0.$$

Запишем решение с помощью функции Грина (функции источников):

$$\hat{c}(t,x) = \int_0^\ell G_1(x,\xi,t)\hat{\varphi}(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\ell G_1(x,\xi,t-\tau)f(\tau) d\xi d\tau,$$

$$G_1(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t\right\} \times$$

$$\times \sin\frac{n\pi x}{\ell} \sin\frac{n\pi \xi}{\ell}.$$

В динамические граничные условия входит производная $\hat{c}_x(t,0)$:

$$\hat{c}_x(t,0) = -\frac{4g}{\ell} \int_0^t \dot{q}(\tau) \sum_{t'} \exp\left\{\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} (\tau - t)\right\} d\tau,$$

 $\sum' \equiv \sum_{n=1,3,5...}$. При $\tau=t$ ряд расходится, так что подразумевается почленное интегрирование. В исходном времени получаем

$$c_x(t,0) = \hat{c}_x(t,0) = c_x(t,\ell) = \hat{c}_x(t,\ell) =$$

$$= -\frac{4g}{\ell} \sum_{t=0}^{t} \int_{0}^{t} \dot{q}(\tau) \exp\left\{-\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \int_{-\tau}^{t} D \, ds\right\} d\tau.$$

Окончательно динамическое граничное условие запишется в форме

$$\dot{q}(t) = R(t) - b(t)q^{2}(t) - \frac{4gD(t)}{\ell} \times$$

$$\times \sum_{t=0}^{t} \dot{q}(\tau) \exp\left\{-\frac{n^{2}\pi^{2}}{\ell^{2}} \int_{\tau}^{t} D(s) ds\right\} d\tau.$$
(15)

Аналогично рассматривается вариант квадратичного начального распределения $\varphi(x)$ $(q(0) = g^{-1}\varphi(0), \ \tilde{\varphi}(x) = -A[x - \ell_0]^2 + A\ell_0^2).$

Полученное уравнение (15) с квадратичной нелинейностью (которая входит и в функцию R(t) при «расшифровке» p(t)) будем классифицировать как интегро-дифференциальное уравнение Риккати нейтрального типа. Уравнение эквивалентно исходной краевой задаче в том смысле, что решение q(t) однозначно определяет решение c(t,x). Аналогия с функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа [6] связана с тем, что избавиться от производной \dot{q} в правой части интегрированием по частям нельзя, так как появится расходящийся ряд. Для аппроксимации можно ограничиться конечной суммой и проинтегрировать по частям. Нас интересует

отрезок $[t_1,t_2] \subset (0,t_*)$, соответствующий выраженному пику термодесорбции (измерения при $t \approx 0, t_*$ малоинформативны). Чтобы не оперировать большим числом слагаемых, целесообразна «склейка» частичных сумм двух разложений (9). При этом от интегралов можно избавиться введением новых переменных, переходя к системе уравнений. Для мощной вакуумной системы ресорбцией пренебрегают (R(t)=0), что упрощает уравнение.

Параболическое приближение. Для тонких мембран в качестве приближения распределения объемной концентрации примем

$$c \approx \tilde{c}(t, x) = B(t) - A(t)(x - \ell_0)^2,$$

$$B(0) = \bar{c}; \quad \varphi(x) = \bar{c} \Rightarrow A(0) = 0;$$

$$\varphi(x) = \bar{c} - A_0(x - \ell_0)^2 \Rightarrow A(0) = A_0.$$

 $2\ell_0 = \ell$. Связь поверхностной и объемной концентраций в форме условия быстрого растворения $gq(t) = \tilde{c}(t,0)$ и материальный баланс

$$q_0 + \int_0^{\ell_0} \varphi(x) \, dx = q(t) + \int_0^{\ell_0} \tilde{c}(t,x) \, dx + \int_0^t J(\tau) \, d\tau$$

дают представление функций A(t), B(t) через функцию q(t). Подставляя далее вместо $c_x(t,0)$ выражение $\tilde{c}_x(t,0)$ в исходное динамическое граничное условие, получаем искомую аппроксимацию — обыкновенное дифференциальное уравнение типа Риккати для поверхностной концентрации q(t).

Для обратной задачи оценки параметров модели ТДС-дегазации имеем скалярное уравнение для поверхностной концентрации q(t) и уравнение измерений $I(t) = \sqrt{b(t)}q(t)$ («фазовое состояние» известно с точностью до неизвестных априори параметров десорбции b_0, E_b). При использовании метода моментов интегрируем произведение $M(t)\dot{q}(t)$ по частям с последующей подстановкой выражения $q(t) = I(t)/\sqrt{b(t)}$ (или $q = \sqrt{\theta p}/\sqrt{b}$).

Оценка поверхностных параметров

Пусть в ТДС-эксперименте известна равновесная растворимость ($\bar{c}=k(T)\sqrt{p},\,T=\overline{T}$ — температура насыщения); температурная зависимость D(T) (D_0,E_D); начальное насыщение равномерное ($\varphi(x)=\bar{c}$); нагрев относительно медленный и практически равномерный ($T(t)=T_0+vt$). Поверхность конструкционного материала модифицирована (примеси,

окислы, напыление, шероховатость). Требуется оценить коэффициенты прилипания s, десорбции b ($J=bq^2$) и локального равновесия g. С точки зрения обратной задачи нас интересуют численные зависимости $s(T),\ b(T),\ g(T).$ Их физическая интерпретация зависит от выделенных стадий взаимодействия водорода с твердым телом. Считаем s,b,g обобщенными интегральными показателями переноса — эффективными коэффициентами абсорбции, рекомбинации и растворения. В изотропном приближении $g={\rm const},\ T\in[T^-,T^+].$

В рамках модели динамического взаимодействия поверхности и объема

$$\mu s \bar{p} = b \bar{q}^2 = b g^{-2} \bar{c}^2 \implies \bar{c} = g b^{-1/2} \sqrt{\mu s} \sqrt{p}$$

 $(T = \overline{T})$. Зная зависимости k(T), b(T) и значение g, находим s(T). Коэффициент g оценивается материальным балансом дегазации

$$\bar{\ell} + 2\bar{q} = \bar{c}\ell \left[1 + 2(g\ell)^{-1} \right] = 2\int_0^{t_*} J(\tau) d\tau,$$

что может потребовать высокой точности определения J(t), или непосредственно по известным данным \bar{c} , \bar{q} (например, \bar{q} соответствует монослою). Остается оценить коэффициент десорбции b(T). Ресорбцией пренебрегаем.

Ограничимся в уравнении (15) первым слагаемым суммы \sum' (во втором при n=3 уже на порядок меняется аргумент экспоненты):

$$\dot{q}(t) = -\frac{4gD(t)}{\ell\alpha(t)} \int_0^t \dot{q}(\tau)\alpha(\tau) d\tau - J(t),$$
$$\alpha(t) \equiv \exp\Big\{\frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^t D(s) ds\Big\}.$$

Домножая уравнение на $\alpha(t)$, получаем линейное уравнение

$$\dot{\gamma} = -\frac{4gD}{\ell} \gamma - \alpha J, \quad \gamma(t) \equiv \int_0^t \dot{q}(\tau) \alpha(\tau) d\tau.$$

Интегрируя с учетом $\gamma(0) = 0$, последовательно находим функции времени

$$\gamma(t), \ \dot{\gamma}(t), \ \dot{q}(t) = \alpha^{-1}(t)\dot{\gamma}(t),$$

$$q(t) = -\int_{t}^{t_*} \alpha^{-1}(\tau) \dot{\gamma}(\tau) d\tau \equiv f(t) \left(q(t_*) \approx 0 \right).$$

Подставляя выражение q(t) = f(t) в соотношение $J(t) = b(t)q^2(t)$, имеем

$$\Lambda(t) \equiv \ln \left\{ J(t) f^{-2}(t) \right\} =$$

$$= \ln b_0 - \nu 10^4 [RT(t)]^{-1} (10^4 \nu = E_b), \ t \in [t_1, t_2].$$

В координатах $\{T^{-1},\Lambda\}$ $(\{T,T\Lambda\})$ это отрезок прямой, по пересечениям которой с осями координат вычисляются оценки значений b_0, E_b .

Укажем следующий шаг итерационной процедуры. Фиксируя функцию $\gamma_1(t) \equiv \gamma(t)$, учтем второе слагаемое в $\sum_{i=1}^{r} (n^2 = 9)$:

$$\dot{q}(t) = -\frac{4gD(t)}{\ell\alpha(t)} \gamma_1(t) - \frac{4gD(t)}{\ell} \alpha^{-n^2}(t) \int_0^t \dot{q}(\tau) \alpha^{n^2}(\tau) d\tau - J(t).$$

Обозначая интеграл через $\gamma_2(t)$, приходим к линейному уравнению $\dot{\gamma}_2 = -4gD\ell^{-1}\gamma_2 - \dots$ и соответствующему уточнению $q(t) = f_2(t)$.

Литература

- 1. *Взаимодействие* водорода с металлами / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987.
- 2. *Водород* в металлах / Ред. Г. Алефельд и В. Фелькль. М.: Мир, 1981.
- 3. Кунин Л. Л., Головин А. И., Суровой Ю. И., Хохрин В. М. Проблемы дегазации металлов. М.: Наука, 1972.
- 4. *Марчук Г. И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
- 5. Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярко С. С. Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008.
- 6. *Хейл Джс.* Теория функциональнодифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
- 7. Indeitsev D. A., Semenov B. N. About a model of structure-phase transfomations under hydrogen influence // Acta Mechanica. 2008. Vol. 195. P. 295–304.
- 8. Gabis I. E. The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids // Technical Physics. 1999. Vol. 44, N. 1. P. 90–94.
- 9. Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V. Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, N. 1. P. 1239–1247.

- 10. Sakintuna B., Lamari-Darkrim F., Hirscher M., Dogan B. Metal hydride materials for solid hydrogen storage: a review // International Journal of Hydrogen Energy. 2007. Vol. 32, N 9. P. 1121–1140.
- 11. Varin R. A., Czujko T., Wronski Z. S. Nanomaterials for solid state hydrogen storage. Springer, New York, 2009.
- 12. Vlasov N. M., Fedik I. I. Hydrogen segregation in the area of threefold junctions of grain boundaries // International Journal of Hydrogen Energy. 2002. Vol. 27. P. 921–926.
- 13. Zaika Yu. V., Bormatova E. P. Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, N. 1. P. 1295—1305.
- 14. Zaika Yu. V. Identification of a hydrogen transfer model with dynamical boundary conditions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2004. N 4. P. 195–216.
- 15. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // Applied Mathematical Modelling. Elsevier. 2009. Vol. 33, N 10. P. 3776–3791.
- 16. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Hydrogensolid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // Mathematical Modeling. Nova Sci. Publishers. 2012. P. 269–302.
- 17. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Hydrogensolid boundary-value problems with free phase transition interface // Advances in Mathematics Research. Vol. 15. Nova Sci. Publishers. 2012. P. 128–180.
- 18. Zajec B. Hydrogen permeation barrier Recognition of defective barrier film from transient permeation rate // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36. P. 7353–7361.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Заика Юрий Васильевич

зав. лаб. моделирования природнотехнических систем, д. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: zaika@krc.karelia.ru тел.: (8142) 766312

Zaika, Yury

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Russia e-mail: zaika@krc.karelia.ru tel.: (8142) 766312 УДК 519.216.5

ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ В УРНОВОЙ СХЕМЕ

А. А. Ивашко

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассмотрена задача оптимальной двукратной остановки, в которой необходимо максимизировать значение полученной прибыли при покупке, а затем продаже финансового актива. Найдены оптимальные стратегии и выигрыши в данной задаче.

 ${\rm K}$ лючевые слова: оптимальная остановка, выборка из урны, задача о баллотировке.

A. A. Ivashko. GAIN MAXIMIZATION PROBLEM IN THE URN SCHEME

The optimal double-stopping problem of gain maximization when buying and selling financial assets is considered. The optimal stopping strategies and payoffs are obtained.

Key words: optimal stopping, urn sampling, ballot problem.

Введение

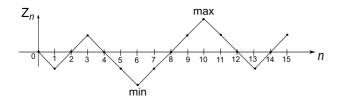
В работе рассматривается следующая многошаговая модель покупки-продажи финансового актива в дискретном времени. Ведется наблюдение за изменением цен на финансовый актив в течение заданного промежутка времени. Цель наблюдателя — сначала купить, а потом продать актив, при этом максимизировав свою прибыль — разность между ценой продажи и покупки. В каждый момент времени необходимо решить: остановиться на текущем уровне цены или продолжить процесс выбора. Предполагается, что значения цен распределены согласно урновой схеме.

Данная ситуация моделируется с помощью следующей задачи оптимальной двукратной остановки в урновой схеме. Пусть в урне имеется m_0 отрицательных и p_0 положительных шаров. Из урны вынимаются шары последовательно по одному в каждый момент времени

без возвращения. Значение -1 соответствует отрицательному шару, а значение +1 — положительному. Обозначим последовательность

$$Z_0 = 0$$
, $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $1 \leqslant n \leqslant m_0 + p_0$,

где X_k — значение шара, выбранного в момент k. Данная последовательность формирует некоторую траекторию (см., например, рис. 1). В каждый момент времени при выборе шара необходимо принять решение об остановке или продолжении наблюдения. В задаче необходимо максимизировать среднее значение разности между максимальным и минимальным выбранным значением. Будем называть первую остановку покупкой финансового актива, а вторую — продажей.



 $Puc.\ 1.\$ Пример траектории Z_n для $p_0=8,\ m_0=7$

Модели с одной остановкой в урновой схеме были рассмотрены в различных вариантах в зависимости от целей игрока. В работе Л. Шеппа [6] была исследована задача, в которой необходимо максимизировать значение полученного выигрыша от одной остановки. М. Тамаки [8] получил решение в задаче максимизации вероятности остановки на наибольшем значении траектории. В работе А. А. Ивашко [1] было рассмотрено обобщение задачи М. Тамаки на случай двукратной остановки. В. В. Мазалов, М. Тамаки [5] рассмотрели вариант задачи о продолжительности нахождения случайного блуждания в наилучшем состоянии. Модели двукратной остановки последовательностей одинаково распределенных случайных величин можно найти в работах М. Л. Николаева [3], Г. Софронова и др. [7], В. В. Мазалова, А. А. Фалько [2, 4].

В данной работе рассмотрено обобщение задачи Л. Шеппа [6] на случай двукратной остановки. Найдено оптимальное поведение наблюдателя в классе пороговых стратегий, а также получены значения его выигрыша.

Решение задачи с одной остановкой

Предположим для определенности $p_0 = m_0$. Пусть из урны уже вынули n шаров и известны значения $\{Z_i\}_{i=1}^n$. Также известно, что в урне все еще осталось m отрицательных шаров и p положительных, т. е. изначально было $n+m+p=p_0+m_0$ шаров. Обозначим данное состояние (m,p).

Исходная задача двукратной остановки решается методом динамического программирования в два этапа. Сначала необходимо найти правило остановки траектории для продажи финансового актива при условии, что покупка уже сделана. А затем найти оптимальное значение момента остановки для покупки.

Сначала рассмотрим задачу с одной остановкой, в которой необходимо продать финансовый актив по наибольшей цене. Обозначим V(m,p) — выигрыш в состоянии (m,p). Так как при нахождении в состоянии (m,p) траектория может пойти вверх при выборе положи-

тельного шара с вероятностью $\frac{p}{m+p}$ и вниз при выборе отрицательного шара с вероятностью $\frac{m}{m+p}$, то выигрыш V(m,p) равен

$$V(m,p) = \max \left\{ m - p, \frac{p}{m+p} V(m, p-1) + \frac{m}{m+p} V(m-1, p) \right\}.$$

Выигрыш при продолжении наблюдения равен

$$V(m,p) = \frac{p}{m+p}V(m,p-1) + \frac{m}{m+p}V(m-1,p),$$

$$V(0,p) = 0.$$
(1)

Рассмотрим выигрыш при продолжении в следующем виде

$$V(m,p) = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n(m)}{p+n},$$
 (2)

где $a_n(m)$ — некоторые числовые коэффициенты.

Теорема 1. Выигрыш при продолжении V(m,p) имеет вид

$$V(m,p) = \sum_{l=1}^{m} \frac{a_1(l)}{l} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{m-i}{m+p-i},$$
 (3)

где числовые коэффициенты $a_1(l)$ вычисляются рекурсивно.

 \mathcal{A} оказательство. Подставляя значение $V(m,p)=\sum\limits_{n=1}^{m}rac{a_{n}(m)}{p+n}$ в уравнение (1), получим

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n(m)}{p+n} = \frac{p}{m+p} \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n(m)}{p+n-1} + \frac{m}{p+m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_n(m-1)}{p+n}.$$
(4)

Сгруппируем слагаемые с одинаковым знаменателем и рассмотрим отдельно выражения следующего вида:

$$\frac{pa_n(m) + ma_{n-1}(m-1)}{(p+m)(p+n-1)}, n = 2, ..., m.$$

Представим данное выражение в виде суммы двух дробей:

$$\frac{pa_n(m) + ma_{n-1}(m-1)}{(p+m)(p+n-1)} = \frac{A_n}{p+m} + \frac{B_n}{p+n-1},$$

$$n = 2, ..., m,$$

и найдем коэффициенты A_n и B_n методом неопределенных коэффициентов.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} A_n + B_n = a_n(m), \\ (n-1)A_n + mB_n = ma_{n-1}(m-1), \end{cases}$$

получим, что

$$A_n = a_n(m) - B_n,$$

 $B_n = \frac{ma_{n-1}(m-1) - (n-1)a_n(m)}{m-n+1}.$

Далее, приравнивая выражения с одинаковыми знаменателями в левой и правой частях (4), находим, что

$$a_{n-1}(m) = B_n = \frac{ma_{n-1}(m-1) - (n-1)a_n(m)}{m-n+1},$$

 $n = 2, ..., m.$

Отсюда выразим $a_n(m)$

$$a_n(m) = \frac{ma_{n-1}(m-1) - (m-n+1)a_{n-1}(m)}{n-1},$$

 $n = 2, ..., m.$

Отдельно рассмотрим числители дробей со знаменателем p+m. Получим

$$a_m(m) = a_1(m) + \sum_{n=2}^m (a_n(m) - a_{n-1}(m)) = a_m(m).$$
 Эффициентов $a_1(m)/m$ для различных $m = 1, ..., 10.$

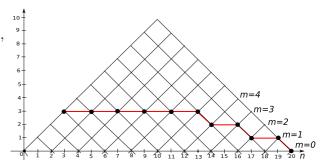
Используя рекурсию (5), находим формулу для вычисления коэффициентов $a_n(m), n =$

$$a_n(m) = \sum_{k=0}^{n-1} a_1(m-k)(-1)^{n+k+1} {m-2 \choose m-n} {n-1 \choose k} \times \frac{m(m-1)}{(n-1)(m-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_1(m-k)(-1)^{n+k+1} \times \frac{m!}{(m-n)!k!(n-k-1)!(m-k)}.$$

Преобразовывая это выражение и подставляя его в формулу (2), получим (3).

Для того чтобы найти точное выражение выигрыша, необходимо последовательно определить $a_1(l), l = 1, 2, ..., m$, используя следующий алгоритм (см. рис. 2):

- Предполагаются известными $a_1(l), l = 1, 2, ..., m - 1$, и оптимальное значение $p_{m-1}^* = \max\{p: V(m-1,p) = m-1-p\}$ для заданного m-1 (начальные значения $a_1(1) = 1, p_1^* = 0$;
- Находим $a_1(m)$ из уравнения $V(m, p_{m-1}^*) =$
- Если $V(m, p_{m-1}^* + 1) > m (p_{m-1}^* + 1)$, то
- Если $V(m,p_{m-1}^*+1)\leqslant m-(p_{m-1}^*+1)$, то $p_m^*=p_{m-1}^*+1$ и $a_1(m)$ решение уравнения $V(m,p_{m-1}^*+1)=m-(p_{m-1}^*+1)$.



Puc. 2. Границы принятия решения для $m_0 = p_0 = 10$

В таблице 1 представлены значения ко-

Таблица 1. Значения $a_1(m)/m$ для различных значений m

| m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| $\frac{a_1(m)}{m}$ | 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 23 | 49 | 52 | 76 | 99 |

Выигрыши при продолжении имеют следующий вид для $\hat{m} = \bar{1}, 2, 3, 4$:

$$V(1,p) = \frac{1}{p+1};$$

$$V(2,p) = \frac{2}{p+1};$$

$$V(3,p) = \frac{9}{p+1} - \frac{12}{p+2} + \frac{6}{p+3};$$

$$V(4,p) = \frac{20}{p+1} - \frac{24}{p+2} + \frac{0}{p+3} - \frac{8}{p+4}.$$

Задача двукратной остановки

Рассмотрим задачу двукратной остановки, в которой необходимо максимизировать среднее значение разности между максимальным и минимальным выбранными значениями цены финансового актива.

Так же, как и ранее, для простоты положим $p_0 = m_0$. Пусть траектория находится в состоянии (m, p).

Обозначим $V_{(m_1,p_1)}(m,p)$ — выигрыш при продаже в состоянии (m,p), если покупка была сделана в состоянии (m_1,p_1) , U(m,p) — выигрыш при покупке в состоянии (m,p).

Выигрыш в задаче оптимальной однократной остановки вычисляется по формуле

$$\begin{array}{rcl} V(m,p) & = & \displaystyle \max \biggl\{ m-p, \frac{p}{m+p} V(m,p-1) + \\ & + & \displaystyle \frac{m}{m+p} V(m-1,p) \biggr\}. \end{array}$$

Выигрыш при продаже в состоянии (m, p), если покупка была сделана в состоянии (m_1, p_1) , имеет вид

$$\begin{split} &V_{(m_1,p_1)}(m,p) = \max \left\{ m - p - (m_1 - p_1), \\ &\frac{p}{m+p} V_{(m_1,p_1)}(m,p-1) + \frac{m}{m+p} V_{(m_1,p_1)}(m-1,p) \right\} = \\ &= \max \left\{ m - p, \frac{p}{m+p} V(m,p-1) + \right. \\ &\left. + \frac{m}{m+p} V(m-1,p) \right\} - (m_1 - p_1). \end{split}$$

Из вида выигрыша получаем, что пороги принятия решения об остановке при продаже актива в задаче двукратной остановки совпадают с порогами в задаче с однократной остановкой.

Выигрыш при покупке в состоянии (m,p) вычисляется по формуле

$$\begin{split} &U(m,p) = \\ &= \max \left\{ \frac{p}{m+p} V_{(m,p)}(m,p-1) + \frac{m}{m+p} V_{(m,p)}(m-1,p), \right. \\ &\left. \frac{p}{m+p} U(m,p-1) + \frac{m}{m+p} U(m-1,p) \right\} = \\ &= \max \left\{ V(m,p) - (m-p), \frac{p}{m+p} U(m,p-1) + \right. \\ &\left. + \frac{m}{m+p} U(m-1,p) \right\}. \end{split}$$

Обозначим au_1^*, au_2^* — оптимальные моменты остановки для покупки и продажи соответ-

ственно. Тогда

$$\tau_1^* = \min\{k : 1 \leqslant k \leqslant p_0 + m_0 - 1, \\ Z_k \leqslant V(m, p) - \frac{p}{m+p} U(m, p-1) - \frac{m}{m+p} U(m-1, p)\};$$

$$\begin{array}{l} \tau_2^* = \min\{n: \tau_1^* \leqslant n \leqslant p_0 + m_0, \\ Z_n \geqslant \frac{p}{m+p} V(m,p-1) + \frac{m}{m+p} V(m-1,p)\}\}. \end{array}$$

Найдем выражения для вычисления выигрыша U(m,p) при продолжении наблюдения аналогичным образом, как и в предыдущем разделе. Выигрыш при продолжении равен

$$U(m,p) = \frac{p}{m+p} U(m,p-1) + \frac{m}{m+p} U(m-1,p).$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Выигрыш при продолжении U(m,p) имеет вид

$$U(m,p) = \sum_{l=1}^{p} \frac{b_1(l)}{l} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{p-i}{m+p-i},$$

где числовые коэффициенты $b_1(l)$ вычисляются рекурсивно.

Доказательство теоремы проводится аналогично теореме 1.

Для нахождения $b_1(l)$, l=1,2,...,p используем следующий алгоритм (начальные значения $b_1(1)=1,\,m_1^*=1$):

- Знаем $b_1(l)$, l = 1, 2, ..., p 1, $m_{p-1}^* = \max\{m : U(m, p 1) = V(m, p 1) (m p + 1)\};$
- Находим $b_1(m)$ из уравнения $U(m_{p-1}^*,p)=$ $=V(m_{p-1}^*,p)-(m_{p-1}^*-p);$
- Если $U(m_{p-1}^*+1,p)>V(m_{p-1}^*+1,p) -(m_{p-1}^*+1-p),$ то $m_p^*=m_{p-1}^*;$
- Если $U(m_{p-1}^*+1,p) \leqslant V(m_{p-1}^*+1,p) -(m_{p-1}^*+1-p)$, то $m_p^*=m_{p-1}^*+1$ и $b_1(p)$ решение уравнения $U\left(m_{p-1}^*+1,p\right) = V(m_{p-1}^*+1,p) (m_{p-1}^*+1-p)$.

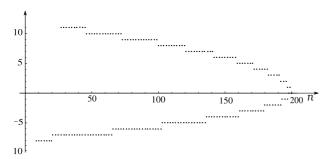
В таблице 2 представлены значения коэффициентов $b_1(p)/p$ для различных p=1,...,10.

 $\it Taблица~2.~$ Значения $\it b_1(p)/p$ для различных значений $\it p$

| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|
| $\frac{b_1(p)}{p}$ | 1 | 2 | 3 | 6 | 13 | 32 | 44 | 88 | 179 | 322 |

На рисунке 3 представлены границы принятия решений при покупке (нижняя) и продаже (верхняя) финансового актива для m_0 =

 $p_0 = 100$. Оптимальная стратегия наблюдателя — принять решение о покупке актива, как только траектория достигнет нижней границы, а затем принять решение о продаже актива, как только траектория достигнет верхней границы.



 $Puc.\ 3.\ \Gamma$ раницы принятия решения для $m_0=p_0=100$

Как видно на рисунке, граница принятия решения о покупке актива ближе к оси абсцисс, чем граница принятия решения о его продаже. Это связано с тем, что наблюдателю необходимо сделать двойной выбор, поэтому после того, как он уже купил акцию, его шансы получить больший выигрыш растут.

Заключение

В статье рассмотрена задача оптимальной двукратной остановки, в которой необходимо максимизировать значение полученной прибыли при покупке, а затем продаже финансового актива. Получено оптимальное поведение наблюдателя в классе пороговых стратегий. Представлены результаты численного моделирования.

Автор выражает благодарность проф. В. В. Мазалову за помощь в постановке задачи и обсуждении полученных результатов.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ивашко Анна Антоновна

научный сотрудник, к. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: aivashko@krc.karelia.ru тел.: (8142) 766312

Работа поддержана грантами РФФИ, проект 10-01-00089a, проект 13-01-91158- $\Gamma\Phi EHa$, а также Отделением математических наук и Программой стратегического развития Π emp ΓV .

Литература

- 1. *Ивашко А. А.* Максимизация вероятности успеха в задаче оптимальной двукратной остановки для урновой схемы // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии, вып. 3. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2012. № 5. С. 33–37.
- 2. *Мазалов В. В., Фалько А. А.* Задача наилучшего выбора и ее применение в рекламных кампаниях поисковой системы Яндекс // Интернет-Математика 2007. Яндекс, 2007. С. 126–134.
- 3. Николаев M. Л. Об оптимальной многократной остановке марковских последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, вып. 2. С. 374–382.
- 4. Фалько А. А. Задача наилучшего выбора двух объектов // Методы математич. моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ Карельского НЦ РАН. Вып. 8. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2007. С. 34–42.
- 5. Mazalov V. V., Tamaki M. Duration problem on trajectories // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. 2007. Vol. 79(3–4). P. 211–218.
- 6. Shepp L. A. Explicit solutions to some problems of optimal stopping // Annals of Mathematical Statistics. 1969. N 40. P. 993–1010.
- 7. Sofronov G., Keith J., Kroese D. An optimal sequential procedure for a buying-selling problem with independent observations // J. Appl. Prob. 2006. Vol. 43. P. 454–462.
- 8. Tamaki M. Optimal stopping on trajectories and the ballot problem // Journal of Applied Probability. 2001. N 38. P. 946–959.

Ivashko, Anna

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: aivashko@krc.karelia.ru

tel.: (8142) 766312

УДК 51-76

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ В АЭРОТЕНКЕ

А. H. Кириллов¹, **H.** В. Смирнов²

¹Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Предложена математическая модель взаимосвязанных процессов нитрификации и окисления активным илом легко биоразложимых органических веществ. На основе методов теории чувствительности определяются подмножества идентифицируемых параметров, находятся характеристики параметрической идентифицируемости модели и значения параметров.

Ключевые слова: аэротенк, нитрификация, окисление, дифференциальные уравнения, параметрическая идентификация.

A. N. Kirillov, N. V. Smirnov. PARAMETER ESTIMATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE BIOLOGICAL TREATMENT PROCESS IN AN AERATION TANK

A mathematical model of nitrification and oxidation of readily biodegradable organic matter by active sludge is proposed. Subsets of identifiable parameters are determined. Parametric identifiability characteristics of the model and values of the parameters were found out by means of the sensitivity theory.

 ${\rm K\,e\,y}\ \ {\rm w\,o\,r\,d\,s};$ aeration, nitrification, oxidation, differential equations, parameter estimation.

Введение

Очистка сточных вод является одной из наиболее важных задач рационального природопользования. В настоящее время широкое распространение получила биологическая очистка воды, которая включает в себя множество процессов [3, 5, 6]. При этом математическое моделирование является основным инструментом исследования и управления этими процессами [1, 10, 11] и др.

В 1987 г. группой исследователей под руководством М. Хенце (М. Henze) была предложена динамическая модель процесса биоочист-

ки (ASM1) [12], имеющая методологический характер и задающая направления дальнейших исследований. При этом значения параметров моделей и вид правых частей соответствующих дифференциальных уравнений существенно зависят от конкретных очистных сооружений [9, 13].

Вследствие объективной невозможности учесть все процессы, происходящие при биоочистке, а также малого количества экспериментальных данных и их «зашумленности» оценка параметров моделей является трудноразрешимой задачей. Для параметрической

 $^{^2}$ Π етрозаводский государственный университет

идентификации предлагаются различные подходы, в том числе использующие метод функций Ляпунова [7], метод максимального правдоподобия [14], методы теории чувствительности [15].

На основе [13] авторы в [4], используя компартментальный подход, предложили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для описания процесса биоочистки. В правые части уравнений введены пороговые функции, позволяющие учесть преимущественное протекание процессов окисления легко биоразложимых органических веществ и нитрификации в соответствующих зонах аэротенка.

В данной статье, в отличие от [4], предлагается модель с переменной структурой, что позволяет более адекватно описывать процесс биоочистки. Используя методы теории чувствительности [9], находятся характеристики идентифицируемости параметров модели и подмножество параметров, идентифицируемых с достаточной точностью. На основе [15] решается задача параметрической идентификации. При этом в связи с нехваткой экспериментальных данных использован метод сканирования, результаты которого уточнены с помощью функций чувствительности.

Математическая модель процесса биоочистки

Рассматривается процесс биологической очистки сточных вод в аэротенке, в котором происходит идеальное перемешивание иловой смеси. Аэротенк (рис.) состоит из трех коридоров, условно разделенных на пять компартментов $C_n, n=1,\ldots,5$, границы которых соответствуют точкам отбора проб. Иловая смесь, пройдя регенератор (первый коридор), попадает во второй коридор аэротенка, где она перемешивается со сточной водой. Состояние иловой смеси в выделенном объеме характеризуется постоянными для каждого компартмента параметрами и переменными концентрациями микроорганизмов активного ила, субстрата.

Введем обозначения (для простоты записи не будем использовать в них номера компартментов): S_O — концентрация растворенного кислорода; $S_N^{in}, S_{NH}^{in}, X_H^{in}, X_A^{in}$ — концентрации легко биоразложимых органиче-

ских веществ, аммония, гетеротрофных микроорганизмов, автотрофных микроорганизмов соответственно на входе в аэротенк; S_S, S_{NH}, X_H, X_A — концентрации тех же субстратов и микроорганизмов на выходе из аэротенка; $K_S, K_{NH}, K_{O,H}, K_{O,A}$ — константы полунасыщения: гетеротрофов легко биоразложимыми органическими веществами, автотрофов аммонием, гетеротрофов кислородом, автотрофов кислородом соответственно; Y_H и ${
m Y}_A$ — константы перехода массы легко биоразложимого органического субстрата в биомассу гетеротрофов и массы аммония в биомассу автотрофов соответственно; μ_H и μ_A — максимальные скорости роста гетеротрофов и автотрофов соответственно; b_H и b_A — скорости распада гетеротрофов и автотрофов соответственно.

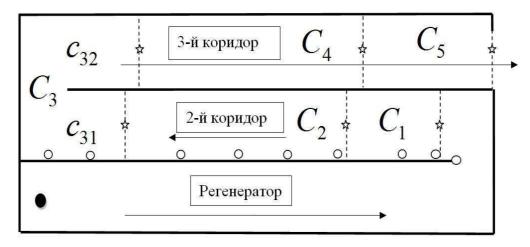
Концентрация S_S характеризуется значением БПКполн (полное биохимическое потребление кислорода для окисления субстрата). Как показывает практика, активный ил не окисляет весь субстрат к концу аэротенка, поэтому введем константу c>0 — остаточную концентрацию органики. В качестве c можно использовать значение БПКполн очищенной от активного ила жидкости на выходе из аэротенка.

Для описания процесса подавления гетеротрофами автотрофов при конкуренции за кислород введены пороговые функции [4]:

$$f_1(\mathbf{S}_S) = \frac{1}{1 + e^{10^6 \left(\frac{c+\delta}{\mathbf{S}_S} - 1\right)}},$$
$$f_2(\mathbf{S}_S, \mathbf{S}_{NH}, \mathbf{K}_{\alpha}) = \frac{\mathbf{S}_{NH}/(\mathbf{S}_S - c)}{\mathbf{K}_{\alpha} + \mathbf{S}_{NH}/(\mathbf{S}_S - c)},$$

где K_{α}, δ — некоторые положительные постоянные, характеризующие переключение процессов окисления и нитрификации. Компьютерные эксперименты показали, что значение $\delta=10^{-3}$ достаточно для осуществления описанного выше переключения. Значение $K_{\alpha}\in [3,5]$ (экспертная оценка) зависит от компартмента.

Рассмотрим математическую модель процесса биоочистки (1)–(4), предложенную в [4], где $f(x,p)=\frac{x}{x+p}$ — трофическая функция Моно, Q — суммарный расход сточной воды и смеси ила:



– место вхождения сточной воды в аэротенк;

место вхождения иловой смеси в аэротенк;

★ – место отбора проб;

направление движения иловой смеси;

---- – граница компартмента.

Схема аэротенка

$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - \frac{\mu_H}{Y_H} f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{10^6 \left(\frac{c + \delta}{S_S} - 1\right)}} X_H, \tag{1}$$

$$\dot{S}_{NH} = Q(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \frac{\mu_A}{Y_A} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH}/(S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH}/(S_S - c)} X_A,$$
(2)

$$\dot{X}_{H} = Q(X_{H}^{in} - X_{H}) + \left(\mu_{H} f(S_{S}, K_{S}) f(S_{O}, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{10^{6} (\frac{c+\delta}{S_{S}} - 1)}} - b_{H}\right) X_{H},$$
(3)

$$\dot{X}_{A} = Q(X_{A}^{in} - X_{A}) + \left(\mu_{A}f(S_{NH}, K_{NH})f(S_{O}, K_{O,A}) \frac{S_{NH}/(S_{S} - c)}{K_{\alpha} + S_{NH}/(S_{S} - c)} - b_{A}\right)X_{A}.$$
 (4)

В активном иле выделяются две группы микроорганизмов: гетеротрофные и автотрофные с концентрациями X_H и X_A соответственно, которые окисляют субстрат в сточной воде. При насыщении микроорганизмов определенным типом субстрата они временно прекращают его изъятие из сточной воды, вследствие чего изменяются параметры модели. Так как иловая смесь проходит каждый компартмент за достаточно малый промежуток времени, будем считать значения параметров в каждом C_n постоянными.

Календарный год можно разбить на периоды, в каждом из которых суточный объем приходящей сточной воды и концентрации разных типов субстрата в ней можно считать постоянными. При наличии разных типов субстрата гетеротрофы преимущественно окисляют лег-

ко биоразложимый субстрат, что происходит в основном во втором коридоре аэротенка. При достаточном приближении S_S к значению c гетеротрофы начинают окислять другие типы субстрата. Активизация этого процесса требует некоторого времени, поэтому окисление других типов субстрата в основном происходит в третьем коридоре. Для описания этого процесса переключения предлагается для компартментов третьего коридора уравнения (1), (3) заменить соответственно на уравнения:

$$\dot{\mathbf{S}}_S = Q(\mathbf{S}_S^{in} - \mathbf{S}_S) - \frac{1}{1 + e^{10^6 \left(\frac{c+\delta}{\mathbf{S}_S} - 1\right)}} \mathbf{X}_H, \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{H} = Q(\mathbf{X}_{H}^{in} - \mathbf{X}_{H}) + \beta \frac{\mathbf{V}_{cv}}{\mathbf{V}_{il}} \mathbf{X}_{H}, \qquad (6)$$

где V_{cv} , V_{il} — расходы сточной воды и активного ила соответственно, β — параметр, характеризующий удельную скорость роста гетеротрофов за счет окисления других типов субстрата, не являющихся легко биоразложимой органикой. Параметр β определяется экспертом. Таким образом, динамика процесса описывается системой с переменной структурой.

К моменту вхождения в C_5 активный ил окислил большую часть субстрата (которую потенциально мог окислить), вследствие чего уменьшается скорость роста микроорганизмов активного ила, число отмирающих клеток не компенсируется образованием новых. В результате параметр β в C_5 принимает значение меньше нуля.

Отметим, что в сточной воде содержатся вещества, ингибирующие окислительные свойства микроорганизмов (тяжелые металлы, фенолы, поверхностно-активные вещества и др.), поэтому с увеличением объема сточной воды в иловой смеси уменьшается скорость окисления субстрата активным илом. К концу второго коридора в иловую смесь попадает большое количество ингибирующих веществ. Уменьшение скорости окислительных реакций учтено путем уменьшения μ_A . В результате этот параметр может выходить за границы области допустимых значений.

Таким образом, динамику концентраций в каждом компартменте описывают соответствующие уравнения из (1)–(6). Компартмент C_3 условно разделим на два субкомпартмента c_{31} , c_{32} так, что начало c_{31} совпадает с началом C_3 . Для определения конца c_{31} (начала c_{32}) находится момент времени, к которому органика окислена до уровня c. Динамику концентраций в C_1, C_2, c_{31} описывают уравнения (1)–(4), а в c_{32} , C_4 , C_5 –(2), (4), (5), (6).

Параметрическая идентификация

В качестве экспериментальных данных для численного моделирования использованы: БПК полн в начале C_1 и в конце C_5 , концентрации аммония \mathbf{S}_{NH} , кислорода \mathbf{S}_O и общая концентрация микроорганизмов X на границах компартментов. Все данные были получены на очистных сооружениях г. Петрозаводска в марте 2013 г.

Специфика получения концентрации микроорганизмов активного ила такова, что в значение X также входят концентрации отмерших клеток активного ила и субстрата, абсорбированного живыми клетками. Дальнейшие рассуждения основываются на двух предположениях. Суть первого в том, что абсорбированный субстрат через некоторое время преобразуется в биомассу активного ила, второго — часть отмерших клеток удаляется вместе с избыточным активным илом после каждого прохождения иловой смесью аэротенка, что позволяет поддерживать соотношение отмерших и живых клеток активного ила на некотором уровне. Таким образом, экспериментальное значение X с достаточной точностью является концентрацией микроорганизмов. Чтобы в X выделить X_A и X_H , воспользуемся соотношением этих концентраций из [8].

При получении экспериментальных данных общепринятая в практике допустимая погрешность по концентрации аммония составляет ± 0.5 г/м³ (экспертная оценка), по концентрации микроорганизмов — 14 % (по принятым нормам).

В каждом компартменте идентифицируются параметры, которые входят в уравнения, соответствующие этому компартменту. Вследствие отсутствия экспериментальных данных в конце c_{31} для нахождения значений концентраций на выходе из этого субкомпартмента использовались значения параметров из C_2 .

Пусть n_p — количество параметров модели, T — символ операции транспонирования, $P=(p_1,\ldots,p_{n_p})^T$ — вектор параметров: $P\in\Pi=\{P:p_j\in[\underline{P}_j,\overline{P}_j]\}\in R^{n_p},$ $j=1,\ldots,n_p$, где \underline{P}_j и \overline{P}_j — нижняя и верхняя границы допустимых значений параметра p_j соответственно. Методом сканирования [2] для каждого C_n находится вектор параметров $P^0=(p_1^0,p_2^0,\ldots,p_{n_p}^0)^T$, доставляющий минимум критерию оптимальности

$$J = \sum_{i=1}^{n_y} sc_i^2 (y_i - y_i^m(P))^T (y_i - y_i^m(P)),$$

где $y_i, y_i^m(P)$ — экспериментальные и модельные значения концентраций соответственно в конце компартмента, n_y — количество измеряемых концентраций, $i=1,\ldots,n_y$. Для удобства записи опустим номер компартмента в обозначении масштабирующих коэффициентов sc_i , в качестве которых используются величины, обратные среднему значению соответствующих концентраций.

Так как имеются экспериментальные значения концентраций \mathbf{S}_{NH} и $\mathbf{X},$ то $n_y=2.$ Введем обозначения:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, y^m(P) = \begin{pmatrix} y_1^m(P) \\ y_2^m(P) \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

где y_1, y_2 и $y_1^m(P), y_2^m(P)$ — экспериментальные и модельные значения концентраций S_{NH} $(y_1, y_1^m(P))$ и X $(y_2, y_2^m(P))$ соответственно на выходах из компартментов, $e_i = sc_i(y_i - y_i^m(P))$.

Введем величину s_{ij} , характеризующую чувствительность критерия оптимальности J к изменению параметра:

$$s_{ij} = sc_i \frac{y_i^m(P^0 + \delta P_j) - y_i^m(P^0)}{\delta p_i},$$

где δP_j — вектор-столбец с нулевыми компонентами, кроме j-й компоненты (равной δp_j), $y_i^m(P^0)$ и $y_i^m(P^0+\delta P_j)$ — модельные значения концентраций. Таким образом получим матрицу $S=\{s_{ij}\}$, результатом нормирования столбцов которой будет матрица $\tilde{S}=\{\tilde{s}_{ij}\}$, где $\tilde{s}_{ij}=s_{ij}/\|s_j\|, \|s_j\|=s_{1j}^2+s_{2j}^2.$ В [9] приведены два условия идентифи-

В [9] приведены два условия идентифицируемости подмножества значений параметров $K \subset \Pi$ такого, что $K \subset R^k$, $k \leq n_p$. Вопервых, вектор модельных данных $y^m(P)$ должен быть существенно чувствителен к изменению каждого параметра из K. Во-вторых, отклонения $y^m(P)$, вызванные изменением какого-либо j-го параметра, не должны в точности совпадать с отклонениями $y^m(P)$, которые вызваны изменениями других параметров из K.

Выполнение первого условия проверяется значением меры чувствительности (sensitivity measure) δ_j^{msqr} , которая находится для каждого параметра в каждом компартменте [9]:

$$\delta_j^{\text{msqr}} = \sqrt{\frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_y} s_{ij}^2}.$$

Увеличению чувствительности критерия оптимальности J к изменению j-го параметра со-

ответствует увеличение значения δ_j^{msqr} . Значения мер чувствительности для C_1 приведены в таблице 1.

Для проверки второго условия вводится индекс коллинеарности (collinearity index) γ_k подмножества K:

$$\gamma_k = \frac{1}{\min_{\|\xi\|=1} \|\tilde{\mathbf{S}}_k \xi\|} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}},$$

где \tilde{S}_k — матрица, содержащая k векторстолбцов матриц $\tilde{S}, \ \tilde{\lambda}_k$ — наименьшее собственное число матрицы $\tilde{S}_k^T \tilde{S}_k, \ \xi$ — вектор коэффициентов длиной k. Индекс коллинеарности γ_k в некотором смысле является мерой линейной зависимости столбцов матрицы \tilde{S}_k , причем уменьшению γ_k соответствует уменьшение этой меры. Второе условие считается выполненным [9] при:

$$\gamma_k < 10. \tag{7}$$

Мера детерминанта (determinant measure) ρ_k зависит от выполнения обоих вышеуказанных условий и является показателем идентифицируемости подмножества K:

$$\rho_k = \left(\det(\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k) \right)^{1/(2k)} = \left(\prod_{j=1}^k \lambda_j \right)^{1/(2k)},$$

где S_k — матрица, содержащая k векторстолбцов матрицы S, λ_j — собственное число матрицы $S_k^T S_k$. Причем чем больше значение ρ_k , тем более точно можно идентифицировать подмножество параметров.

Найденные индексы коллинеарности показывают, что при выполнении условия (7) подмножество K может содержать максимально два параметра. Такое максимальное количество параметров сохраняется и для любого $\gamma_k \leqslant 100$.

 $\mathit{Tаблица}\ 1.\$ Значения мер чувствительности δ_j^{msqr}

| Параметр | C_1 | C_2 | c_{32} | C_4 | C_5 |
|--------------|-----------|----------|----------|--------------|---------|
| Y_H | 0,49 | 0,25 | _ | _ | _ |
| Y_A | 3,06 | 3,72 | 0,97 | 2,03 | 0,01 |
| μ_H | $52,\!53$ | 38,67 | _ | _ | _ |
| μ_A | 936,02 | 1888,10 | 782,85 | $20452,\!00$ | 2341,40 |
| b_H | 9,59 | 23,39 | _ | _ | _ |
| $ $ b_A | 4,80 | 21,90 | 2,78 | 2,93 | 0,80 |
| K_S | 0,00 | 0,00 | _ | _ | _ |
| $ K_{NH} $ | 0,11 | $0,\!25$ | 0,06 | $0,\!05$ | 0,00 |
| $K_{O,H}$ | 0,06 | 0,05 | _ | _ | _ |
| $K_{O,A}$ | 0,08 | 0,26 | 0,06 | 0,03 | 0,00 |
| K_{α} | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| β | _ | _ | 15,67 | 26,98 | 10,781 |

Для первого компартмента в таблице 2 представлены γ_k и ρ_k всех наборов параметров, удовлетворяющих условию (7). Из таблицы 2 можно сделать выводы о том, что b_H в паре с каждым из остальных параметров в C_1 имеет достаточно маленький индекс коллинеарности (близкий к 1). Подмножество K, состоящее из двух параметров (b_H , μ_A), имеет наибольшую меру детерминанта, т. е. эта пара параметров в C_1 наиболее точно идентифицируема.

Таблица 2. Характеристики идентифицируемости подмножества, содержащего пары параметров, в первом компартменте

| Параметр | Параметр | γ_k | $ ho_k$ |
|-------------------------|------------------|------------|-----------|
| Y_H | b_{H} | 1,10 | 3,03 |
| Y_A | b_H | 1,11 | $7,\!58$ |
| μ_H | b_H | 1,11 | $31,\!45$ |
| μ_A | b_{H} | 1,11 | 132,74 |
| b_A | b_H | 1,19 | $9,\!38$ |
| K_S | b_H | 1,11 | $0,\!18$ |
| K_{NH} | b_{H} | 1,11 | $1,\!44$ |
| $K_{O,H}$ | b_H | 1,11 | 1,09 |
| $K_{O,A}$ | b_H | 1,11 | $1,\!29$ |
| $\mathrm{K}_{lpha}^{'}$ | b_{H} | 1,11 | 0,50 |

В таблице 3 для каждого компартмента представлены наиболее точно идентифицируемые параметры и их характеристики идентифицируемости.

Таблица 3. Характеристики подмножества наиболее точно идентифицируемых параметров в каждом компартменте

| Компартмент | Параметры | γ_k | $ ho_k$ |
|-------------|----------------------|------------|---------|
| C_1 | μ_A,b_H | 1,11 | 132,74 |
| C_2 | μ_A,b_H | 1,08 | 295,59 |
| c_{32} | μ_A,β | 1,00 | 156,63 |
| C_4 | μ_A, β | 1,00 | 1050,50 |
| C_5 | μ_A,eta | 1,00 | 224,69 |

Представленные выше результаты численного анализа обусловлены малым количеством измеряемых переменных, входящих в J. При увеличении количества экспериментальных данных можно ожидать увеличение количества идентифицируемых параметров.

Параметрическая идентификация произведена на основе алгоритма, представленного в [15]. В качестве начальной оценки значения вектора параметров P использован вектор P^0 , найденный методом сканирования. Так как P^0 достаточно близок к P, то отклонения

найденных значений параметров от экспериментальных $\Delta P = P - P^0$ близки к нулю. На основе итерации Ньютона и аппроксимации Ньютона-Гаусса в [15] для нахождения ΔP была получена система уравнений:

$$(S^T S)\big|_{P^0} \Delta P = S^T e_i\big|_{P^0}, \tag{8}$$

которая для предлагаемой модели оказывается плохо обусловленной. Для решения данной проблемы в [15] предложено масштабировать параметры и переменные или пронормировать столбцы матрицы S. Вычисления в пакете "GNU Octave" показали, что масштабирование и нормирование не дают требуемых результатов, матрица S^TS остается плохо обусловленной. В результате приходится ограничиться нахождением нормального решения системы (8).

Для большинства параметров уравнений (1)-(6) в [8] представлена область допустимых значений. В результате решения системы (8) находим ΔP , далее получаем вектор $P = P^0 + \Delta P$. Если значение параметра выходит из области допустимых значений, то в качестве него берется значение на границе соответствующей области, наиболее близкой к значению параметра. Для K_{α} допустимая область была определена выше, $\beta \in [\beta_{\ni} - 0, 01|\beta_{\ni}|, \beta_{\ni} + 0, 01|\beta_{\ni}|]$, где β_{\ni} значение параметра, определенное экспертом. Найденное значение Р используется как новая начальная оцика P^0 . Из системы (8) находится ΔP . Алгоритм повторяется до тех пор, пока модуль разности модельных и экспериментальных данных на предыдущем шаге больше соответствующего модуля разности на новом шаге. Полученные значения параметров приведены в таблице 4.

Концентрации на выходе из C_n , найденные подстановкой P в соответствующие уравнения (1)–(6), приведены в таблице 5. Во втором, пятом столбцах этой таблицы представлены экспериментальные данные с очистных сооружений г. Петрозаводска. Выходные концентрации при использовании параметров, найденных методом сканирования, приведены в третьем, шестом столбцах, при уточненных значениях параметров — в четвертом, седьмом столбцах.

Из таблицы 5 видно, что уточнение значений параметров в большинстве случаев приближает модельные данные к экспериментальным. Возникающие отклонения модельных данных от экспериментальных не превосходят допустимых погрешностей измерений.

Таблица 4. Значения параметров в компартментах

| Параметр | Единицы измерения | C_1 | C_2 | c_{32} | C_4 | C_5 |
|--------------|------------------------------------------------------|--------|-------|-----------|-------|------------|
| Y_H | г биомассы \cdot (г БПК $_{\text{полн}}$) $^{-1}$ | 0,75 | 0,75 | _ | _ | _ |
| Y_A | г биомассы \cdot (г аммония) $^{-1}$ | 0,17 | 0,28 | $0,\!28$ | 0,07 | 0,28 |
| μ_H | $ m cyr^{-1}$ | 10,00 | 7,00 | _ | _ | _ |
| μ_A | $ m cyr^{-1}$ | 0,80 | 0,80 | $0,\!66$ | 0,01 | 0,001 |
| b_H | $ m cyr^{-1}$ | 0,05 | 0,05 | _ | _ | _ |
| b_A | $ m cyr^{-1}$ | 0,05 | 0,05 | $0,\!05$ | 0,09 | 0,06 |
| K_S | г Б $\Pi 	ext{K}$ полн \cdot м $^{-3}$ | 200,00 | 40,00 | _ | _ | _ |
| K_{NH} | г аммония \cdot м ⁻³ | 1,00 | 0,70 | 1,00 | 0,30 | 1,00 |
| $K_{O,H}$ | $_{\Gamma} 	ext{O}_2 \cdot 	ext{M}^{-3}$ | 0,20 | 0,01 | _ | _ | _ |
| $K_{O,A}$ | $_{\Gamma} 	ext{O}_2 \cdot 	ext{M}^{-3}$ | 0,40 | 0,40 | 1,50 | 0,40 | 1,50 |
| K_{α} | г аммония \cdot (г БПК $_{ m полн})^{-1}$ | 5,00 | 5,00 | 5,00 | 5,00 | 5,00 |
| β | ${ m cyr}^{-1}$ | _ | _ | $20,\!30$ | 4,56 | $-24,\!52$ |

Таблица 5. Концентрации на выходе из компартментов

| | S_{NH} | (г аммония · м- | 3) | X (г биомассы · м $^{-3}$) | | |
|-----------------|--------------|-----------------|-----------|-------------------------------|--------------|-----------|
| C_i | Эксп. данные | Сканирование | Уточнение | Эксп. данные | Сканирование | Уточнение |
| C_1 | 2,750 | 2,748 | 2,749 | 3300,000 | 3273,000 | 3273,000 |
| C_2 | 3,500 | 3,501 | 3,500 | $2635{,}000$ | $2631,\!500$ | 2631,500 |
| C_3 | 2,750 | 3,192 | 2,722 | 3430,000 | $3072,\!400$ | 3081,100 |
| $\mid C_4 \mid$ | 2,250 | 2,444 | 2,249 | 3720,000 | 3843,600 | 3839,000 |
| C_5 | 2,250 | 2,249 | 2,249 | 2760,000 | $2736,\!500$ | 2744,800 |

Выводы

Для описания процесса биоочистки в проточной биосистеме предложена математическая модель с переменной структурой, учитывающая окисление органики, аммония и динамику биомассы активного ила. Выбор тех или иных уравнений модели в каждом конкретном компартменте обусловлен спецификой процесса биологической очистки и очистных сооружений г. Петрозаводска.

По имеющимся экспериментальным данным найдены меры чувствительности рассматриваемого критерия оптимальности к изменению параметров, индексы коллинеарности и меры детерминантов, определяющие возможность идентификации некоторого подмножества параметров. В каждом компартменте определены подмножества параметров, идентифицируемых наиболее точно. С использованием методов теории чувствительности уточнены значения параметров, полученные методом сканирования.

Первостепенной задачей процесса биологической очистки является поддержание концентрации субстратов на выходе из аэротенка в допустимых пределах. При этом в процессе биоочистки имеют место значительные финан-

совые затраты на подачу воздуха в аэротенк, в связи с чем возникает задача построения управления, оптимального в смысле минимизации соответствующих затрат при поддержании выходных концентраций в допустимых пределах. При этом управляющей переменной является интенсивность подачи кислорода в аэротенк. Найденные значения параметров и информация об их идентифицируемости позволяют решать эту задачу.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.

Литература

- 1. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 143 с.
- 2. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
- 3. Жмур Н. С. Управление процессом и контроль результата очистки сточных вод на сооружениях с аэротенками. М.: Луч, 1997. 172 с.
- 4. *Кириллов А. Н., Рейсс Т. В., Смирнов Н. В.* Математическое моделирование процессов нит-

- рификации и окисления органических веществ в проточной биосистеме // Ученые записки Петр Γ У. Сер. «Естественные и технические науки», 2013. № 4 (133). С. 105–109.
- 5. Хенце М., Армоэс П., Ля-Кур-Янсен Й., Арван Э. Очистка сточных вод. М.: Мир, 2004. 480 с.
- 6. Яковлев С. В., Карюхина Т. А. Биохимические процессы в очистке сточных вод. М.: Стройиздат, $1980.\ 200\ c.$
- 7. Adetola V., Lehrer D., Guay M. Adaptive estimation in nonlinearly parameterized nonlinear dynamical systems // American Control Conference on O'Farrell Street, San Francisco, USA, 2011. P. 31–36.
- 8. Boulkroune B., Darouach M., Gille S. et al. A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process // USA, American Control Conference, 2009. P. 1027–1033.
- 9. Brun R., Kühni M., Gujer W. et al. Practical identifiability of ASM2d parameters systematic selection and tuning of parameter subsets // Water Research, 2002. \mathbb{N} 36. P. 4113–4127.
- 10. Brune D. Optimal control of the completemix activated sludge process // Environmental Technology, 6:11, 1985. P. 467–476.

- 11. Dochain D., Vanrolleghem P. A. Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes. London: IWA Publishing, 2001. 342 p.
- 12. Henze M., Grady C. P. L., Gujer W. et al. Activated sludge model no. 1. Scientific and Technical Report 1, IAWPRC Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment Processes. IAWPRC, London, 1987.
- 13. Henze M., Gujer W., Mino T. et al. Activated sludge models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3. Scientific and Technical Report 9, IWA Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment. London: IWA Publishing, 2000.
- 14. Knightes C. D., Peters C. A. Statistical Analysis of Nonlinear Parameter Estimation for Monod Biodegradation Kinetics Using Bivariate Data // Biotechnol. Bioeng., 69, 2, 2000. P. 160–170.
- 15. Chai Q. Modeling, Estimation, and Control of Biological Wastewater Treatment Plants. Doctoral Theses at NTNU 2008:108 at HiT, Porsgrunn. Telemark University College, 2008.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru тел.: (8142) 781108

Смирнов Николай Васильевич

аспирант

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 преподаватель

Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910

эл. почта: fresh.87@mail.ru

тел.: (8142) 781108

Kirillov, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: kirillov@krc.karelia.ru tel.: (8142) 781108

Smirnov, Nikolai

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: fresh.87@mail.ru tel.: (8142) 781108 УДК 519.115:519.2

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ РЕГИСТРОМ СДВИГА

А. В. Колчин

Рассматривается пример применения обобщенной схемы размещения к изучению асимптотического поведения комбинаторных объектов. В настоящей работе изучаются размещения наборов из 0 и 1 на окружности, вырабатываемых регистрами сдвига при определенных условиях.

 $K\,\pi\, \mbox{ю}\, \mbox{ч}\, \mbox{е}\, \mbox{в}\, \mbox{ы}\, \mbox{е}$ с л о в а: обобщенная схема размещения, локальные предельные теоремы.

A. V. Kolchin. AN APPLICATION OF THE GENERALISED ALLOCATION SCHEME TO ANALYSING A CLASS OF SEQUENCES GENERATED BY A SHIFT REGISTER

We consider an example of application of the generalised allocation scheme to studying the asymptotic behaviour of combinatorial objects. In this research, we analyse the allocation of tuples of zero and ones onto a circle which are generated by a shift register under certain conditions.

Key words: generalised allocation scheme, local limit theorems.

Рассматривается задача, связанная с размещением наборов из 0 и 1 длины m в 2^m равноотстоящих точках окружности, занумерованных числами $1,2,\ldots,2^m$ таким образом, что каждый последующий набор начинается с m-1 последних членов предыдущего набора. Нетрудно видеть, что такое плотное размещение 2^m различных наборов возможно: действительно, такие наборы вырабатываются регистром сдвига с m ячейками, и при некоторых условиях, налагаемых на функцию усложнения f (функцию обратной связи регистра), регистр вырабатывает одноцикловую последовательность, содержащую все $N=2^m$ различных наборов длины m (см., например, [5]).

Напомним (см. [5, 6]), что под регистром сдвига подразумевают техническое

устройство, реализующее процедуру построения рекуррентной последовательности. Регистр сдвига состоит из конечного числа ячеек, которые занумерованы числами от 1 до m и могут содержать элементы конечного алфавита A, и правила преобразования совокупности заполнений этих ячеек. Как правило, на практике используются регистры сдвига с двоичным алфавитом $A = \{0, 1\}$ и правилом преобразования, состоящим в вычислении значения булевой функции обратной связи f от заполнений ячеек, перемещении заполнения ячейки с номером k в ячейку с номером k-1, k = 2, ..., m, и засылке вычисленного значения функции f в ячейку с номером m; значения, выходящие из ячейки с номером 1, образуют выходную последовательность, которая может использоваться, например, как последовательность псевдослучайных чисел при статистическом моделировании или шифровании сообщений. Достоинством такого способа порождения псевдослучайных последовательностей являются простота конструкции, высокая скорость и возможность теоретического исследования условий, обеспечивающих заданную величину периода выходной последовательности, а также некоторых ее свойств.

Если функция обратной связи неизвестна, то при некоторых условиях для ее восстановления достаточно знать ее значения на некотором достаточном числе наборов аргументов. Предположим, что для нескольких наборов, скажем, для n наборов, случайно равновероятно выбранных из $\binom{N}{n}$ таких возможных наборов, нам известны значения функции обратной связи. Возможность ее восстановления зависит от того, как эти n наборов расположены. В частности, возможность восстановления может зависеть от числа наборов, занимающих на окружности подряд идущие позиции. В таком случае интерес представляет характеристика, равная максимальному числу таких подряд идущих (соседних) наборов в случайной последовательности длины n.

Поскольку выбранная последовательность наборов случайна, рассмотрим следующую вероятностную задачу.

Занумеруем расположенные на окружности $N=2^m$ наборов длины m числами от 1 до N в порядке их расположения на окружности в направлении по часовой стрелке, начиная с произвольно выбранного набора.

Среди N наборов случайно выбирается n наборов. На окружности с 2^m равноотстоящими точками они представлены n точками, образующими некоторое число s связных дуг (подряд расположенных точек). Занумеруем эти дуги в порядке возрастания номеров первых точек дуг. Пусть r_1, \ldots, r_s — длины этих дуг; ясно, что

$$r_1 + \dots + r_s = n.$$

Промежутки между дугами имеют положительные длины j_1,\ldots,j_s , где j_1 есть число точек на окружности между первой и второй дугами, j_k есть число точек на окружности между k-й и (k+1)-й дугами и j_s есть число точек между последней и первой дугами. Такое расположение точек на окружности будем называть конфигурацией с параметрами $(r_1,\ldots,r_s;j_1,\ldots,j_s)$.

Без ограничения общности будем считать, что первая дуга (длины r_1) начинается в точке

окружности с номером 1, так что последняя, s-я дуга оканчивается в точке $n-j_s$.

Найдем число конфигураций с фиксированными r_1, \ldots, r_s и различными допустимыми j_1, \ldots, j_s . Нетрудно видеть, что число наборов длин j_1, \dots, j_s этих дуг можно вычислить, расположив составляющие их $N-n=j_1+\cdots+j_s$ точек, занумерованных числами $1, \ldots, N - n$, на окружности с N-n равноотстоящими точками и выбрав среди N-n промежутков между этими точками всеми различными способами s промежутков. В результате получаем все различные наборы разделяющих дуг всевозможных положительных длин, и выбрать промежутки, разделяющие s дуг на окружности с N-n точками, можно $\binom{N-n}{s}$ способами. Поэтому число конфигураций с ровно s дугами равно $\binom{N-n}{s}$. Для простоты будем считать, что при s = 0 существует ровно одна конфигурация. Кроме того, будем считать две конфигурации совпадающими, если они совпадают при некотором сдвиге их дуг на окружности с $N = 2^m$ равноотстоящими точками с сохранением промежутков между ними. Поэтому будем считать, что nвыбрано так, что все конфигурации различны. Можно показать, что это требование выполняется, если n нечетно (см. |1|).

При случайном выборе n наборов число sдуг наборов есть случайная величина, которую обозначим $\nu_{n,N}$. Ее естественно интерпретировать как число ячеек, в которые проводится размещение n частиц. При $\nu_{n,N} = s$ числа r_1, \ldots, r_s будем понимать как заполнения ячеек с номерами $1, \ldots, s$ соответственно. При случайном выборе n наборов эти величины являются случайными, при $\nu_{n,N}=s$ обозначим их η_1, \dots, η_s . Чтобы нумерация не влияла на вероятностное распределение величин η_1,\ldots,η_s , в качестве первой всегда берем дугу, содержащую первую размещенную точку при последовательном случайном размещении единиц на окружности с $N=2^m$ равноотстоящими точками, и сдвинем ее так, что ее первая единица расположится в точке окружности с номером 1.

Как было отмечено выше, число различных выборов разделяющих промежутков равно $\binom{N-n}{s}$. С учетом соглашения, что при s=0 (тогда и n=0) существует ровно одна конфигурация, суммируя по s от 0 до N-n, получаем, что общее число различных равновероятных исходов равно

$$\sum_{n=0}^{N-n} \binom{N-n}{s} = 2^{N-n}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Случайная величина $\nu_{n,N}$ имеет биномиальное распределение с параметрами (N-n,1/2), иными словами,

$$\mathbf{P}\{\nu_{n,N}=s\} = \binom{N-n}{s} \frac{1}{2^{N-n}},$$

$$s = 0, 1, \dots, N-n.$$

Напомним, что класс конфигураций, циклические сдвиги которых различны (не совпадают при наложении), называется ожерельем [4]. Известна формула для числа ожерелий при заданных n и N (см. [4]), из которой в нашем случае, где N — четное число, а n нечетно, следует, что число ожерелий равно $\binom{N}{n}$. Число конфигураций равно $\binom{N}{n}$, так что в среднем на одно ожерелье приходится N конфигураций. Число сдвигов одной конфигурации равно N, и ожерелье не может содержать больше, чем N конфигураций, поэтому каждое ожерелье содержит ровно N конфигураций, то есть все сдвиги любой конфигурации различны. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если N — четное число, а n нечетно, то все сдвиги любой конфигурации различны, то есть не совпадают при сдвигах на не кратное N число вершин.

Далее будем считать, что $\nu_{n,N}=s$, и полученные результаты затем можно усреднить по распределению $\nu_{n,N}$. Обратимся к случайным величинам η_1,\ldots,η_s . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. При условии, что $\nu_{n,N} = s$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = r_1, \dots, \eta_s = r_s\} =
= \mathbf{P}\{\xi_1 = r_1, \dots, \xi_s = r_s \mid \xi_1 + \dots + \xi_s = n\},
(1)$$

где ξ_1, \ldots, ξ_s — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, \ldots, n$ с одинаковыми вероятностями, целые $r_1, \ldots, r_s \geqslant 1$, $r_1 + \cdots + r_s = n$. Иными словами, случайные величины η_1, \ldots, η_s образуют обобщенную схему размещения с равномерно распределенными случайными величинами ξ_1, \ldots, ξ_s .

Доказательство. Поскольку n вершин окружности с N вершинами выбираются из N вершин равновероятно, вне зависимости от

значений r_1, \ldots, r_s , справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = r_1, \dots, \eta_s = r_s\} = \binom{n}{s}^{-1}, \qquad (2)$$

где $r_1 + \cdots + r_s = n, r_1, \dots, r_s \geqslant 1$. С другой стороны, для таких r_1, \dots, r_s

$$\mathbf{P}\{\xi_{1} = r_{1}, \dots, \xi_{s} = r_{s} \mid \xi_{1} + \dots + \xi_{s} = n\} = \\
= \frac{\mathbf{P}\{\xi_{1} = r_{1}, \dots, \xi_{s} = r_{s}\}}{\mathbf{P}\{\xi_{1} + \dots + \xi_{s} = n\}}. \quad (3)$$

Здесь

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = r_1, \dots, \xi_s = r_s\} = \frac{1}{n^s},\tag{4}$$

И

$$\mathbf{P}\{\xi_{1} + \dots + \xi_{s} = n\} = \\
= \sum_{\substack{r_{1}, \dots, r_{s} \\ r_{1} + \dots + r_{s} = n}} \mathbf{P}\{\xi_{1} = r_{1}, \dots, \xi_{s} = r_{s}\} = \\
= \frac{1}{n^{s}} \binom{n}{s}.$$
(5)

Равенство (1) следует из (2)–(5).
$$\Box$$

Теорема 3 позволяет для изучения поведения η_1, \ldots, η_s применить хорошо известные методы, используемые в контексте обобщенной схемы размещения (см., например, [2, 3]).

Однако без использования обобщенной схемы размещения можно также получить результат, представляющий самостоятельный интерес. Обозначим через ρ_s максимальное значение величин η_1, \ldots, η_s и оценим вероятность того, что выполнено неравенство $\rho_s \leqslant r$, где r — целое положительное число. Получим оценку вероятности

$$P{\rho_s \le 1} = P{\rho_s = 1}$$

как раз вне рамок обобщенной схемы размещения.

Ясно, что в этом случае каждая из n размещаемых частиц должна окаймляться дугами положительной длины, состоящими из оставшихся N-n точек окружности, и s=n. Поскольку число произвольных (без этого ограничения) размещений n вершин на N позициях на окружности равно $\binom{N}{n}$, а число разбиений N-n вершин на окружности на n дуг ненулевых длин равно $\binom{N-n}{n}$, для искомой вероятности справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\rho_s = 1\} = \mathbf{P}\{\rho_n = 1\} = \binom{N-n}{n} \binom{N}{n}^{-1}.$$
(6)

Используя равенство (6), получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Если $N \to \infty$ и n есть либо постоянная, либо $n \to \infty$ таким образом, что

$$\frac{n^2}{N} \to 0,$$

mo

$$P{\rho_s = 1} \to 1.$$

 $Ecлu\ N, n \to \infty\ ma\kappa$, что

$$\frac{n^2}{N} \to a > 0,$$

mo

$$P\{\rho_s = 1\} \to e^{-a}$$
.

 $Ec \Lambda u N, n \to \infty \ ma\kappa, \ ч mo$

$$\frac{n^2}{N} \to \infty,$$

mo

$$P{\rho_s = 1} \to 0.$$

Доказательство. Используя соотношение (6), получаем равенство

$$\mathbf{P}\{\rho_s = 1\} = \binom{N-n}{n} \binom{N}{n}^{-1} = \frac{(N-n)!}{(N-2n)! \, n!} \frac{n! \, (N-n)!}{N!}.$$

Применяя известную формулу Стирлинга при $N \to \infty$ и $N-2n \to \infty$, находим, что

$$\binom{N-n}{n} \binom{N}{n}^{-1} = \frac{(\sqrt{2\pi(N-n)}(N-n)^{N-n}e^{-N+n})^2}{\sqrt{2\pi N}N^N e^{-N}\sqrt{2\pi(N-2n)}(N-2n)^{N-2n}} \times \frac{(1+O(1/N))}{e^{-N+2n}} = \frac{2\pi(N-n)(N-n)^{2N-2n}}{2\pi\sqrt{N}N^N\sqrt{N-2n}(N-2n)^{N-2n}} \times \frac{(1+O(1/N))}{(N-2n)^{N-2n}} \times \frac{(N-n)N^{2N-2n}}{\sqrt{(N-2n)N}(N-2n)^{N-2n}N^N} \times \frac{(N-n)N^{2N-2n}}{\sqrt{(N-2n)N}(N-2n)^{N-2n}N^N} \times \frac{(N-n)N^{2N-2n}}{\sqrt{(N-2n)N}(N-2n)^{N-2n}N^N} \times \frac{(N-n)N^{2N-2n}}{\sqrt{(N-2n)N}(N-2n)^{N-2n}N^N} \times \frac{(N-n)N^{2N-2n}}{\sqrt{(N-2n)N}(N-2n)^{N-2n}N^N} \times \frac{(N-n)N^{2N-2n}}{\sqrt{(N-2n)N}(N-2n)^{N-2n}N^N}}$$

Главный член первого множителя есть

$$a_1 = \frac{N - n}{\sqrt{(N - 2n)N}} =$$

$$= \frac{N(1 + O(n/N))}{N\sqrt{1 - 2n/N}} =$$

$$= 1 + o(1),$$

а главный член второго множителя есть

$$a_2 = \frac{(N-n)^{2N-2n}}{(N-2n)^{N-2n}} =$$

$$= \frac{(1-n/N)^{2N-2n}N^{2N-2n}}{N^{2N-2n}(1-2n/N)^{N-2n}} =$$

$$= \frac{(1-n/N)^{2N-2n}}{(1-2n/N)^{N-2n}}.$$

Пусть $n^2/N \to 0$, тогда

$$\ln a_2 = \ln(1 - n/N)^{2N - 2n} - \ln(1 - 2n/N)^{N - 2n} =$$

$$= (2N - 2n)(-n/N + O(n^2/N)) -$$

$$- (N - 2n)(-2n/N)^{N - 2n} =$$

$$= -2n + O(n^2/n) + 2n + O(n^2/N).$$

Таким образом, $\ln a_2 \to 0$, и значит, $a_2 \to 1$. Отсюда следует первое утверждение теоремы 4.

Пусть теперь $n, N \to \infty$ таким образом, что $n^2/N \to a > 0$. Тогда, как и выше, $a_1 \to 1$, а

$$\ln a_{2} = (2N - 2n) \ln(1 - n/N) - (N - 2n) \ln(1 - 2n/N) =$$

$$= -(2N - 2n) (-n/N - n^{2}/(2N^{2}) + O(n^{3}/N^{3})) - (N - 2n) (-2n/N - n^{2}/(2N^{2}) + O(n^{3}/N^{3})) =$$

$$= -2n - \frac{n^{2}}{N} + \frac{2n^{2}}{N} + O(\frac{n^{3}}{N^{2}}) =$$

$$= -\frac{n^{2}}{N} + O(\frac{n^{3}}{N^{2}}).$$
(7)

Таким образом, в этом случае $\ln a_2 \to -a$, иными словами,

$$\mathbf{P}\{\rho_s=1\} \to e^{-a}$$

и второе утверждение теоремы 4 доказано.

Пусть теперь $n, N \to \infty$ так, что $n^2/N \to \infty$. Нетрудно видеть, что в этом случае для логарифма $\ln a_2$ справедливо соотношение (7), из которого следует, что a_2 стремится к нулю.

Литература

- 1. Bиленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969
- 2. Колчин А. В. Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 4. С. 148–157.
- 3. Колчин А. В. Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, № 3. С. 432–435.
- 4. Риордан Дэс. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
- 5. Golomb S. W. Shift Register Sequences Ægean Park Press, Laguna Hills, California, 1982.
- 6. Menezes A. J., van Oorschot P. C., Vanstone S. A. Handbook of Applied Cryptography. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1997.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Колчин Андрей Валентинович к. ф.-м. н.

эл. почта: andrei.kolchin@gmail.com

Kolchin, Andrey

e-mail: andrei.kolchin@gmail.com

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК

А. В. Колчин, Н. Ю. Энатская¹

¹ Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Рассматриваются различные процедуры перечисления всех исходов схемы перестановок, устанавливается взаимно однозначное соответствие между ними и их номерами в каждой процедуре перечисления, приводятся способы моделирования исходов схемы.

Kлючевые слова: перечислительные задачи комбинаторного анализа, схема размещения, перестановка.

A. V. Kolchin, N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME

We consider several procedures to number all outcomes of a permutation scheme, establish a one-to-one correspondence between the outcome and its number generated in the numbering procedure, and give some methods to simulate the outcomes.

Key words: enumerative combinatorics, allocation scheme, permutation.

1. Процедуры перечисления исходов схемы перестановок

Схема перестановок длины r возникает при взаимном упорядочивании r различимых элементов между собой или при размещении r различимых частиц по r различимым ячейкам, вмещающим по одной частице. Общее число исходов схемы равно r!.

Рассмотрим несколько способов перечисления исходов схемы.

1.1. Метод графов перечисления исходов схемы перестановок

Построим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до r номерами, размещая каждый из них последовательно и случайно относительно каждой перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого, и нумеруя слева напра-

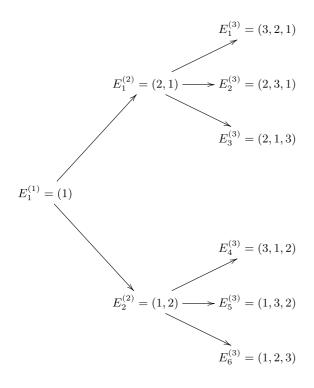
во получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, то есть при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)}=(a_1,\ldots,a_j)$ i-е состояние процесса (то есть i-ю перестановку a_1,\ldots,a_j) на j-м шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид, показанный на рисунке.

1.2. Монотонное перечисление исходов схемы перестановок

Будем сопоставлять каждой i-й из r! перестановок длины r число R_i , составленное из номеров ее элементов, $i=1,\ldots,r$!, и будем перечислять все исходы схемы, например, в порядке роста чисел R_i . Тогда среди r! чи-

сел образуется r!/r = (r-1)! групп соответствующих перестановок длины r с фиксированными первыми элементами в порядке их роста от 1 до r, и в каждой из них имеется (r-1)!/(r-1) = (r-2)! групп перестановок с фиксированными первыми двумя элементами в порядке роста номеров второго элемента, исключая номер первого фиксированного элемента, и так далее. Перечисляя таким образом перестановки элементов до последней с фиксированными остальными r-1 элементами, получаем все перестановки в порядке роста чисел R_i .

Продемонстрируем эту процедуру монотонного перебора перестановок на примере.



Граф переходов

Пример 1. 1. Пусть r=3, r!=3!=6, (r-1)!=2, (r-2)!=1. Получаем очевидную последовательность перестановок в порядке роста чисел R_i : (123), (132), (213), (231), (312), (321).

2. Пусть r=4, r!=4!=24, (r-1)!=3!=6, (r-2)!=2, (r-3)!=1. Получаем следующую последовательность перестановок в порядке роста чисел R_i , причем среди r=4 групп по (r-1)!=6 элементов с фиксированным первым элементом в порядке его роста, среди каждой из которых по (r-2)!=2 элемента с фиксированным вторым элементом, а третий и четвертый элементы перечисляются в

2! = 2 порядках по мере роста чисел R_i : (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (2134), (2143), (2314), (2341), (2413), (2431), (3124), (3142), (3241), (3241), (3412), (3421), (4123), (4132), (4213), (4231), (4312), (4321).

1.3. Метод отбраковки монотонного перечисления исходов схемы перестановок

Из предыдущего параграфа следует, что все исходы схемы перестановок находятся для описанных там же чисел R_i в диапазоне от числа $(1\ 2\ldots r)$ до числа $(r\ (r-1)\ldots 1)$ в порядке их роста. Если считать составляющие их цифры номерами элементов и провести в каждом из них сначала отбраковку чисел с цифрами больше r и затем маркировку цифр по частотам их присутствия в числе, то для получения всех требуемых перестановок в порядке роста чисел R_i нужно оставить в исходной последовательности только числа с единичными маркировками. В результате получаем перечисление перестановок в том же порядке, что и в предыдущем параграфе. Покажем это на примере.

Пример 2. Пусть r=3. Тогда числа R_i лежат в диапазоне от 123 до 321. Выкинем из них числа, состоящие из цифр, отличных от данных: 1, 2, 3. Получим растущие числа 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321. Из них с единичными маркировками останутся числа 123, 132, 213, 231, 312, 321, которые и являются всеми перечисленными в монотонно возрастающем порядке (в смысле R_i) исходами схемы перестановок длины 3.

2. Нумерация исходов схемы перестановок

Установление полноты перебора всех исходов схемы перестановок и удобство дальнейшего ее использования требует для каждой из предложенных процедур решения обратной и прямой задач нахождения соответствия чисел R_i и их номеров, то есть, соответственно, нахождения номера N по заданному числу R и нахождение числа R для данного номера N, где, как и раньше, число R представляет данную перестановку.

2.1. Нумерация исходов схемы перестановок, перечисленных методом графов

Обратная задача. Пусть задана перестановка размера r или число R, ей соответствующее. Требуется найти его номер N, который в силу процедуры формирования перестановок (см. п.1, рис.) определяется числами M_i , $i=1,\ldots,r$, где M_i — номер места элемента iсреди элементов перестановки от 1 до i, считая слева направо. Тогда для номера N получаем формулу

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r, \tag{1}$$

или, так как $M_1 = 1$ и r!/i! = 1 при i = r, формулу (1) можно представить в виде

$$N = \sum_{i=2}^{r} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + 1.$$

Покажем, как работает формула (1) при нахождении номера N по данному числу R на примерах.

Пример 3. Пусть r = 4.

R = 2431. По рис., $N = N_4 = 6$. Вычислим N

$$M_1 = 1$$
, $M_2 = 1$, $M_3 = 2$, $M_4 = 2$,

откуда следует, что

$$N = N_4 = (1-1)(4!)/(2!) + (2-1)(4!)/(3!) + 2 = 6.$$

R = 1423. По рис., $N = N_4 = 22$. Вычислим Nпо (1):

$$M_1 = 1$$
, $M_2 = 2$, $M_3 = 3$, $M_4 = 2$,

откуда следует, что

$$N = N_4 = (2-1)(4!)/(2!) + (3-1)(4!)/(3!) + 2 = 22.$$

R = 1234. По рис., $N = N_4 = 24$. Вычислим Nпо (1):

$$M_1 = 1$$
, $M_2 = 2$, $M_3 = 3$, $M_4 = 4$,

откуда следует, что

$$N = N_4 = (2-1)(4!)/(2!) + (3-1)(4!)/(3!) + 4 = 24.$$

Прямая задача. Пусть задан номер $N = N_r$ перестановки R размера r или числа R. Требуется найти число R. В силу процедуры формирования перестановок (см. п.1, рис.) число R определяется числами M_i , $i=1,\ldots,r$, где M_i — номер позиции элемента i среди чисел

перестановки от 1 до i, считая слева направо. Обозначим через N_k номер перестановки длины k в данной процедуре, порождающей искомую перестановку длины r с данным номером $N=N_r$. Тогда, так как $M_r=r$, если N делится на r, и $M_r = N \pmod{r}$ в противном случае, что может быть записано в виде формулы

$$M_r = (N_r - 1) \mod r + 1,$$

или, в общем случае, при $k=1,\ldots,r,$

$$M_k = (N_k - 1) \mod k + 1, \tag{2}$$

так как

$$(1-1)(4!)/(2!)+ \ +(2-1)(4!)/(3!)+2=6.$$
 $N_{r-1}=egin{cases} [N_r/r],& \text{если }N_r \text{ делится на }r, \ [N_r/r]+1 & \text{в противном случае}, \end{cases}$

что может быть записано в виде формулы

$$N_{r-1} = \left\lceil \frac{N_r + r - 1}{r} \right\rceil,$$

где [Z] — целая часть числа Z, или, в общем случае, при $k=1,\ldots,r$,

$$N_{k-1} = \frac{N_k + r - k}{r - k + 1}. (3)$$

Покажем, как использовать формулы (2) и (3) для нахождения числа R по данному номеру $N-N_r$ на примерах.

Пример 4. Пусть r = 4.

 $N=N_4=22$. По рис., R=1423. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$M_4 = (N_4 - 1) \mod 4 + 1 =$$

$$= (22 - 1) \mod 4 + 1 = 2;$$

$$N_3 = [(N_4 + 3)/4] = [(22 + 3)/4] = 6;$$

$$M_3 = (N_3 - 1) \mod 3 + 1 =$$

$$= (6 - 1) \mod 3 + 1 = 3;$$

$$N_2 = [(N_3 + 2)/3] = [(6 + 2)/3] = 2;$$

$$M_2 = (N_2 - 1) \mod 2 + 1 =$$

$$= (2 - 1) \mod 2 + 1 = 2;$$

$$N_1 = [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1;$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем R = 1423, что совпадает с результатом по рисунку.

 $N=N_4=24$. По рис., R=1234. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$M_4 = (N_4 - 1) \mod 4 + 1 =$$

$$= (24 - 1) \mod 4 + 1 = 4;$$

$$N_3 = [(N_4 + 3)/4] = [(24 + 3)/4] = 6;$$

$$M_3 = (N_3 - 1) \mod 3 + 1 =$$

$$= (6 - 1) \mod 3 + 1 = 3;$$

$$N_2 = [(N_3 + 2)/3] = [(6 + 2)/3] = 2;$$

$$M_2 = (N_2 - 1) \mod 2 + 1 =$$

$$= (2 - 1) \mod 2 + 1 = 2;$$

$$N_1 = [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1;$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем R=1234, что совпадает с результатом по рисунку.

 $N=N_4=13$. По рис., R=4312. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$M_4 = (N_4 - 1) \mod 4 + 1 = 1$$

$$= (13 - 1) \mod 4 + 1 = 1;$$

$$N_3 = [(N_4 + 3)/4] = [(13 + 3)/4] = 4;$$

$$M_3 = (N_3 - 1) \mod 3 + 1 = 1$$

$$= (4 - 1) \mod 3 + 1 = 1;$$

$$N_2 = [(N_3 + 2)/3] = [(4 + 2)/3] = 2;$$

$$M_2 = (N_2 - 1) \mod 2 + 1 = 1$$

$$= (2 - 1) \mod 2 + 1 = 2;$$

$$N_1 = [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1;$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем R=4312, что совпадает с результатом по рисунку.

2.2. Нумерация исходов схемы перестановок при их монотонном перечислении

Под монотонным перечислением подразумеваем перебор исходов схемы перестановок в порядке роста чисел R_i , представляющих перестановки.

Заметим, что при двух представленных в п.1 способах перечисления исходов схемы перестановок в итоге получаем их в монотонно возрастающем порядке в смысле чисел R_i , поэтому соответствие этих чисел и их номеров одинаково для обеих процедур перечисления исходов схемы.

Обратная задача. Пусть задана перестановка R размера r. Требуется найти ее номер $N=N_r$ при монотонно возрастающем перечислении всех исходов схемы перестановок. Искомый номер N определяется числами M_i , $i=1,\ldots,r-1$, где M_i есть порядковый номер по возрастанию для элемента на i-м месте среди элементов правее i-го места от 1 до i. Тогда из процедуры перечисления перестановок в n.1 следует, что искомый номер $N=N_r$ определяется по формуле

$$N_r = \sum_{i=1}^{r-2} (M_i - 1)(r - 1)! + M_{r-1}.$$
 (4)

Покажем на примерах решение обратной задачи по формуле (4).

Пример 5. Пусть r=4. Для всех R при их перечислении как в п.1.2 в количестве r!=4!=24 найдем их номера по (4) при заранее известных номерах для проверки и представим результаты решения в таблице.

Прямая задача. Пусть задан номер $N = N_r$ перестановки длины r или числа R при монотонно возрастающем порядке перечисления чисел R, описанном в п.1.2. Требуется найти это число R, которое, как следует из процедуры перечисления перестановок, определяется численностями групп исходов с совпадающими первыми, первыми двумя, тремя и так далее элементами, которые соответственно равны r!/r = (r-1)!, (r-1)!/(r-1) =(r-2)!, и так далее. Поэтому, если искомое число $R = I_1 I_2 \dots I_r$, где I_1, I_2, \dots, I_r — номера элементов перестановки, составляющих число R, то задача сводится к нахождению этих номеров. Пусть i_1, i_2, \ldots, i_r — соответствующие числам I_1, I_2, \ldots, I_r их относительные порядковые номера по возрастанию: i_1 — порядковый номер числа I_1 среди чисел I_1, I_2, \ldots, I_r ,

 i_2 — порядковый номер числа I_2 среди чисел I_2, I_3, \ldots, I_r , и так далее. Тогда определение числа $R = I_1 I_2 \ldots I_r$ сводится к нахождению значений i_1, i_2, \ldots, i_r и производится путем следующих последовательных вычислений:

$$i_1 = egin{cases} [N_r/(r-1)!] + 1, & \text{если число } N_r \text{ не} \\ & \text{делится на } (r-1)!, \\ [N_r/(r-1!)] = i_1^* & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что можно записать в виде единой формулы

$$i_1 = [(N_r + (r-1)! - 1)/(r-1)!];$$

 $N_{r-1} = N_r - i_1^*(r-1)!;$

аналогично

$$i_2 = [(N_{r-1} + (r-2)! - 1)/(r-2)!];$$

 $N_{r-2} = N_{r-1} - i_2^*(r-2)!;$

а в общем случае вычисления проводятся по формулам

$$i_k^* = [N_{r-k+1}/(r-k)!],$$

$$i_k = [(N_{r-k+1} + (r-k)! - 1)/(r-k)!], (5)$$

$$N_{r-k} = N_{r-k+1} - i_k^* (r-k)!,$$

где k = 1, ..., r - 1.

Замечание 1. Если в процессе вычисления окажется, что $i_k=0$, то это, в силу выбранной процедуры нумерации перестановок в п.1.2, означает, что в перестановке с (k-1) первыми фиксированными номерами элементов I_1,\ldots,I_{k-1} все остальные не найденные еще номера элементов перечисляются в порядке их убывания, так как это соответствует последней перестановке из ненайденных номеров в группе, то есть максимальному числу из не использованных еще номеров после k-1 первых фиксированных.

Покажем порядок вычислений для определения числа R по данному $N=N_r$ на примерах.

Решение обратной задачи по формуле

| - | | | | | | |
|---|----|------|-------|-------|-------|--------------------------------|
| _ | N | R | M_1 | M_2 | M_3 | расчет $N=N_4$ по (4) |
| | 1 | 1234 | 1 | 1 | 1 | N = (1-1)3! + (1-1)2! + 1 = 1 |
| | 2 | 1243 | 1 | 1 | 2 | N = (1-1)3! + (1-1)2! + 2 = 2 |
| | 3 | 1324 | 1 | 2 | 1 | N = (1-1)3! + (2-1)2! + 1 = 3 |
| | 4 | 1342 | 1 | 2 | 2 | N = (1-1)3! + (2-1)2! + 2 = 4 |
| | 5 | 1423 | 1 | 3 | 1 | N = (1-1)3! + (3-1)2! + 1 = 5 |
| | 6 | 1432 | 1 | 3 | 2 | N = (1-1)3! + (3-1)2! + 2 = 6 |
| | 7 | 2134 | 2 | 1 | 1 | N = (2-1)3! + (1-1)2! + 1 = 7 |
| | 8 | 2143 | 2 | 1 | 2 | N = (2-1)3! + (1-1)2! + 2 = 8 |
| | 9 | 2314 | 2 | 2 | 1 | N = (2-1)3! + (2-1)2! + 1 = 9 |
| | 10 | 2341 | 2 | 2 | 2 | N = (2-1)3! + (2-1)2! + 2 = 10 |
| | 11 | 2413 | 2 | 3 | 1 | N = (2-1)3! + (3-1)2! + 1 = 11 |
| | 12 | 2431 | 2 | 3 | 2 | N = (2-1)3! + (3-1)2! + 2 = 12 |
| | 13 | 3124 | 3 | 1 | 1 | N = (3-1)3! + (1-1)2! + 1 = 13 |
| | 14 | 3142 | 3 | 1 | 2 | N = (3-1)3! + (1-1)2! + 2 = 14 |
| | 15 | 3214 | 3 | 2 | 1 | N = (3-1)3! + (2-1)2! + 1 = 15 |
| | 16 | 3241 | 3 | 2 | 2 | N = (3-1)3! + (2-1)2! + 2 = 16 |
| | 17 | 3412 | 3 | 3 | 1 | N = (3-1)3! + (3-1)2! + 1 = 17 |
| | 18 | 3421 | 3 | 3 | 2 | N = (3-1)3! + (3-1)2! + 2 = 18 |
| | 19 | 4123 | 1 | 1 | 1 | N = (4-1)3! + (1-1)2! + 1 = 19 |
| | 20 | 4132 | 4 | 1 | 2 | N = (4-1)3! + (1-1)2! + 2 = 20 |
| | 21 | 4213 | 4 | 2 | 1 | N = (4-1)3! + (2-1)2! + 1 = 21 |
| | 22 | 4231 | 4 | 2 | 2 | N = (4-1)3! + (2-1)2! + 2 = 22 |
| | 23 | 4312 | 4 | 3 | 1 | N = (4-1)3! + (3-1)2! + 1 = 23 |
| | 24 | 4321 | 4 | 3 | 2 | N = (4-1)3! + (3-1)2! + 2 = 24 |

Пример 6. Пусть r=4. Тогда все перестановки r!=4!=24 перечислены со своими номерами в примере 5. Будем вычислять числа R по данным N по формулам (5) с проверкой по примеру 5.

 $N=N_4=22$. По примеру 5, R=4231. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [22/6] = 3;$$
 $i_1 = [(22+6-1)/6] = 4;$
 $N_3 = 22 - 3(4-1)! = 4;$

 I_1 есть i_1 -й, то есть четвертый по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1=4$;

$$i_2^* = [4/2] = 2;$$
 $i_2 = [(4+2-1)/2] = 2;$
 $N_2 = 4 - 2(3-1)! = 0;$

 I_2 есть i_2 -й, то есть второй по величине элемент из элементов 1, 2, 3, отсюда получаем, что $I_2=2;$

$$i_3^* = [0/1] = 0;$$
 $i_3 = [(0+1-1)/1] = 0,$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 1 и 3 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_3=3,\ I_4=1,\$ тогда получаем $R=4231,\$ что совпадает с 22-й перестановкой из примера 5.

 $N=N_4=13$. По примеру 5, R=3124. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [13/6] = 2;$$
 $i_1 = [(13+6-1)/6] = 3;$ $N_3 = 13 - 2(4-1)! = 1;$

 I_1 есть i_1 -й, то есть третий по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1=3$;

$$i_2^* = [1/2] = 0;$$
 $i_2 = [(1+2-1)/2] = 1;$
 $N_2 = 1 - 0(3-1)! = 1;$

 I_2 есть i_2 -й, то есть первый по величине элемент из элементов 1, 2, 4, отсюда получаем, что $I_2=1;$

$$i_3^* = [1/1] = 1;$$
 $i_3 = [(1+1-1)/1] = 1,$

 I_3 есть i_3 -й, то есть первый по величине элемент из элементов 2, 4, отсюда получаем, что $I_3=2$, значит, $I_4=4$. Тогда получаем, что R=3124, что совпадает с 13-й перестановкой из примера 5.

 $N=N_4=24$. По примеру 5, R=4321. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [24/6] = 4;$$
 $i_1 = [(24+6-1)/6] = 4;$ $N_3 = 24-4(4-1)! = 0;$

 I_1 есть i_1 -й, то есть четвертый по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 4$;

$$i_2^* = [0/2] = 0; \quad i_2 = [(0+2-1)/2] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 1, 2 и 3 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_2 = 3$, $I_3 = 2$, $I_4 = 1$, тогда получаем, что R = 4321, что совпадает с 24-й перестановкой из примера 5.

 $N=N_4=14$. По примеру 5, R=3142. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [14/6] = 2;$$
 $i_1 = [(14+6-1)/6] = 3;$ $N_3 = 14 - 2(4-1)! = 2;$

 I_1 есть i_1 -й, то есть третий по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1=3$;

$$i_2^* = [2/2] = 1;$$
 $i_2 = [(2+2-1)/2] = 1;$
 $N_2 = 2 - 1(3-1)! = 0;$

 I_2 есть i_2 -й, то есть первый по величине элемент из элементов 1, 2, 4, отсюда получаем, что $I_2 = 1$;

$$i_3^* = [0/1] = 0; \quad i_3 = [(0+1-1)/1] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 2 и 4 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_3=4,\ I_4=2,\$ тогда получаем, что $R=3142,\$ что совпадает с 14-й перестановкой из примера 5.

3. Способы моделирования перестановок

1. Если установлено взаимно однозначное соответствие между всеми перестановками R и их номерами N, что было сделано в п.2, то моделирование перестановок производим методом маркировки (см. [1]), при котором отрезок [0,1] делим на r! равных частей. Генерируем случайное число x и считаем смоделированной перестановку с номером части отрезка [0,1], на которую попадает число x.

Замечание 2. Если r! так велико, что 1/r! меньше точности генерируемого случайного числа, то оно будет соответствовать нескольким номерам частей отрезка [0,1]. Тогда среди них равновероятно методом маркировки выбираем одну конкретную перестановку.

- 2. Можно моделировать перестановки без их предварительной нумерации путем выполнения следующих шагов при их размере r:
 - 1. генерируем r случайных чисел \bar{x} $(x_1,\ldots,x_r);$
 - 2. строим для последовательности \bar{x} вариационный ряд $\bar{x}_{\bullet} = (x_{(1)}, \dots, x_{(r)});$
 - 3. выписываем номера элементов \bar{x} в порядке просмотра вектора $\bar{x}_{(ullet)}$, тем самым получаем перестановку R.

Замечание 3. В шаге 3 можно поменять местами векторы \bar{x} и $\bar{x}_{(\bullet)}$.

О МЕТОДЕ МАРКИРОВКИ

Для полноты изложения приведем кратко основные сведения о методе маркировки

Метод маркировки является одним из методов генерирования («разыгрывания») дискретной случайной величины с заданным законом распределения

$$\mathbf{P}(X=x_k)=p_k.$$

На отрезке [0,1] изобразим точки вида $\sum_{k=1}^{s}$, $s = 1, 2, \dots$

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Колчин Андрей Валентинович

к. ф.-м. н.

эл. почта: andrei.kolchin@gmail.com

Энатская Наталия Юрьевна

доцент, к. ф.-м. н.

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

ул. М. Пионерская, 12, Москва,

Россия, 113054

эл. почта: nat1943@mail.ru

Пусть r — возможное значение случайной величины R, равномерно распределенной на отрезке [0,1], тогда

$$\mathbf{P}(0 < r < p_1) = p_1,$$

$$\mathbf{P}(p_1 < r < p_1 + p_2) = p_2, \dots,$$

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^{k} p_i\right) = p_k, \dots$$

Отсюда следует, что попадание случайного числа R на k-й отрезок моделирует полученное значение случайной величины $X = x_k$.

Замечание. Для многих основных распределений так называемый коэффициент воспроизводимости $\gamma_k = p_{k+1}/p_k$ имеет для всех kудобное общее выражение как функции от k. Поэтому в данном случае при использовании метода маркировки нет необходимости загрузки в память всего ряда распределения, вместо этого $\{p_k\}$ вычисляется по мере необходимости по формуле

$$p_{k+1} = \gamma_k p_k.$$

Литература

1. Энатская Н. Ю., Хакимиллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012.

Kolchin, Andrey

e-mail: andrei.kolchin@gmail.com

Enatskaya, Natalia

Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Higher School of Economics 12 M. Pionerskaya St. 113054 Moscow, Russia

e-mail: nat1943@mail.ru

УДК 517.962.2:517.93

О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ

А. В. Ласунский

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

С помощью первого метода Ляпунова получены достаточные условия сохранения положения равновесия и его асимптотической устойчивости при дискретизации неавтономной системы дифференциальных уравнений второго порядка. Соответствующий результат иллюстрируется на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы недосягаема для хищника.

Ключевые слова: сохранение устойчивости при дискретизации, первый метод Ляпунова, неавтономная модель Лотки-Вольтерры.

A. V. Lasunsky. MAINTAINING STEADY-STATE EQUILIB-RIUM AFTER DISCRETIZATION OF THE SYSTEM

With the help of Lyapunov's first method we obtained sufficient conditions for maintaining the equilibrium state and its asymptotic stability after discretization of a nonautonomous system of second order differential equations. The result is illustrated by a modified Lotka-Volterra model in which part of the prey population is inaccessible for the predator.

 $K\,e\,y\,$ words: preservation of stability after discretization, Lyapunov's first method, nonautonomous Lotka-Volterra model.

Введение

Решение дифференциальных уравнений численными методами, как правило, основано на сведении этих уравнений к уравнениям в конечных разностях. Роль таких уравнений существенно определяется применением вычислительных машин, требующих представления задач в дискретном виде. Важной проблемой, возникающей при дискретизации, является проблема сохранения качественных характеристик исследуемых систем. Переход от непрерывных уравнений к разностным уравнениям может повлечь существенное изменение свойств решений системы, в частности, может нарушиться устойчивость. Вопросами

коррекции разностных схем для обеспечения согласованности между свойствами решений непрерывных и дискретных уравнений занимались В. И. Зубов [6], К. Деккер, Я. Вервер [3]. Связь между устойчивостью решений дифференциальных и разностных уравнений исследовалась в статьях М. А. Скалкиной [13, 14]. В своей работе Л. З. Фишман [15] изучает сохранение устойчивости решений дифференциальных уравнений при дискретизации их по методу Эйлера. Он показал, что устойчивость может не сохраняться при любом малом шаге дискретизации. Я. Е. Ромм [12] излагает схемы, ориентированные на компьютерный анализ устойчивости решений систем обыкновен-

ных дифференциальных уравнений. Проблема сохранения устойчивости при переходе от обыкновенных дифференциальных уравнений к разностным изучалась в работе А. П. Жабко и А. Ю. Александрова [2]. В последней работе авторы отмечают, что с практической точки зрения весьма актуальной является задача выделения классов систем, для которых сохранение качественных характеристик при переходе к дискретному виду имеет место и без дополнительной коррекции разностных схем. Для решения ряда задач кроме согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости требуется также сохранение таких характеристик, как устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям, границы бассейна аттрактора и др. Особый интерес представляют системы дифференциальных уравнений, нулевые решения которых асимптотически устойчивы в целом (глобально асимптотически устойчивы). В этой статье с помощью первого метода Ляпунова получены достаточные условия согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле сохранения положения равновесия и его асимптотической устойчивости при дискретизации. Соответствующий результат иллюстрируется на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы недосягаема для хищника.

Достаточные условия сохранения устойчивости положения равновесия неавтономной системы дифференциальных уравнений второго порядка при дискретизации

Пусть (x_0, y_0) – положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y), \\ \dot{y} = g(t, x, y), \end{cases}$$
 (1)

$$t \geqslant t_0, \ f, g \in \mathbb{C}^{(0,1,1)}_{t,x,y}([t_0; +\infty) \times D),$$

где $D \subset \mathbb{R}^2$ окрестность (x_0,y_0) . Стандартной заменой $u=x-x_0,v=y-y_0$ систему (1) можно привести к системе

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u + x_0, v + y_0) \\ \dot{v} = g(t, u + x_0, v + y_0) \end{cases}$$

с нулевым положением равновесия.

Матрица A(t) системы первого приближения в окрестности этого положения равновесия имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} f'_x(t, x_0, y_0) & f'_y(t, x_0, y_0) \\ g'_x(t, x_0, y_0) & g'_y(t, x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

$$A(t) \in \mathbb{C}[t_0; +\infty).$$

Воспользуемся теоремой Ляпунова [4] об устойчивости по первому приближению в следующей формулировке.

Теорема 1. Если система первого приближения

$$\dot{y} = A(t)y, \ y \in \mathbb{R}^n, \ A(t) \in \mathbb{C}[t_0, +\infty),$$

$$\sup_{t} ||A(t)|| < \infty$$

правильна, все ее характеристические показатели отрицательны, причем выполнено условие нелинейности

$$||f(t,x)|| \le \psi(t)||x||^m, m > 1,$$

где $\psi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t \geqslant t_0$ с нулевым характеристическим показателем, то тривиальное решение x=0 полной нелинейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \ f(t,0) = 0,$$

$$f(t,x) \in \mathbb{C}_{t,x}^{(0,1)} \ (t_0 \leqslant t < +\infty, \ ||x|| < h)$$

экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$.

Отметим, что дискретный аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению получен В. Б. Демидовичем [5].

Как для системы дифференциальных, так и для системы разностных уравнений в неавтономном случае об устойчивости положения равновесия нельзя судить лишь по системе первого приближения. Даже если система первого приближения правильна и ее показатели Ляпунова отрицательны, устойчивость можно испортить нелинейными членами. В качестве иллюстрации этого факта приведем пример.

Пример 1. Скалярное уравнение

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2 - 4 \cdot 6^n x_n} = f(n, x_n)$$

имеет положение равновесия $x_n=0$. Так как $\frac{\partial f(n,0)}{\partial x_n}=0,5$, то уравнение первого приближения имеет вид $y_{n+1}=0,5y_n$, положение равновесия $y_n=0$ которого асимптотически устойчиво.

Построим общее решение исходного нелинейного уравнения. Имеем

$$x_{n+1}(2 - 4 \cdot 6^n x_n) = x_n,$$

$$\frac{1}{2^{n+1}x_{n+1}} - \frac{1}{2^n x_n} = -2 \cdot 3^n,$$

$$\Delta\left(\frac{1}{2^n x_n}\right) = -2 \cdot 3^n,$$

$$\frac{1}{2^n x_n} = C - \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot 3^k = C_1 - 3^n,$$

$$x_n = \frac{1}{2^n (x_0^{-1} + 1 - 3^n)}, \ x_0 \neq 0.$$

Хотя все решения стремятся к нулю при $n \to +\infty$, тем не менее тривиальное решение $x_n=0$ исходного уравнения неустойчиво по Ляпунову. Решения, сколь угодно близкие к нулю в начальный момент времени

$$x_0 = \frac{1}{2^N - 1 + 2^{-2N}} = \delta,$$

удовлетворяют условию $x_N = 2^N$. Неустойчивость можно было ожидать, так как достаточное условие на нелинейность [5] не выполнено. Функция

$$\psi(n) = \frac{\partial^2 f(n,0)}{\partial x_n^2} = 2 \cdot 6^n$$

имеет положительный показатель Ляпунова.

Теорема 2. Пусть существует $\lim_{t\to +\infty} A(t) = A$, причем $\det A > 0$, SpA < 0. Пусть также выполнено условие на нелинейные члены системы (1) (см. теорему 1), тогда положение равновесия (x_0, y_0) системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Действительно, линейная система $\dot{u} = A(t)u$ правильна, так как она почти приводима [1] к системе с постоянной матрицей. Из неравенств $\det A > 0$ и SpA < 0 следует, что собственные числа матрицы A второго порядка имеют отрицательную вещественную часть. Показатели Ляпунова в случае постоянной матрицы коэффициентов системы совпадают с вещественными частями собственных чисел матрицы A. Линейная система с постоянной матрицей коэффициентов имеет устойчивые характеристические показатели. Так как показатели Ляпунова в случае их устойчивости не меняются при линейных возмущениях, стремящихся к нулю на $+\infty$, то показатели Ляпунова системы первого приближения $\dot{u} = A(t)u$ также отрицательны.

Отметим, что еще К. П. Персидский [11] изучал линейные системы дифференциальных уравнений с коэффициентами-функциями слабой вариации. Он получил коэффициентный признак устойчивости характеристических показателей. Им же показано, что если

функция f(t) имеет конечный предел на $+\infty$, то функция f(t) слабой вариации.

При численном интегрировании системы (1) нас будет интересовать сохранение положения равновесия при дискретизации, а также сохранение его устойчивости. Наиболее простым способом построения решения в точке t_{n+1} , если оно известно в точке t_n , является способ, основанный на разложении в ряд Тейлора. Обрывая ряды на соответствующих членах, для системы (1) мы можем получить

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \end{cases}$$
 (2)

(метод Эйлера).

Если (x_0, y_0) – положение равновесия системы (1), то оно остается положением равновесия системы (2). Матрица $P(n) = P(t_n)$ системы первого приближения в окрестности положения равновесия (x_0, y_0) системы (2) имеет вид P(n) = E + hA(n), E – единичная матрица.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда существует h_0 такое, что для всех $0 < h < h_0$ положение равновесия (x_0, y_0) системы (2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем, что при достаточно малом h положение равновесия (x_0,y_0) системы (2) также асимптотически устойчиво, как и у системы (1). Обозначим $P=\lim_{n\to+\infty}P(n)=E+hA$. Собственные числа матрицы P второго порядка по модулю меньше 1 тогда и только тогда, когда

$$|SpP| - 1 < \det P < 1. \tag{3}$$

Если $\det A>0$, $Sp\,A<0$, то для достаточно малого h имеем $|Sp\,P|-1=|2+hSp\,A|-1=1+hSp\,A$, $\det P=\det(E+hA)=1+hSp\,A+h^2\det A$. Неравенство (3), очевидно, выполняется. Шаг h достаточно выбрать удовлетворяющим неравенствам $2+hSp\,A>0$, $Sp\,A+h\det A<0$. Воспользуемся следующим утверждением [10].

Теорема 4. Если матрица коэффициентов системы

$$x(n+1) = P(n)x(n), \quad \det P(n) \neq 0,$$

 $x \in \mathbb{R}^m, \quad n \in \mathbb{Z}^+$

имеет предел $\lim_{n\to+\infty} P(n) = P$, $\det P \neq 0$, то показатели Ляпунова решений этой системы совпадают с показателями Ляпунова предельной системы y(n+1) = Py(n) и исходная система правильна.

Условие на нелинейность системы (1) дает аналогичное условие на нелинейность системы (2). По дискретному аналогу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [5] положение равновесия (x_0, y_0) системы (2) асимптотически устойчиво. Теорема 3 доказана

Неавтономная модель Лотки-Вольтерры

Проиллюстрируем предыдущий результат на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы $\varphi(x,y)$ недосягаема для хищника [9]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha(t) \left(x - M^{-1}x^2 - K^{-1}(x - \varphi(x, y))y \right), \\ \dot{y} = \beta(t)y \left(L^{-1}(x - \varphi(x, y)) - 1 \right), \end{array} \right.$$

K,M,L — положительные числа, $t\in\mathbb{R}^+,$ $0\leqslant \varphi(x,y)< x$. Мальтузианские коэффициенты роста численности жертв $\alpha(t)>0$ и убывания численности хищников $(-\beta(t))<0$ зависят от времени. Будем предполагать, что существуют $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=\alpha>0,\ \lim_{t\to+\infty}\beta(t)=\beta>0$, что соответствует стабилизации мальтузианских коэффициентов с течением времени.

Из биологической интерпретации системы (4) следует, что фазовые переменные x(t), y(t) должны принимать лишь неотрицательные значения. Выполнение этого факта вытекает из следующей теоремы [7].

Теорема 5. Для того чтобы решение системы

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n), \ i = \overline{1, n}$$

при любых неотрицательных начальных условиях было неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы функции F_i удовлетворяли условию квазиположительности:

$$F_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \ge 0, \ i = \overline{1, n}$$

npu любых неотрицательных переменных $x_j,\ j \neq i.$

Здесь уместно отметить монографию [8], посвященную систематическому изложению математической теории отбора.

Рассмотрим несколько случаев вида $\varphi(x,y)$:

1) для случая $\varphi(x,y)=m, \ m\geqslant 0$ положение равновесия

$$x_0 = m + L, \ y_0 = KL^{-1}M^{-1}(m+L)(M-L-m)$$
(5)

при естественном предположении M>L+m имеет биологический смысл. Для элементов

матрицы A(t) системы первого приближения получаем следующие выражения:

$$a_{11}(t) = \alpha(t)L^{-1}M^{-1}(m^2 - L^2 - mM);$$

$$a_{21}(t) = KM^{-1}(m+L)(M-L-m)\beta(t);$$

$$a_{12}(t) = -LK^{-1}\alpha(t); \ a_{22}(t) = 0.$$

Имеем

$$\det A(t) = LM^{-1}(m+L)(M-L-m)\alpha(t)\beta(t) > 0,$$

$$Sp\,A(t) = \alpha(t)L^{-1}M^{-1}(m^2-L^2-mM) < -(L+m)M^{-1}\alpha(t) < 0.$$
 Ясно, что для матрицы $A = \lim_{t\to +\infty} A(t)$ при

Ясно, что для матрицы $A=\lim_{t\to +\infty}A(t)$ при условии M>L+m также выполняются неравенства $\det A>0,\ Sp\,A<0.$ Условие на нелинейность выполнено, так как функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ имеют нулевые характеристические показатели в силу ограниченности. По теореме 2 положение равновесия (5) системы (4) асимптотически устойчиво.

Если мы подвергнем систему (4) дискретизации, то нужно позаботиться о неотрицательности x_n и y_n . Ясно, что для системы (2) этот факт в общем случае может не иметь места. Вместо системы (2) мы рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \exp(hf(t_n, x_n, y_n)), \\ y_{n+1} = y_n \exp(hg(t_n, x_n, y_n)). \end{cases}$$
 (6)

Ясно, что если (x_0,y_0) положительное положение равновесия системы (1), то оно является положением равновесия и системы (6), причем $x_n>0,\ y_n>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Матрица $\widetilde{P}(n)$ системы первого приближения в окрестности положения равновесия (x_0, y_0) системы (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + x_0 h f_x'(t_n, x_0, y_0) & x_0 h f_y'(t_n, x_0, y_0) \\ y_0 h g_x'(t_n, x_0, y_0) & 1 + y_0 h g_y'(t_n, x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$
(7)

Для системы (4) и рассматриваемого случая 1) имеем

$$\widetilde{P} = \lim_{n \to +\infty} \widetilde{P}(n) = E + h \begin{pmatrix} x_0 a_{11} & x_0 a_{12} \\ y_0 a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\lim_{t\to +\infty} A(t) = A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{array} \right).$$

Для достаточно малых h с учетом того, что $SpA=a_{11}<0$, $\det A=-a_{12}a_{21}>0$, имеем $|Sp\widetilde{P}|-1=|2+hx_0a_{11}|-1=1+hx_0a_{11}<\det \widetilde{P}<1$, так как $\det \widetilde{P}=1+hx_0a_{11}+x_0y_0h^2\det A$. Шаг h достаточно выбрать удовлетворяющим условиям

$$2 + hx_0a_{11} > 0$$
, $a_{11} + y_0h \det A < 0$. (8)

Так как правые части уравнений системы (4) являются многочленами двух переменных с ограниченными коэффициентами, то для системы (6) выполнено условие на нелинейность для применения теоремы об устойчивости по первому приближению.

Теорема 6. Если M > L+m и шаг дискретизации h удовлетворяет неравенствам (8), то положение равновесия (5) системы (6), полученной дискретизацией системы (4) для случая $\varphi(x,y) = m, \ m \geqslant 0$, асимптотически устойчиво.

2) Для случая $\varphi(x,y)=mx,\ m\in(0;1)$ система (4) переобозначением коэффициентов $(1-m)K^{-1}=K_1^{-1},\ (1-m)L^{-1}=L_1^{-1}$ приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)x(1 - yK_1^{-1} - xM^{-1}), \\ \dot{y} = \beta(t)y(xL_1^{-1} - 1), \end{cases}$$
(9)

с положением равновесия $(L_1; K_1 M^{-1}(M-L_1))$, которое получается из положения равновесия (5), если положить m=0, $K=K_1$, $L=L_1$. Итак, случай 2) сводится к случаю 1), если m=0. Теорема 6 остается справедливой.

3) Для случая $\varphi(x,y)=my,\ m\in(0;1)$ система (4) имеет два нетривиальных положения равновесия. Одно из них не имеет биологического смысла, так как в нем $x_0<0$. При условии M>L второе положение равновесия $(x_0;y_0)$ лежит в области допустимых значений переменных x,y. Здесь x_0 — положительный корень уравнения $Kmx^2+(ML-MKm)x-ML^2=0,\ y_0=(x_0-L)m^{-1}[9]$. Далее в этом пункте мы рассматриваем это положение равновесия. Матрица A(t) системы первого приближения в окрестности $(x_0;y_0)$ имеет следующие элементы:

$$a_{11}(t) = \alpha(t) \left(1 - 2M^{-1}x_0 - (x_0 - L)m^{-1}K^{-1} \right),$$

$$a_{12}(t) = \alpha(t)K^{-1}(x_0 - 2L),$$

$$a_{21}(t) = \beta(t)m^{-1}L^{-1}(x_0 - L),$$

$$a_{22}(t) = \beta(t)L^{-1}(L - x_0).$$

Для этой матрицы $\det A(t)>0$, а если M<2L, то SpA(t)<0 [9]. Заметим, что если существуют $\lim_{t\to +\infty}\alpha(t)=\alpha>0$, $\lim_{t\to +\infty}\beta(t)=\beta>0$, то для матрицы $A=\lim_{t\to +\infty}A(t)$ имеем тоже строгие неравенства $\det A>0$, SpA<0.

Теорема 7. Если L < M < 2L и шаг дискретизации h удовлетворяет неравенствам $2 + h(x_0a_{11} + y_0a_{22}) > 0$, $x_0a_{11} + y_0a_{22} + h(x_0a_{11} + y_0a_{22})$

 $x_0y_0h \det A < 0$, то положение равновесия (x_0, y_0) системы (6), полученной дискретизацией системы (4) для случая $\varphi(x, y) = my$, m > 0, асимптотически устойчиво.

Действительно, для матрицы \tilde{P} выполняются неравенства $|Sp\tilde{P}|-1=|2+h(x_0a_{11}+y_0a_{22})|-1=1+h(x_0a_{11}+y_0a_{22})<1+h(x_0a_{11}+y_0a_{22})+x_0y_0h^2$ det $A=\det \tilde{P}<1$, так как коэффициенты $a_{11}<0$ и $a_{22}<0$ [9]. Система первого приближения $u_{n+1}=\tilde{P}(n)u_n$ правильна и имеет отрицательные показатели Ляпунова (см. теорему 4). Условие на нелинейность тоже выполнено.

Заключение

Указан класс неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для которых сохранение положения равновесия и его асимптотической устойчивости при переходе к дискретному виду имеет место и без дополнительной коррекции разностных схем. Рассмотрено приложение этого результата на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы недосягаема для хищника.

Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/2301).

Литература

- 1. A dрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: изд. Санкт-Петербургского университета, 1992. 240 с.
- 2. Александров А. Ю., Жабко А. П. О сохранении устойчивости при дискретизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журнал. 2010. Т. 51, № 3. С. 481–497.
- 3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
- 4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
- 5. Демидович В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247—1255.
- 6. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. СПб.: СПбГУ, 2001. 354 с.
- 7. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с.

- 8. *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: изд. Нижегородского университета, 2007. 324 с.
- 9. Ласунский А. В. Состояния равновесия неавтономной модели Лотки-Вольтерры при наличии убежища для жертвы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 445–448
- 10. Ласунский А. В. О положениях равновесия некоторых неавтономных разностных уравнений // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 3. С. 120–126.
- 11. Персидский K. П. О характеристических числах дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1947. № 1. С. 5–47.

- 12. *Ромм Я. Е.* Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 12. С. 105–118.
- 13. Скалкина М. А. О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным // ДАН СССР. 1955. Т. 104, № 4. С. 505-508.
- 14. Скалкина М. А. О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечноразностных уравнений // ПММ. 1955. Т. 19, N 3. С. 287–294.
- 15. Фишман Л. З. К сохранению устойчивости дифференциальных уравнений при их дискретизации // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 568–569.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ласунский Александр Васильевич

доцент кафедры высшей математики, д. ф.-м. н. Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, Россия, 173003 эл. почта: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru тел.: (8162) 629968

Lasunsky, Alexander Novgorod State University

Novgorod State University 41 B. Sankt-Petersburgskaya St., 173003 Veliky Novgorod, Russia e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru tel.: (8162) 629968 УДК 550.34,550.8.08,551.24

ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС МОНИТОРИНГА РАДОНА

А. Ю. Лукьянов¹, А. А. Когут¹, Б. З. Белашев^{2,1}

1 Петрозаводский государственный университет

Программно-аппаратный комплекс мониторинга радона в почвенном воздухе и воздухе помещений разработан на базе сейсмической радоновой станции «СРС-05». Входящие в состав комплекса компьютер и устройства связи расширяют функциональные возможности станции, реализуют передачу регистрируемых данных на сервер или отдельным пользователям. В ходе испытаний комплекса получены данные о динамике объемной активности радона на отдельных участках территории Карелии. Проанализированы преимущества и недостатки разработанного комплекса.

Ключевые слова: радон, станция, компьютер, модем, программа, скрипт, сети, сервер, передача.

A. Yu. Lukyanov, A. A. Kogut, B. Z. Belashev. SOFTWARE AND HARDWARE SYSTEM OF RADON MONITORING

Software and hardware system for monitoring radon in soil air and indoor air has been developed on the basis of seismic radon station "SRS-05". The computer and communications devices included in this system extend the station functionality and implement transfer the recorded data to a server or to individual users. Data on the dynamics of radon activity concentration in certain areas in Karelia were received in trials. The advantages and disadvantages of the developed complex have been analysed.

 Key words: radon, station, computer, modem, software, script, network, server, transfer.

Введение

Интерес к проблематике, связанной с радоном, определен его неблагоприятным воздействием на экологическую обстановку и здоровье людей. Радон — это тяжелый инертный газ, не имеющий цвета, запаха, растворимый в воде и переносящийся водными потоками на значительные расстояния. Образующиеся в радиоактивных превращениях урана, радия, тория изотопы актиона, радона, торона дают начало цепочкам новых распадов с участием

альфа, бета, гамма излучений и долгоживущих дочерних радионуклидов [1]. По данным ООН, опасность облучения населения Земли от эндогенного радона и продуктов его распада, поступающих в атмосферу и почву, составляет 43 % [6]. Этот факт определяет важность мониторинга радона в почвенном воздухе, в воздухе жилых и производственных помещений. Особое значение мониторинг радона имеет для территории Карелии, на которой имеются содержащие уран, радий, торий гранитные массивы, урановые месторождения, дли-

² Институт геологии Карельского научного центра РАН

тельно сохраняющие активность тектонические зоны – каналы транспорта флюидов, интенсивно развивается горнодобывающая промышленность [7].

В статье описан программно-аппаратный комплекс, в автоматическом режиме ведущий мониторинг радона и передающий данные наблюдений в центр коллективного пользования или отдельным пользователям.

Структура комплекса и обсуждение его работы

Ключевым элементом комплекса является сейсмическая радоновая станция «СРС-05» одна из последних разработок НПО «HTM Защита» (рис. 1) [11]. От других отечественных приборов – детекторов-индикаторов радона «СИРАД М106 N» [14], радиометров РГА-500 [18] и РГГ-01 Т [1] – станция «СРС-05» отличается классом точности и расширенными функциональными возможностями, а от зарубежных аналогов [15] – низкой стоимостью. Помимо объемной активности радона и торона станция измеряет параметры окружающей среды: давление, температуру, влажность воздуха, а также напряжение на аккумуляторной батарее, накапливая данные измерений во внутренней памяти. Для питания станции используют аккумулятор напряжением 12 В. Ток, потребляемый станцией, в режиме измерений составляет 500 мА, в режиме ожидания – 100 мА. Расположенная на поверхности или закапываемая в землю станция длительное время может работать в автономном режиме.

Конструкция станции предусматривает передачу данных на компьютер, хотя компьютер в ее состав не входит. К компьютеру станцию подключают через разъем для СОМпорта (DB9 FEMALE), работающий по протоколу физического уровня RS232. Если у компьютера СОМ-порт отсутствует, подключение проводят к USB-порту через переходник. У автономно действующей станции информацию считывают в интервалах ожидания, когда измерения не проводятся. Информационное взаимодействие между станцией и компьютером идет по закрытому протоколу с помощью программного обеспечения, входящего в комплект поставки и состоящего из двух программ. Первая программа задает режим работы станции. Вторая программа дает возможность считывать, просматривать и сохранять данные измерений в ручном режиме в интервале времени, когда измерения не проводятся. Окно интерфейса этой программы показано на рис. 2. Данные на компьютер передаются в форматированном виде, что упрощает их последующую обработку.

Малые размеры, вес, удобная компактная форма, низкое потребление при большой емкости аккумуляторных батарей позволяют использовать радоновую станцию в режиме автономной работы в течение 2–3 недель. Однако для мониторинга радона с передачей данных станция «СРС-05» не предназначена.

Разработка на базе станции «СРС-05» программно-аппаратного комплекса (рис. 3) имела целью усовершенствование станции путем придания ей коммуникационных свойств, повышающих оперативность получения, анализа данных и принятия решений. Помимо станции и сопряженного с ней компьютера в состав комплекса входили устройства связи, не влияющие на работу измерительного модуля станции, но обеспечивающие посредством GSM-сетей выход компьютера в сеть Интернет и передачу данных измерений на сервер коллективного доступа или отдельным пользователям.

Основные усилия при разработке комплекса были сосредоточены на автоматизации передачи данных станции в компьютер. Процедуры, воспроизводящие нажатие клавиш интерфейса (см. рис. 2) при считывании данных оператором, реализованы скриптами, выполненными в пакете AutoHotKey [10]. При установлении соединения компьютера со станцией скрипты, управляющие работой программы считывания, заносят данные измерений со станции «СРС-05» в фиксированный файл компьютера и проводят его преобразование. Данные считываются за период с предыдущего обращения к станции и сохраняются в памяти станции.

По завершении сеанса связи со станцией данные файла через сеть Интернет по протоколу FTP передаются на сервер коллективного доступа. Подключение к Интернет при отсутствии структурированной кабельной системы или беспроводной сети Wi-Fi проводилось посредством мобильных сетей связи стандартов GSM/UMTS через соответствующие модемы. В подвальных помещениях с надежной связью применяли миниатюрные модемы с встроенной антенной в формфакторе USBмодема. При неустойчивом приеме сигналов использовали GSM-терминал промышленного исполнения Siemens TC65 с внешней антенной. Если соединение с сервером за заданное количество попыток установить не удавалось, данные передавали в следующем цикле коммуникаций. Между циклами приема-передачи дан-



 $Puc.\ 1.\$ Сейсмическая радоновая станция «СРС-05»



Рис. 2. Окно интерфейса программы считывания данных

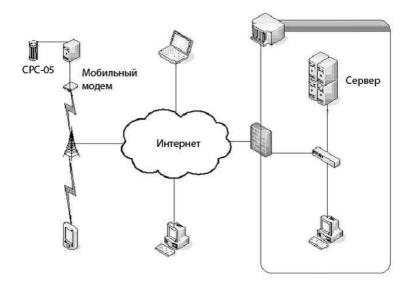


Рис. 3. Структурная схема программно-аппаратного комплекса на базе станции «СРС-05»

ных компьютер находился в режиме пониженного энергопотребления.

Для защиты канала связи предусмотрено подключение к серверу коллективного доступа по виртуальным ІР-адресам защищенной сети. Также могут быть задействованы встроенные в Windows средства VPN или наложенные сертифицированные средства защиты, такие как ViPNet Клиент, обеспечивающие межсетевое экранирование [16]. Поскольку интервал между измерениями станции составляет час, а установление равновесной концентрации радона занимает несколько часов, передача данных на сервер ведется малыми порциями раз в сутки. Это минимизирует требования к мобильной связи, позволяет использовать сети третьего (3G) и второго (GSM/GPRS/EDGE) поколений, расширяет площадь покрытия возможного сбора данных.

Данные хранятся в пространственно разделенных точках, на трех устройствах: станция, компьютер, сервер. Многоуровневое резервирование обеспечивает сохранность данных. На сервере и передающем компьютере хранятся журналы соединений. Эта информация оказывается полезной при диагностике неисправностей комплекса и планировании экспериментов.

Настройка программ комплекса проводится после инсталляции периферийных устройств. Запуск скрипта расписания работы комплекса осуществляет стандартный планировщик заданий Windows [13]. Основная часть скрипта задает параметры в зависимости от режима работы комплекса: настройки подключения к серверу коллективного доступа, условия перехода компьютера в энергосбе-

регающий режим, подключение к Интернет, каталоги хранения данных, число попыток соединений на разных этапах, шаблоны имен файлов с данными измерений. По умолчанию имя файла состоит из фиксированной части, даты и времени считывания данных. Этим обеспечивается уникальность имен файлов и упрощаются последующие операции с ними. Для минимизации трафика лучше использовать короткие имена, так как при плохом приеме лишние байты приближают разрыв соединения. При считывании данных один раз в конце суток указывать время в имени файла не требуется.

Одна из методических проблем разработки комплекса была связана с выбором компьютера и модема. В качестве компьютера может быть взят любой персональный или промышленный компьютер под управлением Windows XP, имеющий в своем составе от двух USB-портов, используемых для соединения со станцией через переходник и подключения устройств, требующихся для настройки комплекса. При выборе компьютера внимание уделяли системам питания и входу/выходу в режим пониженного энергопотребления. При автономном питании компьютера применение конвертеров напряжения 12–220 В оказалось энергетически неэффективным из-за преобразования постоянного тока в переменный и обратно и связанного с ним потребления от 2 Вт даже в режиме низкого энергопотребления. Их использование оправданно при обслуживании комплекса раз в двое-трое суток и емкости батареи питания компьютера не менее 40 Ач. С батареей 40 Ач при максимальной частоте замеров два раза в час станция «СРС-05» работает 17 дней. Оценки показали, что использование нетбуков с большой емкостью встроенной батареи и компьютеров на базе плат со встроенным блоком питания с входным напряжением 12 В или внешними блоками питания типа PicoUPS, работающими в диапазоне 6-24 В [17], может значительно повысить ресурс автономной работы компьютера. При подключении компьютера к электрическим сетям комплекс функционирует без вмешательства человека в течение времени, определяемого разрядом аккумуляторной батареи радоновой станции до напряжения 10,6 В. На участках без сетей электропитания, вне закрытых помещений принимались меры, предохраняющие станцию и коммуникационное оборудование от вредных факторов окружающей среды.

Наличие нескольких станций «СРС-05» позволяет создать на базе рассмотренного комплекса распределенную систему мониторинга, собирающую информацию о динамике объемной активности радона на обширной территории, наподобие сети сейсмостанций, расположенных в разных районах Карелии [8]. В этом случае процессы измерения и передачи данных на сервер от станций должны быть синхронизированы, а в используемых радоновых станциях проведена корректная установка времени.

Результаты испытания комплекса

Разработанный комплекс прошел испытание в подвальных помещениях Института геологии Карельского научного центра РАН, корпуса № 1 физико-технического факультета Петрозаводского университета, в деревнях Намоево и Тюппега, пригороде Петрозаводска поселке Соломенное. На рис. 4 приведены результаты измерения объемной активности радона в п. Соломенное.

Полученные результаты свидетельствуют о сложном, нестационарном, циклическом характере зависимости объемной активности радона от времени. В технологиях обработки данных Data Minning такие сигналы сегментируют [3]. Этот факт подкрепляет выбор коротких порций данных, передаваемых на сервер в течение суток.

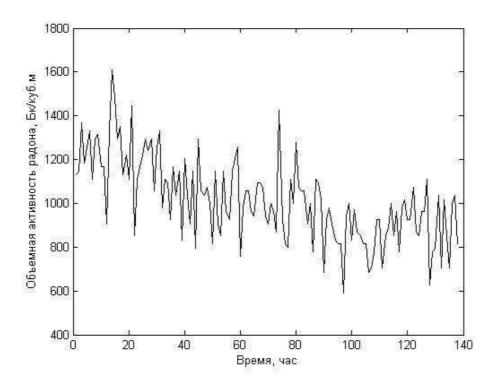
24 мая комплекс работал в подвале корпуса № 1 физико-технического факультета, когда в Охотском море произошло землетрясение магнитудой 8,2, гипоцентр которого находился на глубине около 600 км [12]. Сейсмические волны основного события и его афтершоков ощущались на обширной территории России. Сейсмические станции Карелии зафикси-

ровали землетрясение в виде подземных толчков интенсивностью 2–3 балла. Однако во временном ходе объемной активности радона эти толчки замечены не были (рис. 5, а).

Для выделения во временной зависимости объемной активности радона моментов, связанных с приходом сейсмических волн, данные были обработаны при помощи чувствительного к локальным особенностям сигналов вейвлет алгоритма [9], программно реализованного в системе компьютерной математики «MATLAB» [2]. Используя вейвлеты Добеши и Симлета [5], алгоритм устранял шум, представлял сигнал аппроксимирующими и детализирующими коэффициентами, вейвлетспектрограммой (рис. 5, б, в, г). В коэффициентах и спектрограмме искомые пики от сейсмических волн основного события и афтершоков проявились с временной задержкой. Первый пик отвечал 14 часам, а сейсмические волны станцией «Петрозаводск» были зарегистрированы около 10 часов. Задержка в 4 часа связана с временем, необходимым для установления равновесной концентрации радона. Такую задержку наблюдают при горных ударах, вызванных производственными взрывами [4].

Заключение

Разработанный на базе радоновой станции «СРС-05» программно-аппаратный комплекс ведет мониторинг объемной активности радона и торона и других параметров окружающей среды: температуры, давления, влажности в почвенном воздухе или в воздухе помещений и передает полученные данные на сервер и/или конкретным пользователям. Время автономной работы комплекса две-три недели соответствует разряду аккумуляторной батареи станции «СРС-05». Передача данных на сервер малыми порциями раз в сутки отвечает природе процессов эксхаляции радона и уменьшает затраты на мобильную связь. Размещение форматированных данных на сервере, в компьютере и памяти станции повышает надежность их хранения. Комплекс можно рассматривать как элемент распределенной автоматизированной системы измерений, собирающей данные с большой площади и позволяющей на основании полученной информации делать заключения о пространственно-временном ходе геодинамических процессов, активности разломов, предвестниках землетрясений, экологической обстановке, интегральных дозах облучения населения. Его также можно использовать при комплексировании с другими геофи-



 $Puc.\ 4.\ Данные$ мониторинга радона в подвале дома в п
. Соломенное 21–28.09.2013

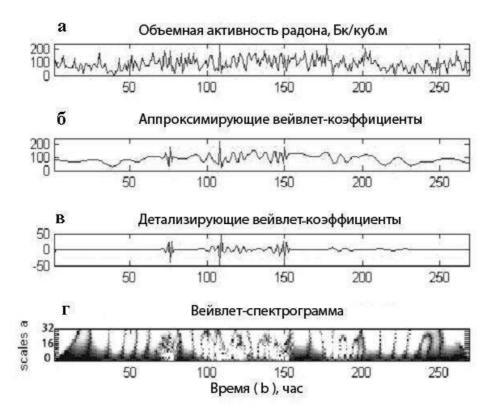


Рис. 5. Определение бифуркаций в данных мониторинга радона 23–27 мая 2013 г. вейвлет-алгоритмом

зическими методами для повышения качества интерпретации данных.

Работа выполнена в рамках подпроекта «Создание и развитие деятельности центра мониторинга геофизических наблюдений» Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

Литература

- 1. Бекман И. Н. Радон: друг, врач и помощник. Учебное пособие. М.: Изд. МГУ, 2000.
- 2. Белашев Б. З. Вейвлет-определение особенностей сигналов. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 201010705, 2010.
- 3. Геппенер В. В., Тристанов А. Б., Фирстов П. П. Применение методов Data minning в обработке сигнальной информации (в геофизических исследованиях). URL: www.emsd. ru/konf060117lib/pdf/25-geppener-tristanov.pdf
- 4. Динамические процессы в системе внутренних и внешних взаимодействующих геосфер // Сб. научных трудов ИДГ РАН под ред. акад. В. В. Адушкина. М.: Геос, 2005. 266 с.
- 5. Дъяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2004. 440 с.
- 6. Ионизирующие излучения: источники и биологические эффекты // Доклад на Генеральной Ассамблее ООН за 1988. Т. 1. 882 с.
- 7. $Tuxonos\ M.\ H.$ Опасные пятна на карте России. URL: www.proatom.ru/modules.php?name= News

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Лукьянов Александр Юрьевич

аспирант физико-технического факультета Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: luausr@gmail.com тел.: (8142) 719675

Когут Антон Александрович

аспирант физико-технического факультета Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: tooogoood@gmail.com тел.: (8142) 719675

Белашев Борис Залманович

ведущий научный сотрудник, д. т. н. Институт геологии Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 профессор физико-технического факультета Петрозаводский государственный университет эл. почта: belashev@krc.karelia.ru тел.: (8142) 782753

- 8. Шаров Н. В. Сейсмический мониторинг природных и техногенных событий на территории Карелии / Геология Карелии от архея до наших дней // Материалы докладов Всероссийской конференции, посвященной 50-летию Института геологии КарНЦ РАН 24–26 мая 2011. Петрозаводск, 2011. С. 199–203.
- 9. Belashev B. Z. Methods to reveal Hidden Structures of Signals and their Applications // Вестник РУДН, 2010, № 3, вып. 3(2). Математика. Физика. Информатика. С. 132–135.
- 10. http://ahkscript.org/(дата обращения: 02.08. 2013).
- $11.\ http://ntm.ru/products/133/7282$ (дата обращения: 09.08.2013).
- 12. http://ria.ru/eco/20130830/959647554.html (дата обращения: 17.08.2013).
- 13. http://technet.microsoft.com/ru-ru/library/cc721931.aspx (дата обращения: 22.08.2013).
- 14. http://www.dozimetri-msk.ru/indikator-rado-na-sirad-mr-106 (дата обращения: 25.08.2013).
- $15.\ http://www.durridge.com/?gclid=COn5z-y2sboCFcN7cAodYg0AOw$ (дата обращения: 27.08.2013).
- 16. http://www.infotecs.ru/products/catalog.php? ELEMENT-ID=2870 (дата обращения: 31.08. 2013).
- 17. http://www.mini-box.com/picoUPS-120-12V-DC-micro-UPS-battery-backup (дата обращения: 02 09 2013)
- 18. http://www.radek.ru/product/Apparatura-dlya-izmereniya-radona/49/ (дата обращения: 12.09.2013).

Lukyanov, Aleksandr

Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: luausr@gmail.com tel.: (8142)719675

Kogut, Anton

Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: tooogoood@gmail.com tel.: (8142) 719675

Belashev, Boris

Institute of Geology, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185610 Petrozavodsk, Karelia, Russia
Petrozavodsk State University
e-mail: belashev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 719675

УДК 519:65

О СГЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ

С. Е. Михеев

Санкт-Петербургский государственный университет

Если функция f имеет кусочно-непрерывную производную порядка n, ограниченную на участках непрерывности, то она может быть сглажена до функции, имеющей производную порядка не ниже, чем n. Сглаживание может быть выполнено сложением с алгебраическим сплайном степени n+1 дефекта 1, который определяется в сколь угодно малой односторонней окрестности точки разрыва производной $f^{(n)}$. Возможно также сохранить значения производных более низких порядков в бывшей точке разрыва n-й производной и увеличить ограничение на нее во всей области задания не более чем на заранее заданную сколь угодно малую величину. Если f имеет также непрерывные производные до порядка n+k в области C — там, где непрерывна $f^{(n)}$, то сглаживание алгебраическим сплайном S степени n+k+1 помимо предыдущих свойств дополнительно может обеспечить непрерывность производных суммы $(f+S)^{(n+i)}$, i=1,...,k, в области C.

Ключевые слова: сплайн, сглаживание, сходимость.

S. E. Mikheev. A SMOOTHING OF FUNCTIONS

If a function f has a sectionally continuous derivative of order n bounded in sections of continuity, then it can be smoothed up to the function having the continuous derivative of the order no less than n. The smoothing can be done by summing with the algebraic spline of degree n+1 with defect 1, which is determined in an arbitrarily small one-sided neighborhood of the node, where there is the gap of the n-th derivative of f. In addition, it is possible to save values of lower order derivatives in the node and disrupt the original upper estimation of the n-th derivative module in the whole domain of its definition only up to an arbitrarily small value. If f additionally has continuous derivatives $f^{(n+1)}, ..., f^{(n+k)}$ in the domain C of continuity of $f^{(n)}$, then the smoothing with the algebraic spline S of degree n+k+1, in addition to above mentioned properties can ensure continuity of the sum of derivatives $(f+S)^{(n+i)}$, i=1,...,k,, in the domain C.

Key words: spline, smoothing, convergence.

Введение

Потребность в сглаживании функций может возникать в задачах как технического, прикладного происхождения, так и теоретического.

Весьма характерна проблема сглаживания при преобразовании цифрового звука цифро-

аналоговыми преобразователями (ЦАП) в аналоговый. Поток цифр, поступающий на вход ЦАП, представляет собой omceuku звукового давления, т. е. численные значения звукового давления (в некоторой шкале) через равные интервалы времени Δ . ЦАП, согласно поступающим числам, вначале выставляет на-

пряжение на соответствующих временных интервалах, которое, таким образом, имеет ступенчатый вид. Затем с помощью фильтров ЦАП аппаратно сглаживает ступенчатое напряжение. Стоимость этих фильтров зависит от их качества и составляет существенную долю полной стоимости ЦАП. В свою очередь, качество фильтров зависит от того, какую функцию они должны реализовать. В поиске таких функций первое, на что следует дать ответ, – вопрос о существовании функции, обеспечивающей нужный результат; второе - как такую функцию построить.

К проблеме сглаживания функций есть интерес и со стороны численного анализа. Так, при исследовании сходимости итеративных численных методов часто бывает эффективным разбор «наихудшего варианта». Например, рассмотрение разнообразных мажорант в теоремах о методе Ньютона [1]. Или в исследовании зацикливания в методе Ньютона [2, 8] и сходимости метода Ньютона [3–5]. Заметное неудобство в таких разборах может представлять отсутствие этого «наихудшего варианта» в классе рассматриваемых функций. Например, нет элемента среди скалярных монотонных функций, имеющих в корне производную g_0' с ограниченной константой L второй производной (класс $K(L, g'_0)$), который в методе Ньютона реализует цикл на двух точках с минимальным расстоянием между ними. С другой стороны, для монотонных функций с пониженным требованием к гладкости: всего лишь с липшицевостью первой производной (класс $C^{1,L}(g_0')$), такой минимайзер находится без труда в виде сплайна типа $s_{2,1}$ с разрывом второй производной в центре цикла.

В связи с этим возникает интерес в инструменте, который помогал бы в перенесении результатов о сходимости в одном подобном классе на другой без внедрения в тело доказательств, но просто предельным переходом.

Сглаживание

Произвольную функцию f, имеющую кусочно-непрерывную производную порядка n и непрерывные производные более низких порядков, можно трактовать как некоторый в общем случае не алгебраический сплайн fтипа $\sigma_{n,1}$ (гладкость звеньев n, дефект на стыках звеньев 1). Пусть построение такого сплайна происходило согласно информации, которая содержала, в частности, значения его и его производных $f^{(i)}$, i = 0, ..., n-1 в стыковочном узле \bar{x} и его n-я производная внутри примыкающих к \bar{x} звеньев оказалась ограниченной по модулю величиной L. Тогда сложением с некоторым алгебраическим сплайном S типа $s_{n+1,1}$ его можно «сгладить» в узле \bar{x} , т. е. получить там у суммы F порядок гладкости n, при этом, что существенно для сплайна, значения низших производных на стыке звеньев останутся неизменными: $F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, ..., n-1$ и лишь может ухудшиться сколь угодно мало ограничение на n-ю производную в области задания сплайна S, которую можно расположить в сколь угодно малой односторонней окрестности \bar{x} .

Теорема 1. Любой общего вида сплайн f $muna\ \sigma_{n,1}\ c$ ограниченной между узлами стыковки звеньев производной п-го порядка $|f^{(n)}(x)| < L$ и конечностью пары ее левосторонних производных чисел в узле стыковки \bar{x} сглаживается для всякого $\varepsilon > 0$ до сплайна $muna \sigma_{n+1,1}$ на любой паре $coce \partial Hux \ c \ \bar{x}$ звеньев c помощью сложения на $\bar{\Delta}$ c алгебраическим сплайном S muna $s_{n+1,1}$, г $\partial e \bar{\Delta}$ – область задания сплайна S. При этом:

- 1) Δ является левосторонней окрестностью узла стыковки соседних звеньев \bar{x} и ее можно назначить сколь угодно малой;
- 2) можно сохранить в узле \bar{x} суммарному сплайну F = S + f значения производных более низких порядков:

$$F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, 1, ..., n-1;$$

- 3) можно обеспечить сплайну F ограниченность производной п-го порядка вида $|F^{(n)}(x)| \leqslant L + \varepsilon \quad \forall x \in \bar{\Delta}, \ \epsilon \partial e \ \epsilon \ c$ kold yeodно малое положительное число;
- 4) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| < L$, в сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева $\kappa \bar{x}$, можно сгладить f до F так, что $|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \lambda;$

$$|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \lambda;$$

5) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)|=L$, в $\bar{\Delta}$ - сколь угодно малой левосторонней окрестности \bar{x} – cглаживание f до F без нарушения условия $|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \bar{\Delta}$ невозможно.

Если имеется конечность правых производных чисел в \bar{x} у $f^{(n)}$, то вышеприведенное утверждение будет верным после замены слов «левосторонняя окрестность» на «правосторонняя окрестность» в пунктах 1 и 5 и замены в пункте 4 «-» на «+ » и «слева» на «справа».

Доказательство. Все построения будут проводиться на сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева к \bar{x} . На правостороннем сегменте имеют место зеркальносимметричные построения. Очевидно, достаточно будет исследовать всего лишь случай Положим, не умаляя общности

$$f^{(n)}(+0) - f^{(n)}(-0) =: D > 0.$$

Построим семейство звеньев являющихся функциями, тождественно равными нулю вне интервалов соответственно $\bar{\Delta}_0, \bar{\Delta}_1, ..., \bar{\Delta}_n$, левые границы которых обозначим соответственно через $\delta_0, ..., \delta_n$. Потребуем совпадение правой границы $\bar{\Delta}_i$ с δ_{i-1} при $i = \overline{1, n}$. Положим $\Delta_0 = (-\delta, 0]$, следовательно, длина интервала Δ_0 равна δ и $\delta_0 = -\delta$. В дальнейшем построении длины прочих интервалов будут соответственно $2\Delta_1, ..., 2\Delta_n$. Следовательно,

$$\delta_i = -(\delta + 2\sum_{1}^{i} \Delta_j).$$

Каждый интервал $\bar{\Delta}_i$, i=1,...,n будет иметь разбиение на два интервала, такое, что $ar{\Delta}_i = ar{\Delta}_i^- \cup ar{\Delta}_i^+, \,\,$ правая граница $ar{\Delta}_i^-$ совпадает с левой границей $\bar{\Delta}_i^+$ и длины $\bar{\Delta}_i^-$, $\bar{\Delta}_i^+$ равны друг другу и равны Δ_i . Длины δ , $\dot{\Delta}_1,...,\Delta_n$ будем назначать так, чтобы δ_n не вышла из λ . Уточним выбор этих длин позднее.

Положим на всем λ : $s_0 \equiv ... \equiv s_n \equiv 0$, и лишь в одной точке для удобства обозначений зададим производные фиктивного звена: $s_{n+1}^{(j)}(\delta_n)=0, \ \ j=\overline{0,n}.$

$$s_{n+1}^{(j)}(\delta_n) = 0, \quad j = \overline{0, n}$$

Схема дальнейших построений

Будем переопределять звенья в порядке возрастания индекса как решения задач Коши

$$s_i^{(n+1)}(x) = A_i a_i(x), \quad x \in \bar{\Delta}_i, s_i^{(k)}(\delta_i) = s_{i+1}^{(k)}(\delta_i), \quad k = \overline{0, n}, \quad i = \overline{0, n}.$$
 (1)

Определение. Под сводным сплайном $S_i = s_i \biguplus ... \biguplus s_0$ будем понимать сплайн, определяемый на каждом $\bar{\Delta}_j, \quad j=i,...,0,$ как решение задач Коши (1), начиная с получения звена s_i при $s_i^{(j)}(\delta_i) = 0, j = 0, ..., n.$

После переопределения звена s_i все звенья с индексами 0, ..., i будем помечать в нижнем индексе индексом i в круглых скобках. Функцию a_i , принимающую только два значения: ± 1 , и числовой параметр A_i будем назначать так, чтобы

1) $F_i := S_i + f$, где $S_i := s_{i(i)} \biguplus ... \biguplus s_{0(i)}$, имела бы в 0 непрерывность производных порядков n, ..., n-i, что эквивалентно выполнению $S_i^{(n-k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0,i};$ отметим, что если выбор a_{i-1} обеспечил обнуление в нуле производным порядков n, ..., n-i+1 сплайна

 S_{i-1} , то для обладания этим свойством сплайном S_i при выборе a_i необходимо и достаточно обеспечить $s_{i(i)}^{(n-k)}(\delta_{i-1}) = 0, k = \overline{0, i-1};$

2) производная n-го порядка сплайна S_i по абсолютной величине не более ε на всем $[\delta_i, 0]$.

Начинаем работу по схеме с i = 0. Обозначим левое нижнее производное число производной $f^{(n)}$ в 0 через d_- . Согласно его определению должно выполняться для некоторого

$$f^{(n)}(t) \leqslant f^{(n)}(-0) + d_{-}t + o(t) \qquad \forall t \in [T, 0],$$

где $o(\cdot)$ – бесконечно малая функция своего аргумента. Выберем $\delta_0 \in [T,0)$ таким, чтобы $o(t) < d_-t \ \forall t \in (\tau, 0)$. Тогда

$$f^{(n)}(t) \leqslant f^{(n)}(-0) + 2d_{-}t \qquad \forall t \in (\delta_0, 0).$$
 (2)

Положим $a_0(x) \equiv 1 \ \forall x \in (\delta_0, 0] \subset \lambda$. Параметр A_0 и левую границу δ_0 интервала звена $s_{0,0}$ выберем так, чтобы производная порядка n функции $F_0 \equiv f + s_{0(0)}$ была бы не больше L на $(\delta_0,0]$ и $s_{0(0)}^{(n)}(0)=D.$ Обозначим для удобства $-\delta_0$ через δ . Второе требование к A_0 и δ_0 при указанном выборе a_0 выполняется тогда и только тогда, когда $A_0 = D/\delta$ (см. (1), k = n, i = 0.

Обеспечим выбором δ первое. С помощью (2) имеем

$$(\forall x \in [\delta_0, 0)) \ F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + s_{0(0)}^{(n)}(x) \le$$

$$\leq f^{(n)}(-0) + 2d_{-}x + A_{0}(x - \delta_{0}).$$

Таким образом, свойство

$$(\forall x \in [\delta_0, 0)) \ F^{(n)}(x) \leq L$$

обеспечивается выполнением для всех x из $[\delta_0,0)$ неравенства

$$f^{(n)}(-0) + 2d_{-}x + A_{0}x + D \leqslant L \iff$$
$$\iff (2d_{-} + D/\delta)x \leqslant L - f^{(n)}(+0).$$

Правая часть последнего неравенства не отрицательна по построению. Следовательно, при x=0 оно выполняется. При $x=\delta_0$ оно эквивалентно неравенству

$$2d_{-}\delta \leqslant L + f^{(n)}(-0).$$

Поэтому если длина интервала задания звена $s_{0(0)}$ удовлетворяет условию

$$0 < \delta \leqslant \min\left(-T, \frac{L + f^{(n)}(-0)}{2d_{-}}\right)$$

и $A_0 = D/\delta$, то и $|F_0^{(n)}(x)| \leqslant L \ \forall x \in (\delta_0, 0)$ и непрерывность $F_0^{(n)}$ в 0 имеется. Однако $s_{0(0)}^{(i)}$

имеет разрывы в 0, для всех $i=\overline{0,n-1},$ которые перейдут в F_0 , так как $f^{(i)}$ непрерывны в 0. Пусть

$$D_{1} := F_{0}^{(n-1)}(+0) - F_{0}^{(n-1)}(-0) =$$

$$= -s_{0(0)}^{(n-1)}(-0) = -A_{0}\delta^{2}/2 = -D\delta/2 \neq 0,$$

$$D_{1,i} := -S_{0}^{(n-i)}(-0) = -A_{0}\delta^{i+1}/(i+1)! =$$

$$= -D\delta^{i}/(i+1)!, \qquad i = \overline{2, n}.$$

Для ликвидации разрыва в 0 у $F_0^{(n-1)} \equiv S_0^{(n-1)} + f^{(n-1)}$

переопределим, с сохранением значений в 0 производных более высоких порядков $S_1^{(n)}(0) = S_0^{(n)}(0) = D$, звено s_1 на $\bar{\Delta}_1$ заданием функции a_1 на $\bar{\Delta}_1$ и заданием параметра A_1 . Отметим, что для такого сохранения необходимо и достаточно должно быть

ния неооходимо и достаточно должно
$$s_{1(1)}^{(n)}(\delta_0)=s_{0(1)}^{(n)}(\delta_0)=S_1^{(n)}(\delta_0)=0.$$
 Потом для ликвидации разрыва в 0 у $F_1^{(n-2)}\equiv S_1^{(n-2)}+f^{(n-2)}$

переопределим, с сохранением значений в 0 производных более высоких порядков $S_2^{(n)}(0) = D$ и $S_2^{(n-1)}(0) = -D_1$, звено s_2 на $\bar{\Delta}_2$ заданием функции a_2 на $\bar{\Delta}_2$ и заданием параметра A_2 . Отметим, что для такого сохранения необходимо и достаточно сохранения начальных данных для n-й и (n-1)-й производных звена $s_{0(2)}$, доставляемых звеном $s_{1(2)}$. Что в свою очередь обеспечивается тогда и только тогда, когда $s_{2(2)}^{(n)}(\delta_1) = s_{1(2)}^{(n)}(\delta_1) = 0$ и $s_{2(2)}^{(n-1)}(\delta_1) = s_{1(2)}^{(n-1)}(\delta_1) = 0$.

И т. д. вплоть до переопределения звена s_n . Пусть таким путем уже найдены A_{i-1} и a_{i-1} , $i \in \{1,...,n-1\}$. На очереди – переопределение звена s_i . С целью обеспечить

$$s_{i(i)}^{(n-k)}(\delta_{i-1}) = 0, \ k = 0, ..., i-1,$$
 (3)

зададим a_i через a_{i-1} так:

$$a_{i}(x) := \begin{cases} -a_{i-1}(\alpha_{i}^{-}x + \beta_{i}^{-}), & x \in \bar{\Delta}_{i}^{-}, \\ a_{i-1}(\alpha_{i}^{+}x + \beta_{i}^{+}), & x \in \bar{\Delta}_{i}^{+}. \end{cases}$$
(4)

Здесь, когда x пробегает $\bar{\Delta}_{i}^{+}$, в том же направлении величина $\alpha_{i}^{+}x+\beta_{i}^{+}$ пробегает $\bar{\Delta}_{i-1}$. Когда x пробегает $\bar{\Delta}_{i}^{-}$, в обратном направлении $\alpha_{i}^{+}x-\beta_{i}^{+}$ пробегает $\bar{\Delta}_{i-1}$.

$$\alpha_i^+ = 2\Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

$$\beta_i^+ = \delta_{i-2} - \alpha_i^+ \delta_{i-1} = \delta_{i-2} - 2\delta_{i-1}\Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

$$\alpha_i^- = -2\Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

$$\beta_i^- = \delta_{i-1} - \alpha_i^- (\delta_{i-1} - \Delta_i) = \delta_{i-2} + 2\delta_{i-1} \Delta_{i-1} / \Delta_i.$$

Задание (4) обеспечивает нечетность $a_i,\ i=1,...,n,$ относительно середины $\bar{\Delta}_i.$ Это дает $s_{i,i}^{(n)}(\delta_{i-1})=0.$

Если i>1, то каждое сужение a_i на половинки $\bar{\Delta}_i^-$, $\bar{\Delta}_i^+$ нечетно относительно их середин, ибо таким свойством обладало уже a_{i-1} . Поэтому независимо от параметра A_i оказывается $s_{i(i)}^{(n-1)}(\delta_{i-1}-\Delta_i)=0$, что влечет $s_{i(i)}^{(n-1)}(\delta_{i-1})=0$.

Если i>2, то каждое сужение a_i на половинки половинок $\bar{\Delta}_i^-$, $\bar{\Delta}_i^+$ нечетно относительно их середин, ибо таким свойством обладало уже a_{i-2} . Отсюда $s_{i(i)}^{(n-2)}\left(\delta_{i-1}\right)=0$. И т. д.

В итоге получаем (3). Приступим к определению параметров A_i и оценке длин Δ_i .

Производные звена $s_{i(i)}$ в δ_{i-1} находим решением задачи Коши (1) совместно с (4)

$$s_{i(i)}^{(n-k)}(\delta_{i-1}) =$$

$$= \int_{\delta_i}^{\delta_{i-1}} \int_{\delta_i}^{t_1} \dots \int_{\delta_i}^{t_k} A_i a_i(t_{k+1}) dt_{k+1} \dots dt_1 =$$

$$= A_i \bar{a}_{i,n-k} \Delta_i^{k+1}. \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что величины $\bar{a}_{i,n-k}$, k=0,...,n, могут быть вычислены независимо от всех прочих данных задачи, и также, что $\bar{a}_{i,n-i} \neq 0$.

Согласно (3) $\bar{a}_{i,n-k}=0,\ k=0,...,i-1$. Значения прочих $\bar{a}_{i,n-k},\ k>i,$ не существенны для дальнейшего.

Приступим к определению параметров A_i , Δ_i . Для осуществления утверждения 3 теоремы необходимо и достаточно выполнения $|A_i|\Delta_i \leqslant \varepsilon$. Будем при выборе параметров, за редким исключением, реализовывать равенство

$$|A_i|\Delta_i = \varepsilon \tag{6}$$

и введем для удобства обозначение $\rho = \delta/\varepsilon$.

Определим параметры A_i , Δ_i , i = 1, ..., n, рекуррентно из системы (см. (5))

$$\begin{cases}
A_1 \bar{a}_{1,n-1} \Delta_1^2 + A_0 \bar{a}_{0,n-1} \delta_0^2 = 0 \\
A_2 \bar{a}_{2,n-2} \Delta_2^3 + A_1 \bar{a}_{1,n-2} \Delta_1^3 + A_0 \bar{a}_{0,n-2} \delta_0^3 = 0 \\
\dots \\
A_n \bar{a}_{n,0} \Delta_n^{n+1} + \dots + A_1 \bar{a}_{1,0} \Delta_1^n + A_0 \bar{a}_{0,0} \delta_0^n = 0
\end{cases} (7)$$

Второе слагаемое первого уравнения системы (7) есть $D_1 \neq 0$. Поэтому можно использовать (6) для подстановки в первое слагаемое:

$$\Delta_1 = |A_0 \bar{a}_{0,n-1} / \bar{a}_{1,n-1}| \rho \delta \implies \Delta_1 \sim \delta.$$

Вместо кропотливого исследования возможности обнуления сумм слагаемых, начиная со второго, в i-м уравнении (i>1) отметим, что такое обнуление позволило бы положить $A_i=0$ и придать δ_i произвольное значение, например δ . За редким исключением таких обнулений можно подставлять (6) в первые слагаемые.

Тогда при i=2, уже имея эквивалентность $\Delta_1 \sim \delta$, получаем

$$\Delta_2^2 = \frac{\left| A_1 \Delta_1^3 \bar{a}_{1,n-2} + A_0 \delta^3 \bar{a}_{0,n-2} \right|}{\left| \varepsilon \bar{a}_{2,n-2} \right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\Delta_1^2 \bar{a}_{1,n-2}\right| + \left|A_0 \rho \delta^2 \bar{a}_{0,n-2}\right|}{\left|\bar{a}_{2,n-2}\right|} \Longrightarrow \Delta_2^2 \lesssim \delta^2, \quad (8)$$

где за знаком \lesssim стоит утверждение: «величина слева от знака либо эквивалентна величине справа от знака, либо бесконечно мала относительно нее». Исследование первой дроби в (8) приводит к невозможности второго варианта. Отсюда следует, что Δ_2 эквивалентна δ : $\Delta_2 \sim \delta$.

Пройдя по уравнениям системы (7) до конца, выясним, что $\Delta_i \sim \delta, \quad i=1,...,n,$ и, следовательно, сумма длин всех звеньев, т. е. $|\delta_n|$, эквивалентна δ .

Отметим, что оценка отношения δ_n/δ зависит только от $\rho A_0 = D/\varepsilon$.

В случае D < 0 справедливы аналогичные рассуждения относительно звена s_1 с несущественными отличиями: $A_0 < 0$, $D_1 > 0$ и с особенностью $f^{(n)}(-0) = L$.

В случае $L-|f^{(n)}(-0)|=:\ell>0$ получаем дополнительное утверждение. В силу непрерывности $f^{(n)}$ в некоторой малой левой окрестности $\bar{\Delta}$ нуля будет

$$f^{(n)}(-0) < 0 \implies (\forall x \in \bar{\Delta}) f^{(n)}(x) \geqslant -L + \ell/2.$$

Полагая $\varepsilon = \ell/4$, как и в общем случае, можно сгладить сплайн f до F так, что станет $F^{(n)}(x) \geqslant -L + \varepsilon > -L$. Что и завершает доказательство.

Частные случаи

Когда f является обычным алгебраическим сплайном типа $s_{n,1}$, все ее производные числа конечны, и для ее сглаживания вышеприведенная теорема 1 несколько упрощается.

Теорема 2. Любой алгебраический сплайн f степени n дефекта 1 с ограниченной между узлами стыковки звеньев производной: $|f^{(n)}(x)| < L$ сглаживается для всякого

- $\varepsilon > 0$ до сплайна типа $s_{n+1,1}$ на любой паре соседних звеньев с помощью сложения на $\bar{\Delta}$ со сплайном S степени n+1 дефекта 1, где $\bar{\Delta}$ область задания сплайна S. При этом:
- 1) можно разместить $\bar{\Delta}$ по желанию в сколь угодно малой лево- или правосторонней окрестности узла стыковки соседних звеньев \bar{x} (точке разрыва n-й производной);
- 2) можно сохранить в узле \bar{x} суммарному сплайну F = S + f значения производных более низких порядков:

$$F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, 1, ..., n-1;$$

- 3) можно обеспечить сплайну F ограниченность производной вида $|F^{(n)}(x)| \leq L + \varepsilon$ $\forall x \in \Delta$, где ε сколь угодно малое положительное число:
- 4) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| < L$, в сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева κ \bar{x} , можно сгладить f до F так, что $|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \lambda;$ также можно сгладить u в правосторонней окрестности, если $|f^{(n)}(\bar{x}+0)| < L;$
- 5) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| = L$, в $\bar{\Delta}$ сколь угодно малой левосторонней окрестности \bar{x} сглаживание f до F без нарушения условия $|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \bar{\Delta}$ невозможно; аналогично с правосторонней окрестностью.

Когда дефект исходного сплайна f более 1: $f \in \sigma_{n+k,k+1}$, при сглаживании разрывов его n-й производной согласно теореме 1 с помощью сплайна типа $s_{n+1,1}$ появятся разрывы производных порядков n+1,...,n+k внутри интервалов звеньев исходного сплайна. Если такое явление нежелательно, то его можно избежать, используя для сглаживания сплайны типа $s_{n+k+1,1}$.

В качестве шаблона для построения такого сплайна используем идею построения функций $a_0, ..., a_n$ в (4). Положим (временно)

$$\bar{\Delta}_0 = \dots = \bar{\Delta}_k = \bar{\delta} = [-1, 1],$$

 $a_0(x) = 1 \ \forall x \in \bar{\delta}$

$$a_i(x) := \begin{cases} -a_{i-1}(1-2x), & x \in [-1,0), \\ a_{i-1}(2x-1), & x \in [0,1]. \end{cases}$$
 (9)

Нетрудно заметить, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} s^{(n+k+1)} = a_i(t), \\ s^{(n+k-j)}(-1) = 0, \quad j = 0, ..., n+k, \end{cases}$$

обладает, как уже говорилось в доказательстве теоремы 1, свойствами:

$$s^{(n+k+1-j)}(1) = 0, \ j = \overline{1,i}, \ s^{(n+k-i)}(1) \neq 0.$$

Полагая i=k, видим, что на роль прежнего a_0 можно назначить новое a_k после линейного преобразования переменных $G: \bar{\delta} \to [\delta_0, 0]$. Т. е. $a_0(x):=a_k(G(t))$. Дальнейшие построения совпадают с таковыми в доказательстве теоремы 1. Таким образом, справедлива

Теорема 3. Любой общего вида сплайн f типа $\sigma_{n+k,k+1}$ с ограниченной между узлами стыковки звеньев производной n-го порядка $|f^{(n)}(x)| < L$ и конечностью пары ее левосторонних производных чисел в узле стыковки \bar{x} сглаживается для всякого $\varepsilon > 0$ до сплайна типа $\sigma_{n+k+1,1}$ на паре соседних примыкающих \bar{x} звеньев c помощью сложения на $\bar{\Delta}$ c алгебраическим сплайном S типа $s_{n+k+1,1}$, где $\bar{\Delta}$ – область задания сплайна S. При этом:

- 1) $\bar{\Delta}$ является левосторонней окрестностью узла стыковки соседних звеньев \bar{x} и ее можно назначить сколь угодно малой;
- 2) можно сохранить в узле \bar{x} суммарному сплайну F = S + f значения производных более низких порядков:

$$F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, 1, ..., n-1;$$

- 3) можно обеспечить сплайну F ограниченность производной n-го порядка вида $|F^{(n)}(x)| \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in \bar{\Delta}$, где ε сколь угодно малое положительное число;
- 4) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| < L$, в сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева κ \bar{x} , можно сгладить f до F так, что

$$|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \lambda;$$

5) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| = L$, в $\bar{\Delta}$ – сколь угодно малой левосторонней окрестности \bar{x} – сглаживание f до F без нарушения условия $|F^{(n)}(x)| < L$ $\forall x \in \bar{\Delta}$ невозможно.

Если имеется конечность правых производных чисел в \bar{x} у $f^{(n)}$, то вышеприведенное утверждение будет верным после замены слов «левосторонняя окрестность» на «правосторонняя окрестность» в пунктах 1 и 5 и замены в пункте 4 «—» на «+» и «слева» на «справа».

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Михеев Сергей Евгеньевич

тел.: +79602405627

профессор, д. ф.-м. н. Санкт-Петербургский госуниверситет факультет прикладной математики – процессов управления Университетский пр., 35, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия, 198504 эл. почта: him2@mail.ru

Заключение

Сглаживание сплайнов в скалярном случае позволяет заметно упростить доказательства некоторых теорем о сходимости итеративных методов и даже несколько усилить результат. Так, удалось ослабить требования к функции и начальному приближению для сходимости основного метода Ньютона до уровня таких требований для модифицированного метода Ньютона в одной локальной теореме о сходимости, Мысовских [7]. В свою очередь, метод точных релаксаций [6], использующий теорему Мысовских, существенно повышает свою эффективность с ослаблением упомянутого требования.

Литература

- 1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
- 2. *Muxees C. E.* Нелинейные методы в оптимизации. СПб., 2001. 276 с.
- 3. Muxeee C. E. Глобализация некоторых итеративных методов решения скалярных уравнений // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2008. Вып. 1. С. 43–52.
- 4. Muxeee~C.~E.~ Об одном парадоксе в теоремах о методе Ньютона // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 22–36.
- 5. *Михеев С. Е.*, *Михеев В. С.* Точная релаксация с учетом невязки // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, № 2. С. 74–78.
- 6. *Muxees C. E.* Метод точных релаксаций // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 71–85.
- 7. *Мысовских И. П.* О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применениях // Докл. АН СССР. 1950. Т. LXX, № 4. С. 565–568.
- 8. Mikheev S. E. Cycling in Newton's Method. www.hrpub.org/journals/jour_archive.php?id=24, HRPUB, DOI: 10.13189/ujcmj.2013.010302, Vol. 1, No 3, Oct 2013. P. 73–77.

Mikheev, Sergey

Saint-Petersburg Štate University Faculty of Applied Mathematics & Control Theory 35 Universitetskiy St., 198504 Saint-Petersburg, Russia e-mail: him2@mail.ru tel.: +79602405627 УДК 519.652

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИЭРМИТОВЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗВУКОВЫХ ФАЙЛОВ

С. Е. Михеев, П. Д. Морозов

Санкт-Петербургский государственный университет

Проведены исследования передискретизации с увеличением частоты сэмплирования цифровых звуковых файлов в K раз. Для сохранения частотных характеристик звука переход на большую частоту воспроизведения сопровождается вставкой между каждыми двумя исходными соседними сэмплами K-1 добавочного сэмпла. Последние получались интерполяцией сплайнами двух разных типов — линейными и квазиэрмитовыми кубическими (КЭК-сплайнами). На концах звена КЭК-сплайна взамен обычных, применяемых для построения эрмитовых сплайнов, вычислялись центральные разностные производные по сэмплам исходного файла. Если под уровнем гладкости понимать максимум величины, обратной модулю второй производной в точках ее непрерывности, то доказано, что передискретизация с увеличением частоты дискретизации в K раз с помощью линейной интерполяции снижает в K раз в окрестностях исходных узлов уровень гладкости выходного сигнала, но при передискретизации с помощью КЭК-сплайнов уровень гладкости восстанавливаемого сигнала снизится не более чем в 3 раза для любых K.

Ключевые слова: интерполяция, сплайн, сэмпл, разностная производная, выпуклость, гладкость.

S. E. Mikheev, P. D. Morozov. APPLICATION OF QUASI-HERMITIAN CUBIC SPLINES FOR OVERSAMPLING OF AUDIO FILES

Oversampling with a K-fold increase in the rate of sampling digital audio files was studied. To save the sound frequency characteristics, the transition to a higher frequency should be accompanied by the insertion of K-1 additional samples between each two adjacent original samples. The additional samples were generated by interpolation with two different splines — quasihermitian cubic (QHC-spline) and linear ones. At the end of the QHC-spline link central difference derivatives were calculated from the source file samples instead of the genuine ones used to construct hermitian splines. If the smoothness level is defined as the maximum of inverted second derivative modulo in the points of its continuity, it is proved that the oversampling with the sampling frequency increasing up by K times and with linear interpolation reduces the output signal smoothness level K-fold in the neighborhood of the original node, but the oversampling by QHC-spline would drop the smoothness level of the recovered signal no more than 3 times for all K.

 Key words: interpolation, spline, sample, difference derivative, convexity, smoothness.

Введение

Неизбежные потери при передаче и хранении аналогового звука и, что, наверное, самое существенное, при копировании аудиозаписей открыли путь для все большего распространения цифрового звука, лишенного этих недостатков. Однако в цифровом звуке есть свои недостатки, не характерные для аналогового, а именно утеря информации при дискретизации и появление паразитных шумов при восстановлении аналогового сигнала по дискретным значениям. Переводом аналогового звука в цифровой, или оцифровкой, занимаются аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Какова бы ни была логика работы ныне существующих АЦП, каждое число s_i в выходном потоке $\{s_i\}_{0}^{N}$, именуемое сэмплом, интерпретируется как некое значение аналогового сигнала s, относимое к интервалу времени $[t_i, t_{i+1}]$, далее сэмпльный интервал. Таков, например, формат WAV. (Сигнал s — функция време-Hи t.)

Длина сэмпльных интервалов времени назначается одинаковой в течение одного сеанса звукозаписи. Число сэмпльных интервалов в одной секунде называется частотой дискретизации. Это важнейшая характеристика качества работы АЦП. Чем больше частота тем больше адекватность цифрового сигнала аналоговому. Однако увеличение частоты приводит к повышению: интенсивности потока цифровых данных при ограниченной пропускной возможности аппаратуры, вычислительной нагрузки на цифровые процессоры, объема необходимой для хранения цифрового сигнала памяти. В зависимости от конкретной ситуации выбирается лучшее соотношение между уровнем адекватности и объемом хранения. Для этого в АЦП аппаратно реализуется несколько стандартных частот дискретизации: 11025, 22050, 32000, 44100, 48000, 88200, 96000 Гп.

Восстановлением аналогового звука из цифрового занимаются цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП), работающие на тех же стандартных частотах дискретизации. Работу ЦАП можно описать примерно следующим образом: поток сэмплов $\{s_i\}_0^N$ преобразуется в аналоговый ступенчатый сигнал, который подается на аналоговый фильтр, выполняющий аппаратное сглаживание. Что влияет на уровень паразитных шумов? ЦАПом с идеальной выходной характеристикой считается такой, который выдает ступенчатый сигналнапряжение прямоугольной формы, величина

которого строго равна сэмплу, а длительность — сэмпльному интервалу дискретизации, при этом величина напряжения строго пропорциональна сэмплу. В действительности сигнал имеет не совсем прямоугольную форму, связанную с тем, что существует некоторое время установления, которое «размазывает» строго вертикальное начало ступеньки и добавляет еще некоторые затухающие колебания. При этом, к сожалению, данные отклонения от строгой ступенчатости нелинейно связаны с перепадом напряжения от ступеньки к ступеньке. Кроме того, величине этих перепадов соответствуют амплитуды гармоник, в разложении ступенчатого сигнала, с частотами выше частот дискретизации. Конечно, при частоте дискретизации более 20 кГц эти гармоники лежат вне диапазона восприятия человеческого уха, и на данную разновидность шумов можно не обращать внимание при конструировании аналогового фильтра. Но в низкочастотном диапазоне — диапазоне слышимости человеческого уха — от них могут возникнуть обертоны, которые, частично проникая сквозь аналоговый фильтр, отрицательно сказываются на качестве воспроизведения выходного сигнала.

Простейшим способом уменьшить время установления и облегчить работу аналогового фильтра является передискретизация с кратным увеличением частоты с помощью интерполяции. Она позволяет уменьшить перепады напряжения между ступеньками напряжения на выходе из ЦАПа. А уменьшение таких амплитуд облегчает дальнейшую работу включенного на выходе из ЦАПа аналогового фильтра, сглаживающего ступенчатый сигнал. Благоприятные последствия: снижение стоимости аналогового фильтра и повышение качества окончательного выходного сигнала. Кратная передискретизация в K раз заключается в том, что в поток сэмплов цифрового звука с частотой дискретизации F между каждой парой соседних исходных сэмплов вставляется K-1 новый сэмпл, после чего пополненный поток сэмплов воспроизводится как цифровой звук с частотой дискретизации KF. Вставку можно делать различными способами. Если, например, использовать линейную интерполяцию, то перепады напряжения между ступеньками в ступенчатом сигнале уменьшаются в Kраз, с соответствующим снижением паразитных шумов на выходе из ЦАПа и аналогового фильтра.

Интерполирование разными типами сплайнов для передискретизации (а значит, и для

повышения качества воспроизведения) и составило исследовательский интерес. В частности, сплайнами вида $S_{3,2}$ (порядка 3, дефекта 2), сглаженными в соответствии с алгоритмом в [3] до сплайнов вида $S_{3,1}$ (дефекта 1), а также самыми простыми линейными сплайнами $S_{1,1}$ (порядка 1, дефекта 1).

Описание задачи

Оцифрованный сигнал представим в виде последовательности сэмплов — чисел $\{s_i\}_0^N$, привязанных к сэмпльным интервалам между равномерно расположенными с шагом дискретизации h моментами времени $\{t_i\}_0^{N+1}$ и соответствующих усредненным значениям исходного аналогового сигнала (звукового, электромагнитного) на этих интервалах либо на более узких подынтервалах:

 $[t_i,t_i+arepsilon]\subset [t_i,t_{i+1}],\ i=\overline{0,N},\ arepsilon< h.$ В том же случае, когда $arepsilon\ll h$, говорят, что $s_0,\ldots,s_{\mathrm{N}}$ являются отсечками входного сигнала s в моменты соответственно $t_0,\ldots,t_{\mathrm{N}}$. Требуется найти интерполяционный алгоритм, который приближал бы значения входного сигнала в промежуточных моментах времени (дополнительных узлах), в совокупности с исходными узлами образующих тоже равномерную сетку. Требования к алгоритму:

- 1. В исходных узлах t_0, t_1, \dots возвращает значения входного сигнала.
- 2. Для получения дополнительных сэмплов s_{ij} на дополнительных узлах t_{ij} из сэмпльного интервала $[t_i, t_{i+1}]$ используются только значения входного сигнала в узлах, непосредственно примыкающих к t_i и t_{i+1} . Количество таких узлов желательно минимизировать.
- 3. Аналоговый сигнал после прохождения выходного цифрового сигнала через ЦАП должен иметь наименьшее количество паразитных шумов.

Изменение частот дискретизации

Рассмотрим учетверение частоты. При сохранении частотных характеристик входного сигнала на выходе с каждым входным сэмплом сопоставляются 4 сэмпла выходного сигнала, то есть требуется назначить дополнительно 3 сэмпла. В связи с чем и производилась интерполяция на каждом сэмпльном интервале. Были рассмотрены линейная интерполяция и кубическая квазиэрмитовая. Оба варианта порождают локальные сплайны, то есть не требующие одновременной обработки всего множества узлов.

Линейная интерполяция позволяла обрабатывать неограниченную последовательность входных сэмплов. Результирующая сту-

пенчатая функция $S(t) := s_{ij}, t \in [t_i, t_{i+1}),$ при подаче в ЦАП достаточно хорошо сглаживалась аппаратно на дополнительных узлах и несколько хуже на исходных, то есть на каждом четвертом. Иными словами, если построить линейный сплайн по новой совокупности сэмплов, то он имеет разрывы производной на старых узлах, и им соответствует снижение качества аппаратного сглаживания.

В связи с этим возникает предположение, что если, сравнительно с линейным сплайном, пожертвовать немного гладкостью на дополнительных узлах, но уменьшить разрывы производной на старых узлах, то можно ожидать общего улучшения качества воспроизведения. Такое перераспределение скачков производной с исходных узлов на дополнительные возможно при получении дополнительных сэмплов не линейной интерполяции, а такой, которая обеспечивает непрерывность производной сплайна, получаемого «склейкой» звеньев — интерполяционных многочленов между исходными узлами. Среди различных вариантов таких сплайнов выберем наиболее простой.

Квазиэрмитовы кубические сплайны

Классический эрмитов сплайн состоит из звеньев, являющихся интерполяционными полиномами Эрмита, строящимися по значениям интерполируемой функции и ее производной на двух узлах, ограничивающих участок интерполяции данного звена [1]. «Склейка» таких звеньев дает эрмитов сплайн. Его тип — $S_{3,2}$, то есть он гладкий.

В нашем случае входной сигнал представляет собой отсечки значений звукового давления в моменты $\{t_i\}_0^{N+1}$, но информация о значениях производных давления в какие-либо моменты отсутствует. И имеющиеся теория и алгоритмы позволяют строить кубический сплайн (типа $S_{3,1}$), то есть еще глаже эрмитового. Однако такой сплайн уже не относится к категории локальных, и в вычислении четырех параметров каждого звена используется информация по всем N+2 узлам. При большом N (сотни тысяч) задача становится практически неразрешимой. Путь для выхода из коллизии между вычислительной трудоемкостью и гладкостью сплайна вполне естествен: получить приближенные значения производных в узлах интерполяции по некоторому ограниченному шаблону, а потом построить полином Эрмита. И уже в 1880-м году Т. В. Sprague [8] фактически предложил формулы для звеньев сплайна $S_{5,3}$, которые строились как полиномы Эрмита по значениям на концах сэмпльного интервала звена 1-й и 2-й производных интерполируемой функции, вычисляемых приближенно с помощью полинома Лагранжа по шеститочечному шаблону, и значениям интерполируемой функции. В 1899 году Каруп (Ј. Кагир) [5] предложил формулы для звеньев сплайна $S_{3,2}$ с вычислением производных на концах сэмпльного интервала звена по четырехточечному шаблону. С введением понятия сплайна в 1946 году [7] и соответствующей терминологии сплайны, конструируемые согласно формулам Sprague-Karup, естественно называть квазиэрмитовыми кубическими сплайнами (КЭК-сплайнами). Однако и до конца двадцатого века в некоторых публикациях можно обнаружить название «касательная интерполяция» (osculatory interpolation) для метода Карупа. В частности, Акима в [4, см. (10)] под этим названием привел небольшую модификацию вычислительных формул Карупа, в конечном итоге приводящую к тому же сплайну, что и метод Карупа. Мы здесь построим КЭКсплайны, исходя из других начальных соображений, и получим расчетные формулы, несколько отличные от формул Карупа и Акимы. И хотя итоговый сплайн оказывается таким же, предлагаемая методика его построения позволила провести анализ уровня гладкости (см. опр. 1) выходного сигнала, который появляется после сглаживания в ЦАПе.

Существующая методика передискретизации довольно-таки далека от идеи интерполяции. Так, согласно [6, гл. 10.2], все дополнительные сэмплы s_{ij} на сэмпльном интервале $[t_i,t_{i+1}]$ назначаются равными 0 с дальнейшим сглаживанием цифровым фильтром нижних частот, то есть даже без линейной интерполяции, с применением «разрывных функций». Поскольку предлагаемая методика передискретизации нацелена на улучшение существующей методики, здесь будут исследованы только линейные сплайны $S_{1,1}$, обеспечивающие «непрерывность», и квазиэрмитовы кубические $S_{3,2}$, обеспечивающие «гладкость».

Построение КЭК-сплайна.

С каждым сэмплом, начиная с третьего и до предпоследнего, сопоставим центральную разностную производную:

$$m_i = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2h}, \quad i = 3, 4, \dots$$

Со вторым сэмплом сопоставим левую разностную производную:

$$m_2 = \frac{s_2 - s_1}{h}.$$

Начальное звено сплайна получим линейной интерполяцией по первому и второму сэмплам. Впрочем, можно было бы интерполировать между первым узлом и вторым как угодно — последствия этого произвола, как будет видно в дальнейшем, закончатся к третьему узлу. Остальные звенья от этого не зависят.

Прочие звенья между моментами t_i и t_{i+1} , $i \geqslant 1$, получаются в результате решения задачи кратного интерполирования с помощью полинома третьей степени $H_3(t)$:

$$H_3(t_j) = s_j, \quad H_3'(t_j) = m_j,$$
 (1)

где j=i, i+1. Поскольку m_j не являются значениями производной интерполируемой функции s, такой полином назовем квазиэрмитовым кубическим, а КЭК-сплайны и есть сплайны, составленные из таких полиномов.

Свойства КЭК-сплайнов

Решение задачи (1) с вычислительной точки зрения удобнее описать не через глобальную переменную t, а через локальную τ следующим образом:

$$\tau = \frac{t - \operatorname{entier}(t/h)h}{h} \tag{2}$$

для всех $t \in [\text{entier}(t/h)h, \text{ entier}(t/h)h + h]$. Здесь entier — функция, выдающая наибольшее целое, не превосходящее аргумента. Из (2) видно, что τ пробегает значения от 0 до 1, когда t пробегает значения между двумя соседними узлами. Формула (2), очевидно, не позволяет определить t по τ , однако при построении интерполяционного сплайна этого не потребуется.

Решение задачи (1) в локальных переменных доставляется известной формулой:

$$C_{[i,i+1]}(\tau) = (1-\tau)^2 (1+2\tau)s_i + \tau^2 (3-2\tau)s_{i+1} + \tau^2 (3-2\tau)s_{i+1}$$

+
$$\tau (1-\tau)^2 h m_i - \tau^2 (1-\tau) h m_{i+1}$$
. (3)

Не умаляя общности, можно положить единицу времени равной шагу дискретизации (h=1) и $t_i=i.$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях τ в (3):

$$C_{[i,i+1]}(\tau) = a_i \tau^3 + b_i \tau^2 + c_i \tau + d_i,$$

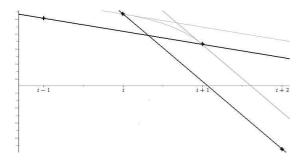
где

$$a_i = \frac{1}{2}(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}),$$

$$b_i = \frac{1}{2}(-s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_i + 2s_{i-1}),$$

$$c_i = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2}, \qquad d_i = s_i.$$

Иллюстрация поведения i-го звена сплайна тесно связана с параллелограммом звена, который образуется касательной к звену в узле i и параллельной ему прямой, содержащей отрезок $X_{i-1}X_{i+1}$, совместно с касательной к звену в узле i+1 и параллельной ему прямой, содержащей отрезок X_iX_{i+2} , где $X_j=(j,s_j)$. Если упомянутые отрезки не параллельны, то параллелограмм звена, очевидно, существует. Поскольку у параллелограмма звена нет вертикальных сторон, он всегда будет иметь две боковые вершины (левую и правую). Оставшиеся две вершины можно именовать как верхнюю и нижнюю.



Puc. 1. Боковая вершина (правая) параллелограмма звена образована касательными

На рисунке 1 черными жирными линиями обозначены содержащие отрезки $X_{i-1}X_{i+1}$ и X_iX_{i+2} прямые, тонкими серыми — касательные к сплайну в узлах i и i+1, которые параллельны соответствующим отрезкам.

СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ СПОСОБОВ ПОЛУ-ЧЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СЭМПЛОВ

Выясним, какие изменения можно ожидать в уровне паразитных шумов при разных типах интерполяции.

В стандартных способах кратной передискретизации обычно применяется цифровой фильтр нижних частот (ФНЧ), предшествующий ЦАПу. Так, в работе [6] при повышении частоты дискретизации в K раз предлагается вставка $\varkappa := K-1$ дополнительных нулевых сэмплов между двумя соседними сэмплами входного сигнала, после чего, до поступления в ЦАП, расширенный поток сэмплов пропускается через ФНЧ.

Можно пойти еще дальше. Если уж есть возможность производить предварительную логическую обработку цифрового сигнала до ЦАПа, то следует изменить входной поток сэмплов так, чтобы аналоговый сигнал на выходе из ЦАПа оказался наиболее удобным для фильтрации нижних частот выходным аналоговым фильтром.

Рассмотрим разные типы интерполяции с точки зрения порождаемых ими шумов. Что происходит на стыках звеньев интерполяции?

Пусть $\{s_i\}_0^{\text{N}}$ — сэмплы входного сигнала, $s_{i1}, \ldots, s_{i\varkappa}$ — дополнительные сэмплы в моменты (в дополнительных узлах), соответственно,

$$t_{ij} = i + \delta j, \quad j = 1, \dots, \varkappa, \tag{4}$$

где δ — шаг новой дискретизации, $\delta = h/K\big|_{h=1} = 1/K$.

Помимо левых разностных производных полезны будут правые разностные производные $s_i^+(h) := \frac{s_{i+1}-s_i}{h}, \quad i < N$

и центральные разностные производные второго порядка $s_i^{+-}(h):=\frac{s_i^+(h)-s_{i-1}^+(h)}{2h},$ где h — шаг исходной дискретизации.

Конечную разность первого порядка определим классическим образом: $\Delta(i) = s_{i+1} - s_i$ (то есть правая конечная разность), а конечную разность второго порядка будем использовать левую:

$$\Delta^{2}(i) = \Delta(i) - \Delta(i-1) = s_{i+1} - 2s_{i} + s_{i-1}.$$
 (5)

Линейная интерполяция

При кратном увеличении частоты дискретизации с помощью линейной интерполяции разностные производные s_i^+ остаются неизменными. Действительно, $s_i^+(h/K) = K\frac{s_{i1}-s_i}{h}$, а числитель последней дроби в K раз меньше величины $s_{i+1}-s_i$, i < N.

Но центральные разностные производные второго порядка увеличиваются в K раз. Для $i \geqslant 1$ было и стало соответственно

$$s_i^{+-}(h) := \frac{s_i^+(h) - s_{i-1}^+(h)}{2h},$$

$$s_i^{+-}(\delta) := \frac{s_i^+(\delta) - s_{i-1,\varkappa}^+(\delta)}{2\delta} =$$

$$= K \frac{s_i^+(h) - s_{i-1}^+(h)}{2h}.$$

Числители двух последних дробей при линейной интерполяции равны. Следовательно, $s_i^{+-}(h/K) = K s_i^{+-}(h)$. Отметим, что в новой дискретизации разностные производные второго порядка в дополнительных узлах обнуляются: $s_{ij}^{+-} = 0, \quad j = 1, \ldots, \varkappa, \quad i = 1, \ldots, N-1$. Такая ситуация со вторыми разностными производными соответствует появлению шумов в сигнале с периодами, близкими к 4δ [2], то есть четырехкратно превосходящими периоды шумов от нового шага

дискретизации. Отсеивание низкочастотных шумов предъявляет дополнительные требования κ $\Phi H Y$.

Все конечные разности первого порядка на одном звене уменьшаются в K раз относительно исходной конечной разности, соответствующей этому звену, поэтому новые конечные разности второго порядка в исходном узле

$$\Delta_{\text{\tiny L}}^2(i) = \Delta^2(i)/K = \Delta^2(i)\delta/h\big|_{h=1} = \Delta^2(i)\delta$$
 (6) тоже уменьшаются в K раз, но в дополнительных узлах они равны нулю.

Не вдаваясь в детали работы ФНЧ по входному ступенчатому сигналу, можно считать, что о ее высоком качестве будет свидетельствовать близость отфильтрованного сигнала к некоторому аналоговому сигналу, который соответствует гладкой кривой, с кусочнонепрерывной второй производной и проходящей через все начала ступенек входного сигнала. Передискретизация может значительно понизить уровень гладкости этого ассоциированного аналогового сигнала.

Определение 1. Под *уровнем гладкости* будем понимать максимум величины, обратной модулю второй производной в точках ее непрерывности.

Ступенчатому сигналу соответствует бесконечное множество ассоциированных аналоговых сигналов различного уровня гладкости. На нем можно выделить подмножество с наибольшим уровнем гладкости. Множество ассоциированных сигналов передискретизированного ступенчатого сигнала, разумеется, является подмножеством ассоциированных сигналов входного ступенчатого сигнала. Поэтому его уровень гладкости может только понизиться. Приведенные выше выкладки устанавливают предел такого снижения.

Лемма 1. Пусть непрерывная вещественная функция g имеет кусочно-непрерывную производную на сегменте $[\alpha, \beta]$, тогда найдется точка γ на этом сегменте, такая, что

$$|g'(\gamma)| \geqslant \left| \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| =: \rho_1.$$

Доказательство. Пусть точки разрыва $\{\alpha_i\}_{1}^{\ell}$ производной функции g удовлетворяют неравенствам $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_\ell < \beta$. Введем обозначения $\alpha_0 := \alpha$ и $\alpha_{\ell+1} := \beta$. Применяя последовательно на каждом интервале непрерывности производной формулу Ньютона-Лейбница и затем теорему о среднем, имеем:

$$|g(\beta) - g(\alpha)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} g'(\eta) d\eta \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{\ell} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g'(\eta) d\eta \right| \leq \sum_{i=0}^{\ell} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |g'(\eta)| d\eta =$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) |g'(\eta_i)|.$$

Если утверждение леммы было бы ложно, то есть $|g'(t)| < \rho_1$ для всех t из $(\alpha, \beta) \setminus \{\alpha_i\}_1^{\ell}$, то из последней цепи неравенств следовало бы абсолютно ложное утверждение

$$|g(\beta) - g(\alpha)| < \sum_{i=0}^{\ell} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \rho_1 = (\beta - \alpha) \rho_1.$$

Для кусочно-гладкого сигнала s в терминах конечных разностей, согласно лемме 1, справедливо утверждение

$$(\exists \gamma_i \in (t_i, t_i + h)) |s'(\gamma_i)| \geqslant \frac{|\Delta(i)|}{h}, i = 0, 1, \dots$$

Теорема 1. Пусть вещественная гладкая функция s имеет кусочно-непрерывную вторую производную на сегменте $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, тогда существует $\gamma_i \in (t_i, t_i + h)$ такое, что

$$\left|s''(\gamma_i)\right| \geqslant \frac{\left|\Delta^2(i)\right|}{h^2} =: \rho_2, \quad i = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Доопределяя производную s' в точках t_{i-1} и t_{i+1} произвольными конечными значениями, распишем конечную разность второго порядка в момент t_i :

$$|\Delta^{2}(i)| = |s_{i+1} - 2s_{i} + s_{i-1}| =$$

$$= \left| -\int_{t_{i-1}}^{t_{i}} s'(t) dt + \int_{t_{i}}^{t_{i+1}} s'(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} \left[s'(t+h) - s'(t) \right] dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} |s'(t+h) - s'(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} h |s''(\gamma(t))| dt,$$

где $\gamma(t)$ есть некоторый момент из интервала (t,t+h) (см. лемму 1).

Пусть теорема 1 неверна, то есть $|s''(t)| < \rho_2$ для всех t из (t_{i-1}, t_{i+1}) за исключением точек разрыва второй производной. Тогда из последней цепи неравенств следует абсолютно ложное утверждение

$$\left|\Delta^2(i)\right| < \int_{t_{i-1}}^{t_i} h\rho_2 dt = h^2 \rho_2 \equiv \left|\Delta^2(i)\right|.$$

Теорема 2. Передискретизация с увеличением частоты дискретизации в K раз с помощью линейной интерполяции снижает в K раз в окрестностях исходных узлов уровень гладкости высшего по уровню гладкости ассоциированного сигнала.

Доказательство. Действительно, в силу (6) конечная разность второго порядка после дискретизации $\Delta_{\rm L}^2(i)$ меньше в K раз, чем $\Delta^2(i)$. Но, согласно теореме 1, восстановленный сигнал будет иметь в некоторой точке интервала $[t_{i-1,\varkappa},t_{i1}]$ вторую производную, по модулю не меньшую, чем

$$\left|\Delta_{\scriptscriptstyle L}^2(i)\right|/\delta^2 = \left|\Delta_{\scriptscriptstyle L}^2(i)\right|K^2 = \left|\Delta^2(i)\right|K.$$

Оптимизация дополнительных сэмплов

От упомянутых низкочастотных шумов, появляющихся при линейной интерполяции, можно попытаться избавиться более равномерным распределением разностных производных второго порядка по дополнительным узлам. Для этих целей здесь будут рассмотрены КЭК-сплайны дефекта 1.

Поскольку они имеют непрерывную производную в исходном узле, при получении конечных разностей второго порядка в окрестности исходного узла линейные части прилегающих звеньев взаимно уничтожаются, и достаточно найти отклонения этих двух звеньев от касательной в ближайшем справа дополнительном узле. Отклонение прилегающего правого звена $D_i(\delta)$ в узле $t_{i1}=i+\delta$ можно получить решением задачи Коши следующего вида:

$$\begin{cases}
D_i''' = C_i''' = 3s_{i+2} - 9s_{i+1} + 9s_i - 3s_{i-1}, \\
D_i''(+0) = C_i''(+0) = \\
= -s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_i + 2s_{i-1}, \\
D_i'(0) = D_i(0) = 0.
\end{cases}$$

Оно элементарно:

$$D_{i}(\delta) = \int_{0}^{\delta} C'_{[i,i+1]}(t) dt =$$

$$= \int_{0}^{\delta} \int_{0}^{t} C''_{[i,i+1]}(\tau) d\tau dt =$$

$$= \int_{0}^{\delta} \int_{0}^{t} \left(\int_{0}^{\tau} C'''_{[i,i+1]} d\eta + C''_{[i,i+1]}(0) \right) d\tau dt =$$

$$= \int_{0}^{\delta} \int_{0}^{t} \left(C'''_{[i,i+1]}\tau + C''_{[i,i+1]}(0) \right) d\tau dt =$$

$$= \int_{0}^{\delta} \left(C''''_{[i,i+1]}\frac{t^{2}}{2} + C''_{[i,i+1]}(0)t \right) dt =$$

$$= C_{[i,i+1]}^{"''} \frac{\delta^3}{6} + C_{[i,i+1]}^{"}(0) \frac{\delta^2}{2} =$$

$$= (s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}) \frac{\delta^3}{2} +$$

$$+ (-s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_i + 2s_{i-1}) \frac{\delta^2}{2}.$$

Последнее выражение будет удобно представить с помощью конечных разностей:

$$D_i(\delta) = \left(\Delta^2(i+1) - \Delta^2(i)\right) \frac{\delta^3}{2} + \left(-\Delta^2(i+1) + 2\Delta^2(i)\right) \frac{\delta^2}{2}.$$

Для получения аналогичным образом отклонения влево $D_i(-\delta)$ вычислим значение второй производной левого прилегающего звена в i-м узле:

$$D_i''(-0) = D_{i-1}''(+0) + \int_0^1 D_{i-1}''' \, \mathrm{d}t =$$

$$= -2s_{i+1} + 5s_i - 4s_{i-1} + s_{i-2} + (3s_{i+1} - 9s_i + 1)s_{i-1} + 2s_{i-1} + 3s_{i-2} + 1 + 2s_{i-1} + 3s_{i-1} + 2s_{i-1} + 2s_{i-1$$

Отсюда, решая аналогичную задачу Коши с другими производными второго и третьего порядков на обратном времени, получаем

$$D_i(-\delta) = (-s_{i+1} + 3s_i - 3s_{i-1} + s_{i-2})\frac{\delta^3}{2} + (2s_{i+1} - 5s_i + 4s_{i-1} - s_{i-2})\frac{\delta^2}{2}.$$

Следовательно, конечная разность второго порядка в i-м узле такова:

$$\Delta_{\mathrm{H}}^{2}(i) = D_{i}(\delta) + D_{i}(-\delta) =$$

$$= (s_{i+2} - 4s_{i+1} + 6s_{i} - 4s_{i-1} + s_{i-2})\frac{\delta^{3}}{2} +$$

$$+ (-s_{i+2} + 6s_{i+1} - 10s_{i} + 6s_{i-1} - s_{i-2})\frac{\delta^{2}}{2} =$$

$$= (\Delta^{2}(i+1) - 2\Delta^{2}(i) + \Delta^{2}(i-1))\frac{\delta^{3}}{2} +$$

$$+ (-\Delta^{2}(i+1) + 4\Delta^{2}(i) - \Delta^{2}(i-1))\frac{\delta^{2}}{2}.$$
 (7)

Допустим теперь, что пополненному потоку сэмплов соответствует имеющая непрерывную вторую производную функция f, тогда, как известно, на интервале $[i-1+\varkappa\delta,t_{i1}]\equiv [i-\delta,i+\delta]$ должен найтись момент τ , такой, что

$$f_i''(\tau) = \frac{\Delta_{\scriptscriptstyle \rm H}^2(i)}{\delta^2} =$$

$$= \left(\Delta^{2}(i+1) - 2\Delta^{2}(i) + \Delta^{2}(i-1)\right) \frac{\delta}{2} + \left(-\Delta^{2}(i+1) + 4\Delta^{2}(i) - \Delta^{2}(i-1)\right) \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\Delta^{3}(i-1)\delta - \Delta^{2}(i+1) + 4\Delta^{2}(i) - \Delta^{2}(i-1)}{2}.$$

Аналогичным образом поступаем в дополнительных узлах. Так же, как и на стыке звеньев, получим уклонения от касательной за время δ при прямом и обратном направлении. Поскольку теперь имеется только один полином третьей степени, то вклады в уклонения его члена третьей степени взаимно уничтожаются, а уклонения от члена второй степени равны друг другу и в сумме равны

$$\Delta_{\mathrm{H}}^{2}(i_{j}) = 2 \int_{0}^{\delta} \int_{0}^{t} (6a_{i}j\delta + 2b_{i}) \,d\tau \,dt =$$

$$= (6a_{i}j\delta + 2b_{i})\delta^{2} = 3(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_{i} - s_{i-1})j\delta^{3} +$$

$$+ (-s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_{i} + 2s_{i-1})\delta^{2} =$$

$$= 3 \left(\Delta^{2}(i+1) - \Delta^{2}(i)\right)j\delta^{3} +$$

$$+ \left(-\Delta^{2}(i+1) + 2\Delta^{2}(i)\right)\delta^{2}. \tag{8}$$

Оценки (7) и (8) помогают установить следующий результат:

Теорема 3. При передискретизации с увеличением частоты дискретизации в K раз с помощью интерполяции $K \ni K$ -сплайнами уровень гладкости восстанавливаемого сигнала снизится всюду не более чем в 3 раза независимо от K.

Доказательство. Конечные разности второго порядка (5) в исходных узлах с точностью до величин второго порядка малости 1 относительно нового шага дискретизации δ согласно (7) имеют вид

 $\Delta_{\mathrm{H}}^2(i) \approx \left(-\Delta^2(i+1) + 4\Delta^2(i) - \Delta^2(i-1)\right) \frac{\delta^2}{2},$

отсюда
$$\begin{split} \left| \Delta_{\mathrm{H}}^2(i) \right| \lesssim \\ \lesssim \left(\left| \Delta^2(i+1) \right| + 4 \left| \Delta^2(i) \right| + \left| \Delta^2(i-1) \right| \right) \frac{\delta^2}{2} \leqslant \\ \leqslant 3 \max_{j \in \{-1,0,1\}} \left| \Delta^2(i+j) \right| \delta^2 = \\ = \frac{3}{K^2} \max_{j \in \{-1,0,1\}} \left| \Delta^2(i+j) \right|. \end{split}$$

Согласно теореме 1, это означает, что уровень гладкости восстанавливаемого сигнала снизится не более чем в 3 раза на сегменте $[t_i - \delta, t_i + \delta]$. Проделаем аналогичную оценку уровня гладкости в окрестностях дополнительных узлов (4). Согласно (8),

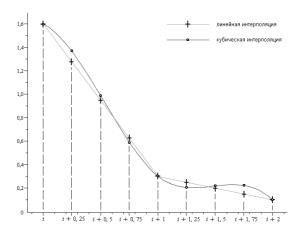
$$\begin{split} \left| \Delta_{\mathbf{H}}^2(i_j) \right| &\approx \left| -\Delta^2(i+1) + 2\Delta^2(i) \right| \delta^2 \leqslant \\ &\leqslant 3 \max_{k \in \{0,1\}} \left| \Delta^2(i+k) \right| \delta^2, \qquad j = \overline{1, \varkappa}, \end{split}$$

то есть в окрестностях дополнительных узлов конечная разность второго порядка увеличивается не более чем в 3 раза, что влечет снижение уровня гладкости там тоже не более чем в 3 раза.

Теоремы 2 и 3 наглядно показывают, что интерполяция КЭК-сплайнами существенно выгоднее линейной интерполяции, поскольку предъявляет меньшие требования к ФНЧ.

Пример 1. Построим два последовательных звена КЭК-сплайнов. Пусть $h=1,\ s_{i-1}=1,8;$ $s_i=1,6;\ s_{i+1}=0,3;\ s_{i+2}=0,1$ и $s_{i+3}=-1,5.$ Тогда на участке [i,i+1] разностные производные равны $m_i=m_{i+1}=-0,75,\$ а сплайн получится $C_{[i,i+1]}(\tau)=1,1\tau^3-1,65\tau^2-0,75\tau+1,6.$ На участке [i+1,i+2] имеем $m_{i+2}=-0,9$ и $C_{[i+1,i+2]}(\tau)=-1,25\tau^3+1,8\tau^2-0,75\tau+0,3.$

С помощью этих двух сплайнов производится передискретизация с повышением частоты в K=4 раза. На рисунке 2 представлены два последовательных звена сплайнов, полученных линейной и квазиэрмитовой кубической интерполяцией на отрезке [i,i+2].



 $Puc.\ 2.\ Линейная$ и квазиэрмитова кубическая интерполяции.

 $[\]overline{^1}$ Конкретно с погрешностью третьего порядка малости: $3\left(\Delta^2(i+1)-\Delta^2(i)\right)j\delta^3$

Вертикальные пунктирные линии соответствуют отсечкам сигнала после передискретизации.

На рис. 2 хорошо видно, что доставляемые КЭК-сплайном $S_{3,2}$ значения выходного сигнала, в сравнении с линейным сплайном $S_{1,1}$, в исходных узлах дадут меньшие конечные разности второго порядка. В силу теоремы 1 это означает более высокий уровень гладкости при использовании $S_{3,2}$ сравнительно с $S_{1,1}$, который благоприятнее для Φ НЧ.

Исследование выпуклости и вогнутости КЭК-сплайнов

Возможно ли изменение выпуклости на вогнутость и наоборот в *i*-м звене? Ясно, что такому изменению соответствует точка перегиба

$$\tau_p = -\frac{b_i}{3a_i} = \frac{1}{3} \frac{s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1}}{s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}}.$$

Отсюда получаем необходимые условия смены выпуклости и вогнутости в i-м звене:

$$0 < s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1} <$$

$$< 3(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1})$$

либо

$$0 < -s_{i+2} + 4s_{i+1} - 5s_i + 2s_{i-1} <$$

$$< -3(s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}).$$

Что эквивалентно

$$\begin{cases}
0 < s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1} \\
0 < 2s_{i+2} - 5s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}
\end{cases}$$
(9)

либо

$$\begin{cases}
0 > s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1} \\
0 > 2s_{i+2} - 5s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}
\end{cases}$$
(10)

Объединяя системы (9) и (10), получаем

$$(s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1})$$
.

$$(2s_{i+2} - 5s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}) > 0. (11)$$

1. Вырожденный случай $m_i = m_{i+1}$ \iff $s_{i+2} - s_i = s_{i+1} - s_{i-1}$. Тогда

$$\tau_p = \frac{1}{3} \frac{s_{i+2} - 4s_{i+1} + 5s_i - 2s_{i-1}}{s_{i+2} - 3s_{i+1} + 3s_i - s_{i-1}} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{s_{i+2} - s_i - 4s_{i+1} + 6s_i - 2s_{i-1}}{s_{i+2} - s_i - 3s_{i+1} + 4s_i - s_{i-1}} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{-3s_{i+1} + 6s_i - 3s_{i-1}}{-2s_{i+1} + 4s_i - 2s_{i-1}} = \frac{1}{2}.$$

2. Невырожденный случай и выполняется условие (11).

Это означает, что $\tau_p \in (0,1) \setminus \{1/2\}$ и параллелограмм звена существует. Звено сплайна одной частью проходит внутри него, другой — снаружи.

3. Условие (11) не выполняется.

Это влечет невырожденность. Следовательно, параллелограмм звена существует. Поскольку также верно $\tau_p \overline{\in} (0,1)$, то звено сплайна либо строго выпукло, либо строго вогнуто для $\tau \in [0,1]$. Что возможно только когда сплайн полностью находится внутри параллелограмма звена.

Заключение

Теорема 2 показывает, что получение дополнительных сэмплов в дополнительных узлах посредством линейной интерполяции приводит к увеличению вторых производных в окрестностях исходных узлов, в то время как интерполяция с помощью КЭК-сплайнов не порождает таких возмущений. Программная реализация интерполяционных алгоритмов на основе линейных и КЭК-сплайнов показала, что отсутствие таких возмущений благоприятно для качественного воспроизведения звука.

«Родные» частоты АЦП–ЦАП ZET 230 давали следующие возможности умножения частот: двух- и четырехкратное от 22050 Гц к 44100 Γ ц и к 88200 Γ ц, и трехкратное с 32000 Гц к 96000 Гц. Во всех трех случаях дополнительные сэмплы (1, 3, 2 соответственно) вставлялись в выходной файл с помощью интерполяции двух видов: линейной и квазиэрмитовой кубической. По сравнению с линейной интерполяцией при интерполяции КЭКсплайнами получался более чистый звук, то есть в нем было снижено дребезжание и прочие шумы, что позволяло распознавать на слух выходной сигнал с субъективно меньшим напряжением и концентрацией внимания. Что и ожидалось, поскольку КЭК-сплайны в сравнении с линейными подготавливают выходной сигнал, лучше подходящий для дальнейшего аппаратного сглаживания в ЦАП.

Вполне возможно, что идея передискретизации с применением КЭК-сплайнов будет продуктивна и для повышения качества воспроизведения видеофайлов. Следует отметить, однако, что трудности ее реализации на порядки выше, чем в случае аудиофайла, поскольку интерполяция тогда должна быть векторной величины двумерного аргумента.

Литература

- 1. Завъялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 c.
- 2. Камачкин А. М., Михеев С. Е., Евстафъева В. В. Модели колебаний в нелинейных системах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 194 с.
- 3. Михеев С. Е. Об одном парадоксе в теоремах о методе Ньютона // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2013. № 1. C. 22–36.
- 4. Akima H. A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures // Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 17, 1970. P. 589–602.

- 5. Karup J. On a new mechanical method graduation. Transactions of the Second International Actuarial Congress, London, 1899.
- 6. Lyons R. Understanding Digital Signal Processing, 2nd Edition. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA, 2004. 688 p.
- 7. Schoenberg I. J. Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions // Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. 4, nos. 1, 2. P. 45–99, 112–141.
- 8. Sprague T. B. Explanation of a new formula for interpolation // Journal of the Institute of Actuaries. 1880. Vol. 22. P. 270-285.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Михеев Сергей Евгеньевич

профессор, д. ф.-м. н.

Санкт-Петербургский государственный университет факультет прикладной математики - процессов управления,

Университетский пр., 35, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия, 198504

эл. почта: him2@mail.ru тел.: 89602405627

Морозов Петр Дмитриевич

аспирант каф. информационных систем Санкт-Петербургский государственный университет факультет прикладной математики - процессов управ-

Университетский пр., 35, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия, 198504 эл. почта: pm-morozovpd@yandex.ru

тел.: 89046328358

Mikheev, Sergey Saint-Petersburg State University Faculty of Applied Mathematics & Control Theory 35 Universitetskiy St., 198504 Saint-Petersburg, Russia e-mail: him2@mail.ru tel.: 89602405627

Morozov, Petr

Saint-Petersburg State University Faculty of Applied Mathematics & Control Theory 35 Universitetskiy St., 198504 Saint-Petersburg, Russia e-mail: pm-morozovpd@yandex.ru tel.: 89046328358

УДК 519.83

МОДЕЛЬ ПРОВЕДЕНИЯ КОНКУРСА С ОЦЕНКОЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТОВ

Ю. С. Токарева

Забайкальский государственный университет

Рассматривается теоретико-игровая модель проведения конкурса с оценкой отдельных параметров проектов. Для выбора победителя приглашается арбитражный комитет, руководствующийся правилами арбитражной процедуры по последнему предложению. В некооперативной игре n лиц с ненулевой суммой представлен общий вид ожидаемого выигрыша и значение игры. Найдены оптимальные стратегии игроков в одношаговой и многошаговой играх с двумя игроками с правилом консенсуса.

Ключевые слова: модель конкурса, арбитр, оптимальные стратегии, выигрыш, дисконтирование.

Yu. S. Tokareva. TENDER MODEL WITH ESTIMATION OF DIFFERENT PARAMETERS OF THE PROJECT

We consider the game-theoretic model of a competition estimations of individual project parameters. To select the winner the Arbitration Committee, guided by the rules of the Final-Offer arbitration, is invited. A perspective view of the expected payoff and the value of the game is presented in a noncooperative non-zero sum game with n players. The optimal strategies for the players in the one-step and multi-step two-player games with the consensus rule are identified.

Key words: tender model, the arbitrator, the optimal strategy, win, discounting.

Введение

Рассматривается теоретико-игровая модель проведения конкурса. Участники конкурса – игроки – представляют свои проекты, характеризующиеся несколькими различными параметрами. Например, проект может включать описание его стоимости, времени выполнения, числа работников и т. д. Для определения проекта-победителя будет использована арбитражная схема. В этом случае к процедуре проведения конкурса приглашается еще один или несколько независимых игроков (арбитр/жюри или арбитражный комитет), которые по определенным правилам позволяют выявить победителя.

В данном исследовании независимая сторона представлена арбитражным комитетом, руководствующимся правилами арбитражной процедуры по последнему предложению (Final-offer arbitration). Согласно данной процедуре выигрывает проект, который оказался ближе к мнению арбитра. В случае нескольких арбитров полагаем, что проект победил, если за него проголосовало определенное число членов из арбитражного комитета. Например, можно использовать правила простого большинства (более 50 % членов арбитражного комитета), квалифицированного большинства (2/3 от всех членов комитета) или единогласия (все арбитры проголосовали

за проект). Если ни один из проектов не был выбран победителем, то игра или заканчивается, или переходит на следующий шаг.

В статьях [3–6] были найдены равновесия в игре, связанной с переговорами о заработной плате, с участием одного арбитра, а в работе [7] – с участием арбитражного комитета. В статье [1] рассмотрена двух- и трехмерная модель конкурса, в которой каждый из арбитров оценивает полностью весь проект. В [2] предложена методика построения двухуровневой теоретико-игровой модели конкурса с использованием комплексного критерия, включающего рейтинг заявки и вероятность выполнения контракта. В данной работе исследуется модель конкурса с несколькими арбитрами, каждый из которых оценивает только один параметр проекта.

Теоретико-игровая модель КОНКУРСА

Рассматривается некоопертивная игра nлиц с ненулевой суммой, интерпретируемая как модель проведения конкурса. Игроки $i \in$ N = 1, 2, ..., n – участники конкурса – представляют на конкурс свои проекты, которые характеризуются набором m параметров

$$x^i = (x_1^i, ..., x_m^i).$$

Для определения проекта-победителя приглашается арбитражный комитет, состоящий из m членов. Каждый j-й арбитр оценивает только j-й параметр проекта каждого из игроков и выбирает один из проектов, используя стохастическую процедуру с распределением вероятностей, которое известно участникам конкурса. Для оценки параметра проекта арбитр ј использует арбитражную процедуру по последнему предложению. В этом случае им выбирается проект с параметром j, оказавшийся ближайшим к его мнению.

Таким образом, каждому арбитру j представлен набор j-х параметров из всех проектов

$$\{x_j^1, ..., x_j^n\}.$$

Генерируется случайная величина a_i с некоторым распределением вероятностей $F_j(x)$, которое известно участникам конкурса. Данную величину a_j назовем мнением или решением арбитра. Тогда для каждого j-го параметра проекта k можно поставить в соответствие величину σ_i^k , характеризующую голос члена арбитражного комитета за него:

$$\sigma_j^k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{если } x_j^k = \min_i |x_j^i - a_j|, \\ 0 & \text{иначе.} \end{array} \right.$$

Будем считать, что k-й проект победил, если он получил число голосов не меньше, чем некоторый порог p

$$\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^k \geqslant p.$$

Например, в случае единогласия мы имеем p = m. Если используется правило простого большинства, то $p = \frac{m}{2}$, а если правило квалифицированного большинства – $p = \frac{2m}{3}$. В зависимости от ситуации можно рассматривать различные значения p, которые будут определять возможное количество проектовпобедителей. При этом проект – победитель конкурса k получает выигрыш $h_k(x^k)$, зависящий от параметров его проекта. Если ни один из проектов не был выбран арбитражным комитетом, то игра переходит на следующий шаг или заканчивается. Переход игры на следующий этап осуществляется с некоторым коэффициентом дисконтирования δ (например, сокращение времени на выполнение проекта или инфляция), где

$$0 \le \delta \le 1$$
.

Обозначим ожидаемый выигрыш k-го игрока на шаге l через V_k^l (k=1,2,...,n,l=1,2,...).Тогда V_k^l является значением игры для k-го игрока в игре с функцией выигрыша

$$H_k^l(x^1, ..., x^n) = \begin{cases} h_k(x^k) P\{\sum_{j=1}^m \sigma_j^k \ge p\} + \end{cases}$$

$$+ \delta V_k^{l-1} (1 - \sum_{k=1}^n P\{\sum_{j=1}^m \sigma_j^k \ge p\})$$
.

Таким образом,

$$V_k^l = valH_k^l(x^1, ..., x^n),$$

где $V_k^0=0.$ В данной игре будем искать равновесие по Нэшу, т. е. такой профиль x_l^* , для которого

$$H_k^l(x_l^*||y^k) \leqslant H_k^l(x_l^*), \forall y^k, k = 1, ..., n, l = 1, 2, ...$$

Данная модель исследуется в зависимости от количества игроков, количества параметров проектов и функций распределения мнений арбитров.

Одношаговая модель конкурса ДВУМЯ ИГРОКАМИ

Рассмотрим теоретико-игровую модель с двумя игроками, проекты которых характеризуются двумя параметрами (x_i, y_i) (i = 1, 2). Например, проекты задаются временем выполнения какой-то работы и суммой средств, необходимой для выполнения этой работы в определенный период. Положим, что игрок Iмаксимизирует величину $(2x_1 - y_1)$, а игрок II- величину $(2y_2-x_2)$. Для определения победителя в конкурсе приглашаются два арбитра. Первый арбитр рассматривает параметры x_1 и x_2 из проектов игроков и выбирает тот, который оказался ближе к его мнению. Арбитр голосует за игрока с данным параметром. Второй арбитр аналогичным образом рассматривает параметры игроков y_1 и y_2 и голосует за проект одного из игроков. Игрок, за которого проголосовали оба арбитра одновременно, побеждает, т. е. p = 2. В противном случае участники конкурса проигрывают и ничего не получают, а игра заканчивается.

В силу постановки такой модели мы полагаем, что параметры игроков соотносятся следующим образом:

$$x_1 \geqslant x_2; \ y_2 \geqslant y_1.$$

В данном случае ожидаемые выигрыши игроков вычисляются по формулам

$$H_1(x_1,y_1,x_2,y_2)=(2x_1-y_1)(1-F_1(\overline{x}))F_2(\overline{y}),$$
 $H_2(x_1,y_1,x_2,y_2)=(2y_2-x_2)F_1(\overline{x})(1-F_2(\overline{y})),$ где $\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$ и $\overline{y}=\frac{x_1+x_2}{2}$. Дифференцируем, приравниваем к нулю

$$\begin{split} &\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 2(1-F_1(\overline{x}))F_2(\overline{y}) - \frac{1}{2}(2x_1-y_1)f_1(\overline{x})F_2(\overline{y}),\\ &\frac{\partial H_1}{\partial y_1} = (1-F_1(\overline{x}))\left[\frac{1}{2}(2x_1-y_1)f_2(\overline{y}) - F_2(\overline{y})\right],\\ &\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = (1-F_2(\overline{y})\left[\frac{1}{2}(2y_2-x_2)f_1(\overline{x}) - F_1(\overline{x})\right],\\ &\frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 2F_1(\overline{x})(1-F_2(\overline{y})) - \frac{1}{2}(2y_2-x_2)f_2(\overline{y})F_1(\overline{x}). \end{split}$$

При заданных функциях распределения мнений арбитра получаем оптимальные стратегии игроков.

Положим, что мнения обоих арбитров распределены по одинаковому закону, тогда решение системы уравнений даст

$$F_1(\overline{x}) = F_2(\overline{y}) = \frac{2}{3}.$$

В силу симметрии рассматриваемой модели

$$x_1 = y_2, \ x_2 = y_1.$$

Пример 1. Пусть арбитры используют равномерное распределение $F_1 \sim [0,1]$ $F_2 \sim [0,1]$. Тогда

$$y_1 = \frac{4}{3} - x_1$$

и оптимальные стратегии игроков есть

$$\begin{cases} x_1^* = y_2^* = \frac{8}{9}, \\ x_2^* = y_1^* = \frac{4}{9}. \end{cases}$$

Таким образом, игрокам рекомендуется предлагать проекты с параметрами $(\frac{8}{9}; \frac{4}{9})$ и $(\frac{4}{9}; \frac{8}{9})$ соответственно. При этом ожидаемый выигрыш участников конкурса равен

$$H_1 = H_2 \approx 0,2963.$$

Пример 2. Пусть мнения арбитров подчинены нормальному закону

$$F_1 \sim N[0,1], F_2 \sim N[0,1].$$

В этом случае

$$y_1 \approx 0.87 - x_1$$

и игрокам рекомендуется называть проекты (1.03; 0.87 и (0.87; 1.03) соответственно. Такимобразом, в случае нормального распределения мнений арбитра игроки могут увеличить конкурсные параметры проекта. Однако ожидаемый выигрыш игроков в данной игре уменьшился

$$H_1 = H_2 = 0, 26.$$

Многошаговая модель конкурса с ДВУМЯ ИГРОКАМИ

В случае многошаговой модели мы полагаем, что если мнения арбитров разделились между игроками, то игра переходит на второй шаг (второй тур конкурса), затем на третий и т. д. Переход игры на следующий этап осуществляется с некоторым коэффициентом дисконтирования δ , где $0 \le \delta \le 1$. Пусть до конца игры осталось l шагов, тогда для вычисления ожидаемых выигрышей игроков используем формулы

$$\begin{split} &H_1^l(x_1,y_1,x_2,y_2) = (2x_1-y_1)(1-F_1(\overline{x}))F_2(\overline{y}) + \\ &+ \delta V_1^{l-1} \left\{ (1-F_1(\overline{x}))(1-F_2(\overline{y})) + F_1(\overline{x})F_2(\overline{y}) \right\}, \\ &H_2^l(x_1,y_1,x_2,y_2) = (2y_2-x_2)F_1(\overline{x})(1-F_2(\overline{y})) + \\ &+ \delta V_2^{l-1} \left\{ (1-F_1(\overline{x}))(1-F_2(\overline{y})) + F_1(\overline{x})F_2(\overline{y}) \right\}, \\ \text{где } \overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2} \text{ и } \overline{y} = \frac{x_1+x_2}{2}. \\ &\text{Вычисляем частные производные и прирав-} \end{split}$$

$$\frac{\partial H_1^l}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial H_1^l}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{\partial H_2^l}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial H_2^l}{\partial y_2} = 0.$$

Преобразовывая и упрощая, также получаем $F_1(\overline{x}) = F_2(\overline{y}) = \frac{2}{3}.$

Пример 3. Пусть решение арбитров моделируется равномерным распределением (см. пример 1) и для определения победителя конкурса дается два шага. В этом случае оптимальные стратегии на первом шаге определяются по формулам

$$\begin{cases} x_1^* = y_2^* = \frac{8}{9} + \frac{2}{3}\delta V^1, \\ x_2^* = y_1^* = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\delta V^1. \end{cases}$$

В таблице 1 представлены оптимальные стратегии первого игрока (x_1^*, y_1^*) и выигрыши игроков H на первом шаге игры для раз-

личных значений коэффициента дисконтирования δ .

Tаблица~1. Оптимальные стратегии и выигрыш игрока на первом шаге для различных δ в случае равномерного распределения мнений арбитра

| δ | $(x_1^*; y_1^*)$ | H^1 |
|-----|--------------------|---------|
| 1 | (1,08642; 0,24691) | 0;59259 |
| 0,9 | (1,06667; 0,26667) | 0;56296 |
| 0,8 | (1,04691; 0,28642) | 0;53333 |
| 0,5 | (0.98765; 0.34568) | 0;44444 |
| 0,3 | (0.94815; 0.38519) | 0;38519 |
| 0 | (0.88889; 0.44444) | 0;29630 |

 $\it Tаблица~2.$ Оптимальные стратегии и выигрыш игрока на первом и втором шагах для различных δ в случае нормального распределения мнений арбитра

| | 1-й шаг игры | | 2-й шаг игры | |
|----------|---------------------|---------|---------------------|---------|
| δ | $(x_1^*; y_1^*)$ | H^2 | $(x_1^*; y_1^*)$ | H^1 |
| 1 | (1,52746; -0,65746) | 1,24322 | (1,20054; -0,33051) | 0,75284 |
| 0,9 | (1,46152; -0,59152) | 1,14431 | (1,18304; -0,31304) | 0,72660 |
| 0,8 | (1,39908; -0,52908) | 1,05065 | (1,16554; -0,29555) | 0,70035 |
| 0,5 | (1,23276; -0,36276) | 0,80118 | (1,11305; -0,24305) | 0,62161 |
| 0,3 | (1,13938; -0,26938) | 0,66111 | (1,07805; -0,20805) | 0,56911 |

Пример 4. Рассмотрим трехшаговую игру, в которой мнения арбитров подчинены нормальному закону

$$F_1 \sim N[0,1], F_2 \sim N[0,1].$$

Тогда выигрыш первого игрока на шаге l будет определяться по формуле

$$H^{l} = \frac{2}{9}(2x_1 - y_1) + \frac{5}{9}\delta V^{l-1},$$

а оптимальные предложения

$$x_1 \approx 1,02556 + \frac{2}{3}\delta V^{l-1};$$

$$y_1 \approx -(0, 1556 + \frac{2}{3}\delta V^{l-1}).$$

Оптимальные стратегии для первого игрока и ожидаемый выигрыш на первом и втором шагах игры для различных значений коэффициента дисконтирования δ представлены в таблице 2.

Заключение

В работе рассмотрена прикладная модель переговоров с использованием арбитражных

схем. Результаты исследований могут применяться при проведении различного рода конкурсов, в которых члены жюри рассматривают отдельные параметры конкурсных проектов. Такие ситуации возникают в случае, когда для оценки определенных частей проектов необходимо привлекать узких специалистов. Также рассмотренная модель с привлечением нескольких членов жюри позволяет сделать схему проведения конкурса более независимой.

Модель может быть реализована с помощью компьютерных технологий, что позволит сократить расходы на проведение конкурсной процедуры и сделает ее более открытой.

Исследование выполнено при финансовой поддержке $P\Phi\Phi U$ в рамках научного проекта № 14-01-31524 мол_а, Государственного задания Минобрнауки $P\Phi$ ЗабГУ (проект № 8.3641.2011) и гранта $P\Phi\Phi U$ (проект № 13-01-91158- $\Gamma\Phi EH$ а).

Литература

1. *Мазалов В. В., Токарева Ю. С.* Теоретикоигровые модели проведения конкурсов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2010. Т. 2, вып. 2. С. 66–78.

- 2. Макаров Ю. Н., Строцев А. А. Методика теоретико-игрового обоснования условий проведения конкурса // Инженерный вестник Дона. 2012. № 3. (21). С. 157–167.
- 3. De Berg M., Van Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O. Computational geometry. Algorithms and Application. Springer, 2000. 367 p.
- final-offer H. An analysisarbitration // Journal of conflict resolution. 1980. No 4. Vol. 24. P. 683–705.
- 5. Gibbons R. A Primer in game theory. N.Y.: Prentice Hall, 1992. 273 p.
- 6. Kilgour D. M. Game-theoretic properties of final-offer arbitration // Group Decision and Negot. 1994. N 3. P. 285-301.
- 7. Mazalov V., Tokareva J. Arbitration procedures with multiple arbitrators // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 217, Issue 1. P. 198–203.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Токарева Юлия Сергеевна

доцент, к. ф.-м. н. Забайкальский государственный университет ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Забайкальский край, Россия, 672039 эл. почта: jtokareva2@mail.ru тел.: (3022) 355890

Tokareva, Yulia Transbaikal State University 30 Aleksandro-Zavodskaya Št., 672039 Chita, Zabaykalsky Krai, Russia e-mail: jtokareva2@mail.ru tel.: (3022) 355890

УДК 519.175.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается случайный граф, содержащий N вершин, в котором независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1,\dots,ξ_N , равные степеням вершин графа, имеют биномиальное распределение с параметрами (N,p), где параметр p=p(N) выбран так, что $Np\to\lambda,\,0<\lambda<\infty,$ при $N\to\infty.$ Получены предельные распределения числа кратных ребер одной вершины случайного графа.

Ключевые слова: случайный граф, конфигурационная модель, петля, кратное ребро, предельное распределение.

I. A. Cheplyukova. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE NUMBER OF MULTIPLE EDGES OF A VERTEX OF A CONFIGURATION GRAPH

We consider a random graph with N vertices in which the random variables ξ_1, \ldots, ξ_N , equal to the vertex degrees are independent and have a binomial distribution with parameters (N, p), where p = p(N) is such that $N \to \infty$, $Np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Limit distributions of the number of multiple edge are obtained for one vertex of the configuration model.

 $\operatorname{Key}\ \operatorname{words}:$ random graph, configuration model, loop, multiple edge, limit distribution.

Изучению случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций, посвящено множество работ (см., например, [5, 9, 11]). Одна из наиболее известных моделей - конфигурационная модель с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Построение этой модели состоит из двух этапов. На первом этапе для каждой из N вершин графа определяется ее степень в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Для удобства изложения процесса построения такой модели часто используется понятие полуребра, введенное в [11]. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер, число которых равно степени данной вершины.

Предполагается, что все вершины и полуребра различны. На втором этапе построения происходит последовательное образование ребер: на каждом шаге два полуребра выбираются равновероятно и, соединившись, образуют ребро; если сумма всех полуребер является нечетным числом, то вводится вспомогательная (фиктивная) вершина, степень которой равна 1, и последнее свободное полуребро образует ребро с этой дополнительной вершиной. При изучении структуры таких графов оказалось эффективным использование методов теории ветвящихся процессов ([4, 6, 7, 10] и др.). Однако при построении конфигурационной модели соединение полуребер происходит без ограничений, следовательно, могут появиться кратные ребра и петли, а этих объектов в реализациях ветвящихся процессов нет. Поэтому необходимо уметь оценивать вероятности появления петель и кратных ребер при исследовании конфигурационных графов. Первые такие результаты были получены в работах [2] и [3].

В [8] рассматривается предельная структура графа, содержащего N вершин, при условии, что существует предельное распределение степеней вершин с конечными двумя первыми моментами. В [8] показано, что если максимальная степень вершины вышеуказанного графа имеет порядок $o(\sqrt{N})$ при $N \to \infty$, то число петель и число кратных ребер асимптотически имеет распределение Пуассона. В этом случае конфигурационный граф имеет только конечное число петель и кратных ребер. Следовательно, как отмечалось в [1], можно предположить, что предельная структура этого графа эквивалентна структуре уже хорошо изученной классической модели случайного графа Эрдеша-Реньи. В таком случайном графе, содержащем N вершин, степень вершины подчиняется биномиальному распределению с параметрами (N-1,p), где p означает вероятность соединения пары вершин в ребро. Исследованию структуры и свойствам графа Эрдеша-Реньи посвящено большое число работ. Например, в книге [8] рассматривается частный случай такого графа, где параметр распределения степеней вершин p = p(N) выбран так, что при $N \to \infty$ выполнено условие $Np = \lambda, 0 < \lambda < \infty$. В этом случае при $N \to \infty$ биномиальное распределение степеней вершин может быть приближено Пуассоновским распределением с параметром λ , и по построению такой граф не имеет ни петель, ни кратных ребер. Можно предположить, что в асимптотике структура конфигурационного графа с N вершинами и биномиальным распределением степеней вершин с параметрами (N, p), где параметр p = p(N) удовлетворяет вышесказанному условию, аналогична этой классической модели Эрдеша-Реньи. Например, размер ее максимальной компоненты связности может измениться только за счет появления конечного числа петель и кратных ребер.

В данной работе рассматривается частный случай конфигурационного графа с биномиальным распределением степеней вершин, параметр распределения p=p(N) которого выбран так, что при $N\to\infty$ выполнено условие $Np\to\lambda,\,0<\lambda<\infty.$ Как было сказано ранее, можно предположить, что в асимптотике, при $N\to\infty$, структура такого графа эквивалентна соответствующей классической модели

Эрдеша—Реньи. В настоящей работе получены предельные распределения вероятностей числа кратных ребер для одной вершины в рассматриваемом случайном графе.

Введем необходимые обозначения. Пусть ξ_1, \ldots, ξ_N означают независимые случайные величины, равные степеням вершин с номерами $1, \ldots, N$ соответственно, распределение которых имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \qquad (1)$$
$$i = 1, \dots, N.$$

Понятно, что для изучения случайного графа желательно знать предельные распределения основных характеристик этого графа, например, максимальную степень и сумму степеней графа. Легко показать, что для максимальной степени $\xi_{(N)} = \max\{\xi_1,\dots,\xi_N\}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $N \to \infty$, тогда для x таких, что $0 < C_1 \leqslant Ne^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \leqslant C_2 < \infty$, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} < x\} = \exp\left\{-Ne^{-\lambda} \frac{\lambda^{\lceil x \rceil}}{\lceil x \rceil!}\right\},\,$$

rde [x] означает наименьшее целое число, большее или равное x.

Замечание 1. Из условий леммы 1 нетрудно получить, что при $N \to \infty$ максимальная степень вершины с вероятностью, стремящейся к единице, эквивалентна

$$\frac{\ln N}{\ln \ln N}.$$

Учитывая последнее замечание, для изучения предельного поведения числа петель и числа кратных ребер нашего графа достаточно рассмотреть только те вершины, степени d которых не превосходят максимальную, однако при доказательствах всех нижеприведенных теорем мы расширим это условие и будем рассматривать графы, степени вершин которых удовлетворяют условию $d = o(N^a), a < 1/2$.

Выберем две произвольные вершины нашего графа, например вершины с номерами N и N-1. Пусть случайная величина γ_N равна числу петель вершины с номером N, а случайная величина $\lambda_{N,N-1}$ равна числу ребер вида

(N, N-1). Введем следующие обозначения:

$$p(d_{N}; m) = \mathbf{P}\{\gamma_{N} = m | \xi_{N} = d_{N}\};$$

$$p(d_{N}, d_{N-1}; m) =$$

$$= \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}\},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\alpha_{m} = \begin{cases} \mathbf{E}[\xi]^{m}, \text{ если } m = 1, 2, \dots; \\ 1, \text{ если } m = 0, \end{cases}$$
 (2)

где $\mathbf{E}[\xi]^m$ означает факториальный момент, т. е.

$$\mathbf{E}[\xi]^m = \mathbf{E}\xi(\xi - 1)\cdots(\xi - m + 1).$$

Теорема 1. Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы следующие утверждения.

1. При фиксированных d_N

$$p(d_N; m) = \frac{d_N!(1 + o(1))}{(d_N - 2m)!m!(2\lambda N)^m}.$$

2. $\Pi pu \ d_N \to \infty$

$$\begin{split} p(d_N;m) &= \\ &= \left(\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right)^m \frac{1}{m!} \exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\} (1+o(1)). \end{split}$$

Теорема 2. Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\gamma_N = m\} = \frac{1 + o(1)}{m!(2\lambda N)^m} \alpha_m,$$

 $\epsilon de \alpha_m$ определено в (2).

Следствие 1. Пусть $N \to \infty$, тогда

$$\mathbf{P}{\gamma_N = 0} = 1 + o(1).$$

Теорема 3. Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} p(d_N, d_{N-1}; m) &= \\ &= \frac{d_N! d_{N-1}! (1 + o(1))}{m! (d_N - m)! (d_{N-1} - m)! (\lambda N)^m} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{d_N^2}{\lambda N} - \frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N} \right\}. \end{aligned}$$

Следствие 2. Пусть $N \to \infty$, тогда

$$p(d_N, d_{N-1}; 0) = 1 + o(1).$$

Следствие 3. Пусть $N, d_N, d_{N-1} \to \infty$, тогда для m = 0, 1, 2, ...

$$p(d_N, d_{N-1}; m) =$$

$$= \frac{1 + o(1)}{m!} \left(\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right)^m \exp\left\{-\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right\}.$$

Теорема 4. Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m\} = \frac{1 + o(1)}{m!(\lambda N)^m} \alpha_m^2.$$

Обозначим через K событие, состоящее в том, что вершина с номером N не имеет ребер кратности больше единицы. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. Пусть $N \to \infty$, тогда

$$P{K} = 1 + o(1).$$

Для доказательства этих утверждений нам потребуется предельное распределение суммы степеней всех вершин случайного графа. Обозначим через η_N сумму всех степеней вершин, т. е. $\eta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ при отсутствии фиктивной вершины, в противном случае $\eta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N + 1$. В работе [1] доказана следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $N \to \infty$, тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k-N^2p)/\sqrt{N\lambda(1-p)}$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = k\} = \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda N(1 - p)}} \exp\left\{-\frac{(k - N^2 p)^2}{\lambda N(1 - p)}\right\}.$$

Доказательства теорем 1, 2 и следствия 1 приведены в статье [1].

Докажем теорему 3. Обозначим через η_{N-2} сумму степеней вершин графа без учета (N-1)-й и N-й вершин, т. е. $\eta_N=\eta_{N-2}+\xi_{N-1}+\xi_N$. Согласно формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} = \\
= \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = 0\} \times \\
\times \mathbf{P}\{\gamma_{N} = 0 | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} + \\
+ \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = 1\} \times \\
\times \mathbf{P}\{\gamma_{N} = 1 | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = 1\} + \cdots + \\
+ \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = A\} \times \\
\times \mathbf{P}\{\gamma_{N} = A | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} + \\
+ \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} > A, \gamma_{N} = o(N^{a})\} \times \\
\times \mathbf{P}\{\gamma_{N} > A, \gamma_{N} = o(N^{a}) | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = k\} \times \\
\times \mathbf{P}\{\gamma_{N} = k | \xi_{N} = d_{N}\} + \\
+ \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} > A, \gamma_{N} = o(N^{a})\} \times \\
\times \mathbf{P}\{\gamma_{N} > A, \gamma_{N} = o(N^{a}) | \xi_{N} = d_{N}\}, \quad (3)$$

где A — некоторая положительная постоянная, выбор которой будет ясен из дальнейшего. Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} &= m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N > A, \gamma = o(N^a) \} \times \\ &\times \mathbf{P}\{\gamma_N > A, \gamma = o(N^a) | \xi_N = d_N \} \leqslant \mathbf{P}\{\gamma_N > A, \gamma = o(N^a) | \xi_N = d_N \} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k > A, k = o(N^a)} \mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N \} \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k>A,k=o(N^a)} \left(\sum_{l_N=d_N}^{[\lambda N/2]} \mathbf{P} \{ \gamma_N = k | \xi_N = d_N, \eta_{N-1} = l_N - d_N \} \mathbf{P} \{ \eta_{N-1} = l_N - d_N \} + \right)$$

$$+ \sum_{l_{N}>[\lambda N/2], l_{N}=o(N^{a+1})} \mathbf{P}\{\gamma_{N} = k | \xi_{N} = d_{N}, \eta_{N-1} = l_{N} - d_{N}\} \mathbf{P}\{\eta_{N-1} = l_{N} - d_{N}\} \right) =$$

$$= \Sigma_{1} + \Sigma_{2}.$$
(4)

Тогда, используя известное неравенство для случайной величины ρ , имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p

(см., например [6]):

$$\mathbf{P}\{\rho \leqslant np/2\} \leqslant \exp\{-np/8\},\tag{5}$$

находим, что

$$\Sigma_{1} \leqslant \sum_{k>A, k=o(N^{a})} \sum_{l_{N}=d_{N}}^{[\lambda N/2]} \mathbf{P} \{ \eta_{N-1} = l_{N} - d_{N} \} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k>A} \sum_{k=o(N^{a})} \mathbf{P} \{ \eta_{N-1} \leqslant \frac{\lambda N}{2} \} \leqslant \exp\{-\lambda N/8\} N^{a}. \tag{6}$$

Рассмотрим слагаемое Σ_2 . Пусть C_1, C_2, \ldots означают некоторые положительные постоянные. В [1] было показано, что при d=

 $o(\sqrt{N}), l_N > C_1 N$ справедливо соотношение:

$$\mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N, \eta_{N-1} = l_N - d\} = \frac{1}{k!} \left(\frac{d_N^2}{2l_N}\right)^k \exp\left\{-\frac{d_N^2}{2l_N}\right\} (1 + o(1)).$$

Отсюда и из (4) получаем, что

$$\Sigma_{2} = \sum_{k>A, k=o(N^{a})} \sum_{l_{N}>[\lambda N/2], l_{N}=o(N^{a+1})} \frac{1+o(1)}{k!} \left(\frac{d_{N}^{2}}{2l_{N}}\right)^{k} \exp\left\{-\frac{d_{N}^{2}}{2l_{N}}\right\} \times \mathbf{P}\left\{\eta_{N-1} = l_{N} - d_{N}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k>A.k=o(N^a)} \frac{1}{k!} \left(\frac{N^{2a}}{\lambda N}\right)^k \leqslant C_1 N^{A(2a-1)}. \tag{7}$$

Из (4), (6) и (7) находим, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N > A\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\gamma_N > A | \xi_N = d_N\} \leqslant C_2 N^{A(2a-1)}.$$
(8)

Из соотношений (3) и (8) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N\} + O\left(\left(N^{A(2a-1)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} \times$$

$$\times p(d_N; k) + O\left(\left(N^{A(2a-1)}\right)\right). \tag{9}$$

По формуле полной вероятности имеем:

$$p(d_N, d_{N-1}; m) = \sum_{\substack{l_N \geqslant d_N + d_{N-1}, \\ l_N = o(N^{a+1})}} \mathbf{P} \{ \lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1} \} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\}. \tag{10}$$

Разобьем область суммирования на три части:

$$K_1 = \{l_N : d_N + d_{N-1} \leq l_N < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}\};$$

$$K_2 = \{l_N : l_N \in \{\lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}, \lambda N + B\sqrt{\lambda N(1-p)}\};$$

$$K_3 = \{l_N : l_N > \lambda N + B\sqrt{\lambda N(1-p)}\},$$

где выбор положительной постоянной B будет ясен из дальнейшего, а соответствующие суммы обозначим через S_i , i = 1, 2, 3.

Нетрудно видеть, что при $m\leqslant \min\{d_N,d_{N-1}\}, k\leqslant d_N/2$ справедливы равенства:

при $k \neq 0$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \\
\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} = \\
= \binom{d_N}{m} \binom{d_{N-1}}{m} m! \binom{d_N - m}{2k} \times \\
\times \binom{2k}{k} \binom{l_N - d_N - d_{N-1}}{d_N - m - 2k} \times \\
\times (d_N - m - 2k)! \frac{(l_N - 2d_N - 1)!!}{(l_N - 1)!!} (11)$$

и при k=0

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1},
\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} =
= {d_N \choose m} {d_{N-1} \choose m} m! {l_N - d_N - d_{N-1} \choose d_N - m} \times
\times (d_N - m)! \frac{(l_N - 2d_N - 1)!!}{(l_N - 1)!!}, (12)$$

где $(2l-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2l-1)$. Легко показать, что для заданного l

$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l l!}. (13)$$

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (10), дает слагаемое S_2 . Используя формулу Стирлинга и асимптотику:

$$\left(1 - \frac{b}{x}\right)^{x-b} = \exp\left\{-b + \frac{b^2}{2x} + O\left(\frac{b^3}{x^2}\right)\right\},\,$$

где b=o(x) при $x\to\infty,$ из (11) – (13) получаем, что при $N\to\infty$

$$\begin{split} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} &= m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \\ \eta_{N-2} &= l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} = \\ &= \frac{d_N! d_{N-1}! l_N^{-m-2k}}{m! (d_{N-1} - m)! (d_N - m - 2k)! 2(2k - 2)!} \times \end{split}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{d_N^2}{l_N} - \frac{d_N d_{N-1}}{l_N} + \right\} \tag{14}$$

$$+\frac{(2d_N+d_{N-1})(m+2k)}{l_N}+O\left(\frac{(d_N+d_{N-1})^3}{l_N^2}\right)\right\}$$

И

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} &= m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \\ \eta_{N-2} &= l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} = \\ &= \frac{d_N! d_{N-1}! l_N^{-m}}{m! (d_N - m)! (d_{N-1} - m)!} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{d_N^2}{l_N} - \frac{d_N d_{N-1}}{l_N} + \right\} \tag{15}$$

+
$$\frac{(2d_N + d_{N-1})m}{l_N}$$
 + $O\left(\frac{(d_N + d_{N-1})^3}{l_N^2}\right)$.

Из соотношений (9) и (10) несложно найти, что

$$S_2 = \sum_{l_N \in K_2} \mathbf{P} \{ \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1} \} \Big(\mathbf{P} \{ \lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \\ \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0 \} p(d_N; 0) + \\ + \sum_{k=1}^A \mathbf{P} \{ \lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k \} p(d_N; k) + \\ + O(N^{A(2a-1)}) \Big) \,.$$

Отсюда, из пункта 1 теоремы 1 и соотношений (14), (15) получаем, что при фиксированных d_N

$$S_{2} = \sum_{l_{N} \in K_{2}} \mathbf{P} \{ \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1} \} \left(\frac{d_{N}! d_{N-1}! l_{N}^{-m} (1 + o(1))}{m! (d_{N-1} - m)! (d_{N} - m)!} + \sum_{k=1}^{A} \frac{(d_{N}!)^{2} d_{N-1}! l_{N}^{-m-2k} (1 + o(1))}{m! (d_{N-1} - m)! (d_{N} - m - 2k)! 2(2k - 2)! (d_{N} - 2k)! k! (2\lambda N)^{k}} \right) = \frac{d_{N}! d_{N-1}!}{(\lambda N)^{m} (d_{N-1} - m)! (d_{N} - m)!} \sum_{l_{N} \in K_{2}} \mathbf{P} \{ \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1} \} (1 + o(1)).$$

Используя пункт 2 теоремы 1, несложно показать, что последнее соотношение справедливо и в случае, когда $d_N \to \infty$. Тогда отсюда и из леммы 2 следует, что при $N \to \infty$ выбором достаточно большого B сумма S_2 может быть сделана сколь угодно близкой к выражению

$$\frac{d_N!d_{N-1}!}{(\lambda N)^m(d_{N-1}-m)!(d_N-m)!}(1+o(1)).$$

Оценим S_1 . Несложно видеть, что

$$S_{1} \leqslant \sum_{l_{N}=d_{N}+d_{N-1}}^{[\lambda N/2]} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} \times \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} + \sum_{[\lambda N/2]+1 \leqslant l_{N} < \lambda N - B} \sqrt{\lambda N(1-p)} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} \times \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\}.$$

Тогда из (9) получаем, что

$$S_{1} \leqslant \mathbf{P}\{\nu_{N-2} \leqslant \lambda N/2\} + \sum_{[\lambda N/2] < l_{N} < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} \times (\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = 0\} \times \mathbf{P}\{\gamma_{N} = 0 | \xi_{N} = d_{N}\} + \sum_{k=1}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = k\} \times \mathbf{P}\{\gamma_{N} = k | \xi_{N} = d_{N}\} + O(N^{A(2a-1)}) \right).$$

Отсюда, из пункта 1 теоремы 1 и неравенства (5) находим, что при фиксированных d_N

$$S_{1} \leq \exp\left\{-\frac{\lambda N}{8}\right\} + \sum_{[\lambda N/2] < l_{N} < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\} \times C_{3} \left(\frac{d_{N}! d_{N-1}! l_{N}^{-m}}{m! (d_{N} - m - 2k)! (d_{N-1} - m)!} + \sum_{k=1}^{A} \frac{(d_{N}!)^{2} d_{N-1}! l_{N}^{-m-2k}}{2m! (d_{N} - m - 2k)! (d_{N-1} - m)! (2k - 2)! k! (d_{N} - 2k)! (2\lambda N)^{k}}\right) < \exp\left\{-\frac{\lambda N}{8}\right\} + C_{4}(\lambda N)^{-m} \sum_{[\lambda N/2] < l_{N} < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}\}.$$

Аналогичная оценка для суммы S_1 справедлива и для случая, когда $d_N \to \infty$. Отсюда, из леммы 2 и явного выражения для суммы S_2 следует, что при $N \to \infty$ и при достаточно больших значениях B справедливо, что

Аналогично тому, как получено соотношение (16), из теоремы 1, леммы 2 и (9) можно показать, что при $N \to \infty$ и достаточно больших значениях B выполнено неравенство:

$$S_1 = o(S_2).$$
 (16)

$$S_{3} \leqslant C_{5} \sum_{l_{N} \in K_{3}} \mathbf{P} \{ \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1} \} \Big(\mathbf{P} \{ \lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \\ \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = 0 \} p(d_{N}; 0) + \\ + \sum_{k=1}^{A} \mathbf{P} \{ \lambda_{N,N-1} = m | \xi_{N} = d_{N}, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1}, \gamma_{N} = k \} p(d_{N}; k) \Big) \leqslant \\ \leqslant \frac{C_{6} d_{N}! d_{N-1}!}{(N\lambda)^{m} m! (d_{N} - m)! (d_{N-1})!} \sum_{l_{N} > N\lambda + B\sqrt{N\lambda(1-p)}} \mathbf{P} \{ \eta_{N-2} = l_{N} - d_{N} - d_{N-1} \} = o(S_{2}).$$

Отсюда, из соотношений (10), (16) и выражения для суммы S_2 следует утверждение теоремы 3.

Докажем теорему 4. Используя формулу полной вероятности, имеем, что при $m=0,1,2,\ldots$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m\} = \sum_{\substack{d_N \geqslant m, \\ d_N = o(N^a)}} \sum_{\substack{d_N \geqslant m, \\ d_N = o(N^a)}} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\xi_N = d_N\}\mathbf{P}\{\xi_{N-1} = d_{N-1}\}.$$

Тогда из теоремы 3 и равенства (1) следует, что при $N \to \infty$ и $m=1,2,\ldots$ справедливо

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m\} = \frac{1 + o(1)}{m!(\lambda N)^m} \sum_{\substack{d_N \geqslant m, \\ d_N = o(N^a)}} \frac{d_N!}{(d_N - m)!} \mathbf{P}\{\xi_N = d_N\} \times \sum_{\substack{d_N \geqslant m, \\ d_N = o(N^a)}} \frac{d_{N-1}!}{(d_{N-1} - m)!} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = d_{N-1}\} = \frac{1 + o(1)}{m!(\lambda N)^m} (\mathbf{E}[\xi]^m)^2,$$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = 0\} = (1 + o(1)) \sum_{\substack{d_N, d_{N-1} \geqslant 0, \\ d_N, d_N = 0 \\ N \neq 0}} \mathbf{P}\{\xi_N = d_N\} = (1 + o(1)).$$

Теорема 4 доказана.

Следствия 2 и 3 непосредственно следуют из утверждения теоремы 3, следствие 4 вытекает из теоремы 4, используя следующие соотношения

$$\mathbf{P}\{K\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{K}\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - N\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} > 0\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00009, и Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012-2016 гг.

Литература

- 1. *Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа петель и кратных ребер одной вершины конфигурационного графа // European Resercher (в печати).
- 2. Bender E. A., Canfield E. R. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 1978. Vol. 24, Iss. 3. P. 296–307.
- 3. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labeled regular graphs // European Journal of Combinatorics. 1980. Vol. 1. P. 311–316.

- 4. Erdös P., Rènyi A. On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1960. Vol. 5. P. 17–61.
- 5. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch. On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.
- 6. Janson S., Luczak T., Rucinski A. Random graphs. New York: Wiley, 2000. 348 p.
- 7. Hofstad R., Hooghiemsra G., Znamenski D. Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees // Electronic Journal of Probability. 2007. Vol. 12. P. 703–766.
- 8. $Hofstad\ R.$ Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.
- 9. Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Physical Review E. 2001. 64. 026118.
- 10. Pavlov Yu. L. On power-law random graphs and branching processes // Proceedings of the Eight International Conference CDAM. Minsk: Publishing center BSU. 2007. Vol. 1. P. 92–98.
- 11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: chia@krc.karelia.ru

тел.: (8142) 763370

Cheplyukova, Irina

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: chia@krc.karelia.ru tel.: (8142) 763370 УДК 551.465.45

ОПТИМАЛЬНОЕ ДУБЛИРОВАНИЕ ЗАДАНИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

И. А. Чернов

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН Петрозаводский государственный университет

Рассматривается модель вычислительной системы, решающей многочисленные задачи распознавания. Правильный ответ дается с некоторой известной вероятностью (надежность). Каждое задание решается на разных узлах до получения заданного количества идентичных ответов (кворум); такая избыточность позволяет снизить риск неверного ответа, но требует дополнительных вычислительных и временных затрат. Целевая функция есть сумма затрат и потерь в случае неверного ответа (штраф). Получены условия, при которых избыточность оправдывается и оценивается оптимальный кворум.

Ключевые слова: дублирование заданий, грид-системы, оптимизация вычислений, desktop grid.

I. A. Chernov. OPTIMAL REPLICATION OF TASKS IN A COMPUTING GRID

We consider a model of a grid computing system solving recognition problems. Computers produce the correct answer with some known probability. Each problem is solved up to a fixed number (quorum) of identical answers; this redundancy allows reducing the risk of producing the wrong answer but requires additional time. The cost function is the sum of the computational time and penalty in case of the wrong answer. We reveal the conditions when such redundancy is advantageous and show how the optimal quorum can be determined.

 ${\rm K\,e\,y}\ \ {\rm w\,o\,r\,d\,s};$ replication of tasks, grid computing, optimal calculations, desktop grid.

Введение

Высокопроизводительные вычисления широко применяются в науке и промышленности. Базой для них служат суперкомпьютеры (вычислительные кластеры) или грид-системы. Однако в последнее время все большее значение приобретают вычислительные системы из персональных компьютеров [1, 3], объединяющие разнородные вычислительные ресурсы, связанные коммуникационными сетями общего пользования. Для таких систем хорошо под-

ходят задачи, требующие значительных вычислительных ресурсов за счет большого количества слабо связанных подзадач. Класс таких задач обширен: поиск целых чисел с заданными свойствами (простых, близнецов, совершенных и т. п.), вычисление чисел Рамсея, идентификация параметров математической модели перебором, анализ сигналов, приходящих из космоса, и пр. Подразумевается, что вычислительные ресурсы предоставляются добровольно. Проекты добровольных вы-

числений [10] используют множество узлов, причем участники анонимны и о характеристиках их устройств известно мало или ничего не известно. Кроме того, вычислительные узлы работают над заданиями проекта в свободное время: следовательно, узел может в случайные моменты прерывать работу над задачей или вообще прекращать сотрудничество с проектом.

Важной проблемой является обеспечение достоверности результата. Поскольку в расчетах участвуют разнородные вычислительные ресурсы, не исключены аппаратные и программные сбои, искажения данных при передаче по сети общего пользования и так далее, вплоть до намеренного вредительства. Вероятность ошибки может быть снижена за счет дублирования (репликации) заданий [2, 4]: например, одно и то же число отправляется на проверку на простоту двум или более узлам. Кворумом назовем минимальное число идентичных ответов: так, если кворум равен трем, то задания рассылаются разным клиентам до тех пор, пока не будет получено три идентичных результата. Штраф за ошибки разных видов (неверный ответ ДА либо неверный ответ НЕТ) может быть различным, равно как и кворум. Примером может служить выявление упорядоченности космических сигналов: ошибочно признанный искусственным сигнал будет многократно тщательно проверен, так что ошибка относительно дешева, тогда как пропущенный искусственный сигнал может обойтись намного дороже. Другим примером служит идентификация математической модели перебором: ошибочное решение будет немедленно выявлено прямой проверкой, тогда как не обнаруженное решение, возможно, уже не будет найдено.

Большое число работ (например, [2, 4, 6– 9) посвящено методам эффективного и оптимального дублирования заданий, способам повысить надежность с помощью репликации и иных средств и возможности снизить избыточность при сохранении надежности, используя разнородность вычислительной сети. В настоящей статье рассматривается возможность повышения надежности с точки зрения минимизации риска потерь, связанных с неверным ответом. Если получено (с применением методик репликации и иных средств) неверное решение прикладной задачи, то при практическом использовании этого результата его ошибочность будет рано или поздно выявлена. При этом вполне вероятны значительные убытки или потери. Если известны оценки этих рисков, имеет смысл учитывать их при разработке стратегий распределения вычислительных заданий. Работы, рассматривающие проблему с этой точки зрения, нам неизвестны.

Назовем кворум оправданным, если значение стоимости меньше, чем при меньшем кворуме, и оптимальным, если значение стоимости минимально при данном кворуме. Штраф назовем оптимальным, если он доставляет минимальное значение функции стоимости при выбранном кворуме.

Представляет интерес определение соотношений между оптимальным кворумом, средней надежностью узла — вероятностью получить достоверный результат при однократном расчете — и затратами в результате ошибки. Затраты далее называем штрафом, но смысл не обязательно связан с санкциями: это может быть упущенная прибыль при неправильном решении задачи или потери, связанные с ошибкой.

Постановка задачи

Рассмотрим вычислительную систему, решающую однотипные задачи распознавания (с одним из двух возможных ответов). Предполагаем, что имеется оценка времени расчета одного задания, по истечении которого достоверно, что узел прекратил работу. В этом случае задание посылается другому узлу; в нашей модели предполагается, что сеть возвращает решение задачи на сервер, и изучаются вопросы, связанные с дублированием заданий. Вопросы быстродействия, оптимизации процедуры решения и стратегии дублирования не рассматриваются.

В силу ошибок, сбоев и вредительских действий вероятность достоверного ответа в одиночном расчете равна q, 0, 5 < q < 1. Вероятность ошибки обозначим p = 1 - q. Это оценка снизу надежности узлов; либо сеть достаточно однородна по своему составу, так что можно считать р одинаковой для всех узлов. С целью снизить вероятность получения ошибочного ответа задача решается на разных узлах до тех пор, пока не будет получено ν положительных либо μ отрицательных ответов. В случае, если ответ оказался неверным, к стоимости расчетов добавляется некоторый штраф F_{+} или F_{-} , который имеет смысл дополнительных затрат, упущенной выгоды, собственно штрафа и т. д. Считая затраты на одиночный расчет единичными, запишем целевую функцию как математическое ожидание случайной величины, значения которой суть сумма количества фактических расчетов и соответствующего штрафа в случае ошибки. Под затратами на единичный расчет подразумеваем затраты на получение одного ответа.

Возникают следующие вопросы: каков оптимальный кворум (ν и μ) при заданных штрафах и надежности? При каких штрафах данные кворумы оправданны? Каковы минимальные средние затраты при данных оптимальных штрафах и кворумах при заданной вероятности ошибочного ответа? Также важно понять влияние угрозы штрафа: ненадежные узлы (с надежностью меньше некоторой) требуют значительной угрозы для оправдания дублирования, что ставит вопрос о целесообразности их использования. Каков предел надежности в указанном смысле?

Случай равноценных ответов

Пусть $F_+ = F_- = F$, $\nu = \mu$, то есть оба ответа в равной степени важны. Число расчетов до достижения кворума ν , очевидно, может быть любым от ν до $2\nu-1$. При единичной стоимости расчета это значения целевой функции для случая верного ответа; при ложном ответе добавляется штраф F. Стоимость, таким образом, есть следующая дискретная случайная величина, которую обозначим $\xi(\nu, F)$:

Таблица 1. Стоимость, равноценные ответы

| $\nu + i$ | $\nu + i + F$ |
|---------------------------------|---------------------------------|
| $C^{\nu-1}_{\nu+i-1}q^{\nu}p^i$ | $C^{\nu-1}_{\nu+i-1}p^{\nu}q^i$ |

В первой строке — значения случайной величины $\xi(\nu,F)$, i пробегает целые числа от 0 до $\nu-1$; вторая строка содержит вероятности этих значений. Символ $C_n^m=\binom{n}{m}$ обозначает число сочетаний. Первый столбец описывает случаи верного ответа, i — это число ошибочных расчетов, но последний расчет обязательно верен (в противном случае кворум достигается раньше); второй набор аналогично соответствует неверному ответу. Вычислим математическое ожидание $E_F(\nu)=\mathsf{E}\xi(\nu,F)$ этой случайной величины. Введем функцию

$$g_{\nu}(x) = \sum_{i=0}^{\nu-1} C_{\nu+i-1}^{\nu-1} x^i, \quad x \in [0,1].$$

Тогда средние затраты суть

$$E_F(\nu) = \nu + p^{\nu} g_{\nu}(q) F + q^{\nu} p g_{\nu}'(p) + p^{\nu} q g_{\nu}'(q).$$

Функция $g_{\nu}(x)$ дифференцируема по x (это многочлен), $g_{\nu}(0) = 1$, $g_{\nu}(x)$ и $g'_{\nu}(x)$ (производная по x) возрастают как по x, так и по ν . В самом деле, сумма в определении функции

 g_{ν} содержит ν положительных слагаемых и

$$C^{\nu}_{\nu+i}x^i = C^{\nu-1}_{\nu+i-1} \cdot \frac{\nu+i}{\nu}x^i > C^{\nu-1}_{\nu+i-1}x^i,$$

поэтому $g_{\nu+1}(x) > g_{\nu}(x)$ при всех x > 0. Рассуждение для производной аналогично.

Для определения оптимального кворума нам следует сравнить $E_F(\nu)$ и $E_F(\nu+1)$. Очевидно, $E_F(\nu)$ возрастает по ν , если ν велико, не медленнее, чем линейно. Это естественно, поскольку расходы на проверку расчетов растут линейно, а вероятность ошибки, убывая, все же положительна. Поэтому либо $E_F(1)$ минимально (репликация не требуется), либо достигается минимум при целом $\nu>1$. Определим условия, при которых увеличение кворума оправданно: для этого рассмотрим разность $G(\nu)=E_F(\nu)-E_F(\nu+1)=A(p)F-B(p)$. Вычислим коэффициент A(p):

$$\frac{A(p)}{p^{\nu}} = \sum_{i=0}^{\nu-1} C_{\nu+i-1}^{\nu-1} q^i - p \sum_{i=0}^{\nu} C_{\nu+i}^{\nu} q^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu-1} C_{\nu+i-1}^{\nu-1} \cdot \left(1 - p - \frac{pi}{\nu}\right) q^i - p C_{2\nu}^{\nu} q^{\nu}.$$

Изучим функцию

$$S(p,\nu,j) = \sum_{i=0}^{\nu-1-j} C_{\nu+i-1}^{\nu-1} \left(1 - p - \frac{pi}{\nu}\right) q^{i+j}.$$

Ясно, что

$$\begin{split} S(p,\nu,k-1) &= C_{2\nu-1-k}^{\nu-1}q^{\nu} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\nu-k-1} C_{\nu+i-1}^{\nu-1}q^{i+k} - \sum_{i=1}^{\nu-k} C_{\nu+i-1}^{\nu}pq^{i+k-1} = \\ &= C_{2\nu-1-k}^{\nu-1}q^{\nu} + S(p,\nu,k). \end{split}$$

Поэтому

$$S(p,\nu,0) = q^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} C_{(2\nu-1)-j}^{\nu-1}.$$

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} C_{(2\nu-1)-j}^{\nu-1} = C_{2\nu-1}^{\nu-1}.$$

Для этого нам потребуются две известные формулы (треугольник Паскаля):

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m, \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{split} C_{2\nu-1}^{\nu-1} &= C_{2\nu-2}^{\nu-2} + C_{2\nu-2}^{\nu-1} = C_{2\nu-2}^{\nu-1} + C_{2\nu-2}^{\nu} = \\ &= C_{2\nu-2}^{\nu-1} + C_{2\nu-3}^{\nu-1} + C_{2\nu-3}^{\nu}. \end{split}$$

Продолжая, получим

$$C_{2\nu-1}^{\nu-1} = \sum_{j=1}^{\nu} C_{(2\nu-1)-j}^{\nu-1}.$$

На последнем шаге мы применили очевидное равенство $C_n^n = C_{n-1}^{n-1}$.

Теперь можно записать коэффициент A(p):

$$\begin{split} A(p) &= p^{\nu} q^{\nu} \left(\sum_{j=1}^{\nu} C_{(2\nu-1)-j}^{\nu-1} - p C_{2\nu}^{\nu} \right) = \\ &= p^{\nu} q^{\nu} \left(C_{2\nu-1}^{\nu-1} - \frac{2\nu}{\nu} p C_{2\nu-1}^{\nu-1} \right) = \\ &= p^{\nu} q^{\nu} C_{2\nu-1}^{\nu-1} (1 - 2p). \end{split}$$

Свободный член $B(p) = E_0(\nu+1) - E_0(\nu)$ — это изменение средней стоимости при нулевом штрафе, среднее число дополнительных расчетов, необходимое для достижения большего кворума. Следовательно, B(p) > 0.

Легко видеть, что при $p\geqslant 0.5$ разница $G(\nu)<0$ при всех $\nu\geqslant 1$, то есть репликация не оправданна. Однако для задач распознавания рассмотрение такой низкой надежности не имеет смысла: мы предполагали, что p<0.5.

С другой стороны, при 0 и

$$F > F_{\nu} = \frac{E_0(\nu + 1) - E_0(\nu)}{C_{2\nu - 1}^{\nu - 1} (1 - 2p)p^{\nu}q^{\nu}} \tag{1}$$

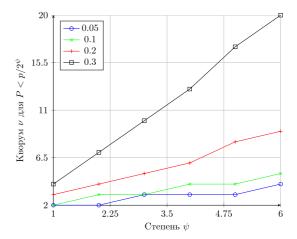
имеем $G(\nu) > 0$, то есть репликация снижает средние расходы за счет уменьшения вероятности ошибки и тем самым угрозы штрафа. Последовательность F_{ν} экспоненциально возрастает тем быстрее, чем меньше p. Сформулируем доказанный результат. Пусть $\nu \geqslant 1$.

Утверждение 1. Кворум $\nu + 1$ оправдан, если p < 0.5 и штраф F превышает оптимальное значение F_{ν} , заданное (1). Кворум $\nu + 1$ оптимален, если p < 0.5 и если штраф $F \in (F_{\nu}, F_{\nu+1})$.

Величина F_{ν} как функция p (заданная соотношением (1)) имеет минимум при некотором $p^*(\nu) \in (0; 0, 5)$; это значение можно трактовать как предел надежности: при меньшей надежности репликацию оправдывает только повышенный штраф.

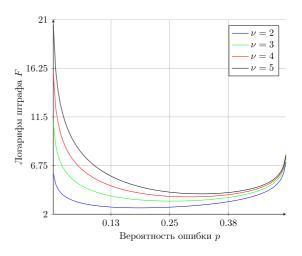
Как уже отмечалось, любой кворум ν оправдан при достаточно высоком штрафе F; рис. 1 показывает кворум ν , позволяющий уменьшить вероятность ошибки (по сравнению с таковой для одного узла p) в M раз как функцию от $\psi = \log_2 M$ при разных p.

Рис. 2 демонстрирует зависимость натурального логарифма оптимального штрафа F от p при различных кворумах ν .



 $Puc.\ 1.\ {
m Kворум},\ {
m уменьшающий вероятность ошиб-ки в } M=2^{\psi}$ раз.

Отметим, что как при высокой $(p\approx 0)$, так и при низкой $(p\approx 0,5)$ надежности репликация менее оправданна: в первом случае риск мал, так что расходы на проверку ответа не окупаются, во втором — риск велик, так что отказ от проверки обходится дешевле расходов на таковую.



 $Puc.\ 2.\ Логарифм оптимального штрафа в зависимости от надежности.$

Случай ответов разной ценности

Теперь обобщим модель на случай ответов различной стоимости: пусть $\mu = \nu + \gamma$, $\gamma \geqslant 0$. Случай отрицательного γ получается формальным обменом ответов. Теперь ответ ДА принимается, если получено ν ответов ДА

Tаблица 2. Стоимость ζ , различные по ценности ответы

| $\nu + i$, | $\nu + i + F,$ | $\mu + j$, | $\mu + j + F_+,$ |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $i=0,\ldots,\mu-1,$ | $i=0,\ldots,\mu-1$ | $j=0,\ldots,\nu-1$ | $j=0,\ldots,\nu-1$ |
| $\alpha_+ C_{\nu+i-1}^{\nu-1} q^{\nu} p^i$ | $\alpha - C_{\nu+i-1}^{\nu-1} p^{\nu} q^i$ | $\alpha_{-}C_{\mu+j-1}^{\mu-1}q^{\mu}p^{j}$ | $\alpha_+ C_{\mu+j-1}^{\mu-1} p^{\mu} q^j$ |

и менее чем μ ответов НЕТ; для ответа НЕТ — симметрично. Ошибка первого рода — если принят ответ ДА при верном ответе НЕТ, ошибка второго рода — симметрично. Пусть ответы имеют некоторые «априорные» вероятности α_+ и $\alpha_-=1-\alpha_+$. Стоимость расчета выражает случайная величина ζ в табл. 2.

Обозначим ее математическое ожидание $\mathsf{E}\zeta$ через $E_{F_-,F_+}(\nu,\gamma)$ или $E(\nu,\gamma)$. Рассмотрим по отдельности базовый кворум ν (проверка обоих ответов) и дополнительную проверку γ для одного из ответов. Вопрос о том, какой из ответов следует тщательнее проверять (стремиться избежать более вероятной ошибки и более дорогостоящей ошибки), также нетривиален.

Базовая проверка

Рассмотрим приращение средней стоимости $G(\nu,\gamma)=E_{F_-,F_+}(\nu,\gamma)-E_{F_-,F_+}(\nu+1,\gamma).$ Тогда $G(\nu,\gamma)=A_-F_-+A_+F_+-B.$ Назовем базовый кворум оправданным, если $G(\nu,\gamma)<0.$

Определим коэффициент A_{-} (аналогично коэффициенту A выше):

$$\frac{A_{-}}{\alpha_{-}p^{\nu}} = \sum_{i=0}^{\mu-1} C_{\nu+i-1}^{\nu-1} \cdot \left(q - \frac{pi}{\nu}\right) q^{i} - pC_{\nu+\mu}^{\nu} q^{\mu}.$$

Введем функцию

$$S(p, \mu, \nu, j) = \sum_{i=0}^{\mu-1-j} C_{\nu+i-1}^{\nu-1} \cdot \left(1 - p - \frac{pi}{\nu}\right) q^{i}$$

и преобразуем ее, как и выше:

$$S(p,\mu,\nu,0) = q^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} C_{(\nu+\mu-1)-j}^{\nu-1} = q^{\mu} C_{\nu+\mu-1}^{\nu}.$$

Легко видеть, что

$$C^{\nu}_{\nu+\mu} = C^{\mu}_{\nu+\mu} = \frac{\nu+\mu}{\mu}C^{\mu-1}_{\nu+\mu-1} = \frac{\nu+\mu}{\mu}C^{\nu}_{\nu+\mu-1}.$$

Поэтому A_{-} имеет вид

$$A_{-} = \alpha_{-} p^{\nu} q^{\mu} C^{\nu}_{\nu+\mu-1} \left(1 - p \frac{\nu + \mu}{\mu} \right). \tag{2}$$

Коэффициент A_{+} получается аналогично:

$$A_{+} = \alpha_{+} p^{\mu} q^{\nu} C^{\mu}_{\nu+\mu-1} \left(1 - p \frac{\nu + \mu}{\nu} \right).$$
 (3)

Отметим, что в силу $\mu = \nu + \gamma \geqslant \nu$ коэффициент $A_- > 0$, если $p \leqslant 0.5$. Однако $A_+ > 0$ только в том случае, если

$$p < \frac{\nu}{\nu + \mu} = \frac{\nu}{2\nu + \gamma} < \frac{1}{2}.$$
 (4)

Этот порог важен: для надежных узлов повышение обоих видов штрафа делает репликацию более выгодной, тогда как для менее надежных узлов — не удовлетворяющих условию — штраф F_+ обесценивает репликацию.

Свободный член положителен:

$$B = E_{0,0}(\nu, \gamma) - E_{0,0}(\nu + 1, \gamma) > 0.$$
 (5)

Отметим, что любой кворум ν оправдан при подходящих $F_-,\,F_+.$

Если штрафы имеют смысл собственно штрафных санкций, то при отсутствии других ограничений в ряде случаев имеет смысл «прощать» ошибки одного рода, обнуляя соответствующий штраф. В самом деле, для надежных узлов условие минимальных средних расходов при заданном кворуме определяется задачей линейного программирования

$$E_{F_-,F_\perp} \to \min,$$
 (6)

$$A_{-}F_{-} + A_{+}F_{+} \geqslant B, \quad F_{-} \geqslant 0, \quad F_{+} \geqslant 0. \quad (7)$$

Целевая функция и ограничение линейны с положительными коэффициентами: эта задача имеет решение при нулевом F_- или F_+ для любого B>0.

Сформулируем результат.

Утверждение 2. Пусть выполнено (4); то-гда базовый кворум $\nu+1$ оправдан, если $A_+F_++A_-F_->B$, где величины A_- , A_+ и В положительны и задаются формулами (2), (3) и (5) соответственно. Оптимальные значения штрафов определяются решением задачи (6)–(7), при этом $F_-F_+=0$.

Для менее надежных узлов оптимально положить $F_+=0$ и выбрать достаточно высокий F_- . В общем случае для выполнения условия $G(\nu,\gamma)>0$ (выгодность кворума $\nu+1$) необходимо, чтобы

(3)
$$\frac{F_{-}}{F_{+}} > \frac{-A_{+}}{A_{-}} = \frac{\alpha_{+}}{\alpha_{-}} \cdot \frac{p(\nu + \mu) - \nu}{\mu - p(\nu + \mu)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{\gamma}.$$
 (8)

Легко проверить, что имеет место следующее неравенство:

$$0 < \frac{p(\nu + \mu) - \nu}{\mu - p(\nu + \mu)} < 1$$
 при $\frac{\nu}{\nu + \mu} .$

Условие оправданности базового кворума при выбранном отношении $R=F_-/F_+$ имеет следующий вид:

$$F_{+} \geqslant \frac{B}{A_{-}R + A_{+}}, \quad F_{-} = RF_{+}.$$

Утверждение 3. Пусть нарушено неравенство (4); тогда базовый кворум $\nu+1$ оправдан, если $A_+F_+ + A_-F_- > B$, где величины A_- и B положительны и задаются формулами (2) и (5), а $A_+ < 0$ и определяется (3). Оптимальные значения штрафов: $F_+ = 0$ и $F_- = B/A_-$.

Дополнительная проверка

Теперь изучим вопрос о том, что может дать дополнительная проверка γ одного из ответов. Рассмотрим разность

$$G(\gamma) = E(\nu, \gamma) - E(\nu, \gamma + 1) = a_-F_- + a_+F_+ - b.$$

Коэффициент a_{-} — это просто дополнительное слагаемое

$$a_{-} = -\alpha_{-} p^{\nu} q^{\nu+\gamma} C_{2\nu+\gamma-1}^{\nu-1}, \tag{9}$$

описывающее вероятность потерять верный ответ НЕТ, когда он получен ν раз, а проверки продолжаются. Вычислим a_+ аналогично A_+ :

$$a_{+} = \alpha_{+} p^{\nu + \gamma} q^{\nu} C_{2\nu + \gamma - 1}^{\nu - 1}.$$
 (10)

Отметим, что он всегда положителен: дополнительные проверки ответа НЕТ не уменьшают вероятность получить верный ответ ДА. Свободный член положителен:

$$b = E_{0,0}(\nu, \gamma) - E_{0,0}(\nu, \gamma + 1). \tag{11}$$

Проверка оправданна, если $G(\gamma) > 0$, что влечет необходимость выполнения неравенства $a_-F_- + a_+F_+ > 0$, то есть

$$\frac{F_{-}}{F_{+}} \leqslant \frac{\alpha_{+}}{\alpha_{-}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\gamma}. \tag{12}$$

Это условие достаточно при достаточно высоких штрафах:

Утверждение 4. Пусть выполняется неравенство (4); тогда дополнительная проверка $\gamma+1$ оправданна, если $a_+F_++a_-F_->b$, где величины a_+ и b положительны и задаются формулами (10) и (11), а $a_-<0$ и определяется (9). Оптимальные значения штрафов: $F_-=0$ и $F_+=b/a_+$.

Для ненадежных узлов необходимо также обеспечить выполнение неравенства (8), поэтому штрафы должны быть достаточно велики, но при этом

$$\frac{p(\nu+\mu)-\nu}{\mu-p(\nu+\mu)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\gamma} < \frac{\alpha_{-}}{\alpha_{+}} \cdot \frac{F_{-}}{F_{+}} < \left(\frac{p}{q}\right)^{\gamma}. \tag{13}$$

Левая часть меньше правой при p < 0.5, так что это всегда возможно. Формально первое неравенство в (13) выполнено, если справедливо (4): левая часть меньше нуля. Получаем критерий оправданности кворума:

Утверждение 5. Кворум $(\nu+1,\gamma+1)$ оправдан, если выполнено (13) и $a_+F_+ + a_-F_- > b$, $A_+F_+ + A_-F_- > B$. Оптимальные значения штрафов определяет задача линейного программирования:

$$Q_{-}F_{-} + Q_{+}F_{+} + Q \to \min,$$

 $a_{+}F_{+} + a_{-}F_{-} \geqslant b,$
 $A_{+}F_{+} + A_{-}F_{-} \geqslant B.$

Здесь коэффициенты Q_-, Q_+ — вероятности ошибок первого и второго рода, а

$$Q = E_{0,0}(\nu + 1, \gamma + 1).$$

Существование неотрицательного решения следует из того факта, что существуют отношения F_-/F_+ , удовлетворяющие (13); это эквивалентно существованию таких положительных F_- , F_+ , что левые части ограничений задачи положительны. Тогда можно выбрать (достаточно большие при заданном отношении) значения, удовлетворяющие ограничениям. Коэффициенты целевой функции положительны, то есть она возрастает по каждому аргументу. Таким образом, для положительной разрешимости задачи достаточно существование хотя бы одной допустимой точки с положительными координатами, что выполняется.

Динамику оптимальных штрафов и соответствующей средней стоимости показывает таблица 3 (во всех случаях $F_-=0$, средняя стоимость E_{0,F_+} отличается для разных α_- в пределах единицы, в таблице приведены ее значения для $\alpha_-=0.5$). Пример показывает, что целесообразна одна дополнительная проверка априори более вероятного и менее ценного ответа (с целью уменьшить вероятность более дорогой ошибки).

Отметим, что на практике «ненадежность» в смысле нарушения неравенства (4) означает при небольших p значительную разницу γ

между количеством проверок для разных ответов и, следовательно, очень высокое значение штрафа F_+ , если такой кворум оправдан. Например, при вероятности ошибки p=0.1 и кворуме $\nu=2$ «ненадежность» означает $\mu\geqslant 19$, что оправданно лишь при $F_-\geqslant 2\cdot 10^4$, $F_+\geqslant 4.9\cdot 10^{19}$. При меньших p значения штрафов еще выше.

 $\it Tаблица~3.$ Динамика оптимальных штрафов при $p=0,1;~\alpha_-=0,1;~0,5;~0,9$

| ν | μ | | $10^3 \cdot F_+$ | | E_{0,F_+} |
|-------|-------|---------|------------------|------|-------------|
| 2 | 2 | 9, | 1,8, | 1 | 14,1 |
| 2 | 3 | 0,29, | 0,05, | 0,02 | 6,0 |
| 2 | 4 | 3,7, | 0,58, | 0,2 | 8,4 |
| 3 | 3 | 76,2, | 15,2, | 8,5 | 31,6 |
| 3 | 4 | 2,65, | 0,46, | 0,2 | 14,1 |
| 3 | 5 | 23,6, | 3,9, | 1,75 | 19,7 |
| 4 | 4 | 714,1, | 142,8, | 16,4 | 76,0 |
| 4 | 5 | 21,4, | 3,9, | 1,99 | 31,6 |
| 4 | 6 | 179,37, | 32,7, | 16,4 | 45,9 |

Заключение

В работе получены условия оптимальности кворумов при решении задач распознавания в вычислительной системе в зависимости от надежности узлов системы и штрафов — дополнительных потерь в случае получения неверного ответа.

Работа поддержана грантом РФФИ № a-13-07-00008 и Программой стратегического развития ПетрГУ. Расчеты производились с использованием Perl Data Language [5].

Литература

1. Ивашко Е. Е., Никитина Н. Н. Использование BOINC-грид в вычислительноемких науч-

- ных исследованиях // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2013. Т. 11. Вып. 1. С. 53-57.
- 2. Ben-Yehuda O. A., Schuster A., Sharov A., Silberstein M., Iosup A. ExPERT: Pareto-Efficient Task Replication on Grids and a Cloud // Parallel & Distributed Processing Symposium (IPDPS). 2012. P. 167–178.
- 3. Foster I., Kesselman C., Tuecke S. The Anatomy of the Grid: Enabling Scalable Virtual Organizations // International J. Supercomputer Applications. 2001. Vol. 15, N. 3. P. 200–222.
- 4. Ghare G. D., Leutenegger S. T. Improving Speedup and Response Times by Replicating Parallel Programs on a SNOW // Job Scheduling Strategies for Parallel Processing. Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3277. P. 264–287.
- 5. Glazebrook K., Economou F. PDL: The Perl Data Language // Dr. Dobb's Journal. Vol. 22. N. 9. 1997. http://www.ddj.com/184410442 (дата обращения: 19.08.2013).
- 6. Jimènez-Peris R., Patiño-Martìnez M., Alonso G., Kemme B. Are quorums an alternative for data replication? // ACM Transactions on Database Systems (TODS) TODS Homepage archive. 2003. Vol. 28. Issue 3. P. 257–294.
- 7. Kondo D., Chien A., Casanova H. Scheduling task parallel applications for rapid turnaround on enterprise desktop grids // J. Grid Computing. 2007. Vol. 5. P. 379–405.
- 8. Sangho Y., Kondo D., Bongjae K. Using replication and checkpointing for reliable task management in computational Grids // International Conference on High Performance Computing and Simulation. 2010. P. 125–131.
- 9. Storm C., Theel O. A general approach to analyzing quorum-based heterogeneous dynamic data replication schemes // Distributed Computing and Networking. Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5408. P. 349–361.
- 10. boinc.ru (дата обращения: 21.10.2013).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чернов Илья Александрович

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск Республика Карелия, Россия, 185910 доцент

Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: chernov@krc.karelia.ru

тел.: (8142) 766312

Chernov, Ilya

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: chernov@krc.karelia.ru tel.: (8142) 766312 УДК 551.465.45

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ДИНАМИКИ БЕЛОГО МОРЯ

И. А. Чернов^{1,2}, А. В. Толстиков³

Описана численная модель крупномасштабной гидротермодинамики Белого моря, основанная на модели Северного Ледовитого океана. Показано, что результаты расчетов качественно согласуются с общепринятой картиной трехмерной крупномасштабной циркуляции Белого моря.

 ${\rm K}$ лючевые слова: численное моделирование, крупномасштабная циркуляция, Белое море.

I. A. Chernov, A. V. Tolstikov. NUMERICAL MODELLING OF THE WHITE SEA LARGE-SCALE DYNAMICS

The numerical model of large-scale hydro- and thermal dynamics of the White Sea is described. The model is based on the model of the Arctic Ocean. We show that the numerical simulation qualitatively coincides with the generally accepted three-dimensional large-scale circulation of the White Sea.

Key words: numerical modelling, large-scale circulation, the White Sea.

Введение

Интерес к изучению Белого моря обусловлен рядом уникальных особенностей этого водоема, его важностью для Российской Федерации (оно целиком входит в территориальные воды России), большим объемом накопленных данных наблюдений, множеством проблем и вопросов экономического, экологического, океанологического характера [1]. Математическое и компьютерное моделирование гидродинамики, термодинамики, экосистемы моря позволяет извлечь максимум информации из данных наблюдений, существенно сократить расходы, оценить величины, трудно поддающиеся измерению, дать прогноз. Численные эксперименты позволяют оценивать степень влияния тех или иных факторов на морскую систему, причем это актуально, когда натурный эксперимент затруднен, невозможен или требует неоправданно большого времени.

Бурное развитие вычислительных средств в последние два десятилетия существенно расширило возможности математического моделирования. На фоне интенсивного развития моделирования океана [5] были разработаны термогидродинамические модели Белого моря [1, 6, 7, 12] (там же подробный обзор исследований, посвященных Белому морю), а также общие модели крупномасштабной гидродинамики крупных водоемов, соответствующие численные методы и программное обеспечение (см., например, [4]). Нелинейное взаимодействие динамических процессов существенно для Белого моря [4, 13], что требу-

¹Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН,

 $^{^2}$ Π етрозаводский государственный университет,

³Институт водных проблем Севера Карельского научного центра РАН

ет разработки комплексных гидродинамических численных моделей высокого разрешения и предъявляет серьезные требования к вычислительной эффективности алгоритмов и производительности вычислительных устройств.

В настоящее время не существует (и в ближайшем будущем, вероятно, не возникнет) общепринятой модели абстрактного водоема, применимой к любому реальному водоему и превосходящей все другие модели по основным показателям. Различные усреднения, допущения, масштаб, параметризация подсеточных процессов, описание компонент системы, выбор граничных условий — все эти различия влияют на качество моделей в форме краевых задач. Дискретизация также может выполняться различными методами, и правильнее говорить о дискретной модели моря. Явная либо неявная схема аппроксимации динамических процессов, к примеру, радикально влияет на вычислительную сложность задачи и опосредованно — на результат. Наконец, численные реализации даже одной и той же модели могут различаться: например, описание вешественных величин как чисел одинарной точности может стать непригодным при увеличении разрешения. Увеличение разрешения уменьшение шагов пространственной сетки может привести к необходимости явного описания подсеточных процессов, которые ранее учитывались через параметризации либо игнорировались. Все сказанное означает, что моделей крупного водоема должно быть (и, как правило, есть) несколько, а проекты по сравнению моделей (например, АОМІР [15]) являются актуальными. Известна модель Белого моря И. А. Неелова [12] и система оперативного мониторинга Е. В. Семенова [6]. Мы используем и развиваем модель Белого моря на базе модели крупномасштабной термо- и гидродинамики Северного Ледовитого океана, разработанную в ИВМ РАН (Н. Г. Яковлев) [8].

Работа посвящена апробации модели путем качественного сравнения модельных полей с известными закономерностями распределения температуры и солености воды, течений, льда.

Средняя глубина Белого моря не превышает 70 м при максимальной 340 м. Малые глубины повышают роль рельефа дна, который существенно влияет на гидродинамику. Размер моря невелик: оно лежит между 63°42′ и 68° северной широты и между 31° и 45° восточной долготы. В море доминируют приливные движения, связанные с приливной волной, приходящей из Баренцева моря. С приливом связан динамический процесс нарушения и восстановления квазигеострофического

режима [4], классическая схема течений Белого моря и волна Кельвина. Летом море полностью освобождается ото льда. Нелинейное взаимодействие динамических процессов существенно для Белого моря [1, 2, 4], в связи с чем методы линеаризации и использование суперпозиции (моделирование процессов по отдельности) теряют актуальность. Все эти особенности необходимо учитывать при моделировании.

Численная модель Белого моря

Модельная область — подмножество прямого произведения подмножества сферы (акватории) на отрезок. Область ограничена дном моря (сведения о батиметрии предоставлены ЕТОРО [10], они же определяют береговую линию); боковой твердой границей, состоящей из границы воды и суши; «жидкой границей», разделяющей Белое и Баренцево моря и отделяющей устья рек; наконец, свободной поверхностью моря с линеаризованным кинематическим условием. На жидких границах необходимы значения температуры и солености воды (условия I рода для втекающей воды и условие излучения для вытекающей), а также нормальная компонента скорости и/или внешний уровень моря (скорость течения на границе вычисляется из условия Флезера [11]).

Система координат определяется (восточной) долготой (ось абсцисс направлена на восток), дополнением широты до 90° (ось ординат направлена на юг) и глубиной, отсчитываемой от среднего уровня моря вертикально вниз. Система координат не повернута, поскольку полюс не входит в модельную область. За жидкую границу Белого и Баренцева морей принята координатная линия $y \approx 67^{\circ}29'$ с. ш.). Шаги горизонтальной сетки составляют 0,074° широты и 0,246° долготы, что не превышает 10 км; эти величины определяются числом узлов сетки: акватория моря вписана в квадрат 50 × 50 точек. Вертикальная сетка состоит из 16 неравноотстоящих уровней со сгущением у поверхности моря. Шаг по времени — 6 мин.

Задача решается в «естественных» переменных: скорости течений и дрейфа льда, давление или уровень моря, термохалинные поля, распределение льда.

Лед описан оригинальной моделью проф. Н. Г. Яковлева [8] как двумерная сплошная среда с распределением массы по толщине. Учитывается, в частности, снежный покров на льду и торошение.

Программная реализация модели функционирует на кластере КарНЦ РАН [9] в многопользовательском режиме.

Прилив задается как гармоническое колебание внешнего уровня моря на жидкой границе. Важность индуцированных приливов в Белом море делает условие «твердой крышки» неадекватным: на свободной поверхности моря ставится линеаризованное кинематическое условие. Реки реализованы как пресноводные проливы, скорость на жидкой границе вычисляется по известному расходу реки, температура задана. Учитывается сток четырех рек: Северной Двины, Мезени, Онеги и Кеми.

Температура, влажность и давление воздуха, а также осадки, ветер и облачный покров извлекаются из данных реанализа NCEP [14]. Влажность может вычисляться по эмпирической формуле; ветер также может определяться по давлению как квазигеострофический, но численные эксперименты выявили неадекватность такого приближения для Белого моря: скорость ветра получается завышенной.

Значения температуры и солености на жидкой границе играют важную роль, определяя средние значения термохалинных полей в море; вместе с тем имеются лишь данные эпизодических измерений в Воронке. С этим связано отсутствие количественного совпадения расчетных полей с наблюдаемыми. Остроту проблемы можно снизить, отдаляя жидкую границу от географической границы Белого моря или даже проводя расчет по всей акватории Мирового океана на грубой сетке: при этом существенно возрастает размерность задачи, однако отсутствуют жидкие границы. Другой подход связан с усвоением данных наблюдений и коррекцией расчетных полей на их основе. Фактически получается обратная задача оценки полей на жидкой границе по данным наблюдений.

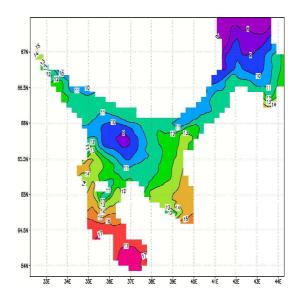
В модели не предусмотрен контроль за балансом солености: приливная волна вносит соленую воду из Баренцева моря, тогда как реки распресняют заливы, в которые впадают, и сохранение солености в среднем не гарантировано. Выполнение баланса солености в климатическом масштабе времени (десятки лет) свидетельствует об адекватности модели.

Начальные значения всех вычисляемых полей должны быть заданы. По умолчанию задаются равномерные в горизонтальной плоскости стратифицированные поля температуры и солености. Лед отсутствует, поле скорости нулевое. Различные численные эксперименты подтверждают малое влияние начальных распределений на динамику моря в модели [4, 6], обусловленное доминированием в водоеме индуцированного прилива. Например, при расчетах на 30 лет (климатическая норма) при постоянной и линейно стратифицированной начальной температуре и солености ряды среднесуточной средней по объему моря температуры имеют корреляцию свыше 0,9998.

Выходными данными являются осредненные поля скорости течения, температуры и солености воды, распределений массы и сплоченности льда и массы снега по градациям толщины, скорости дрейфа льда, а также уровня моря. Осреднение проводится за один месяц; возможно осреднение за сутки или произвольно выбранный период, а также вывод мгновенных значений расчетных полей. Расчетные данные сохраняются в стандартном формате netCDF, совместимом с большинством современных средств визуализации геофизических данных, в частности, со свободно распространяемым пакетом GrADS, применяемым нами для построения карт расчетных полей.

Сравнение результатов расчетов с наблюдениями

Модельные расчеты крупномасштабной термогидродинамики Белого моря проводились за период 30 лет (1961–1990 гг., климатическая норма по данным Всемирной метеорологической организации) с историческим форсингом NCEP для сравнения расчетных полей с наблюдаемыми и выяснения, воспроизводится ли крупномасштабная картина течений, термохалинная структура вод, динамика ледяного покрова. Среднемесячные поля для разных лет мало различаются (за исключением сильных отклонений ветра от климатического среднего в отдельные годы), поэтому далее указываем только месяц.



 $Puc.\ 1.\$ Поле температуры на поверхности, июнь

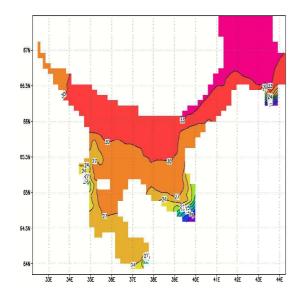
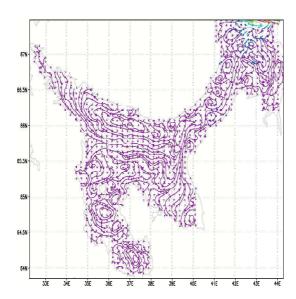


Рис. 2. Поле солености на поверхности, июнь



Puc. 3. Течения на поверхности, среднее за год

На рис. 1, 2 приведены поля температуры и солености воды на поверхности в июне. Они согласуются с наблюдениями [2] и расчетами по другим моделям [1]: имеет место прогрев воды в мелководных заливах, геострофический перенос температуры и солености из Баренцева моря вдоль Терского берега, квазипостоянный апвеллинг в проливе Восточная Соловецкая салма, стоковые фронты в устьях рек. Картина распределения фронтов соответствует средней, полученной по данным многолетних наблюдений [1. С. 162–163]. С глубиной температура воды изменяется в согласии с измерениями, хотя расхождение в придонном горизонте выше, чем вблизи поверхности могометствуют сольства в согласии с измерениями, чем вблизи поверхности могометствуются в согласии с измерениями, чем вблизи поверхности могомется в согласии с измерениями.

ря. Однако разница солености в поверхностном слое и в придонном горизонте пока существенно меньше реальной.

Картина течений в море обусловлена в основном приливом [1, 3, 4], хотя и ветровые течения могут играть серьезную роль. Модель воспроизводит (на рис. 3 — среднегодовая картина течений) циклонический круговорот в Бассейне, в Кандалакшском и Онежском заливах, а также антициклонический вихрь у Летнего берега, обусловленный стоком Северной Двины, причем в марте он выражен слабее. Заметно и разделение течения, исходящего из Двинского залива, на две ветви: одна уходит в Горло, другая вливается в циклонический круговорот Бассейна. Все это согласуется с данными наблюдений и расчетами по другим моделям [1, 2, 4]. Расчеты без учета ветра приводят к регулярной картине устойчивых течений с циклоническим круговоротом в Бассейне.

Динамика ледяного покрова в модели также соответствует реальной картине (рис. 4, 5). Ледообразование начинается в декабре, при этом лед распространяется от вершин заливов в сторону центральной части моря. В марте во всем море, кроме западных областей, преобладают тонкие белые льды (30–70 см), которые смещаются под действием ветров в восточные и центральные районы моря. У Карельского и Поморского берегов образуются участки открытой воды. Очищение моря ото льда идет в мае, последние льды наблюдаются в Воронке (это связано с их выносом в этот район и торошением), окончательное исчезновение льда происходит в начале июня. Рисунки хорошо согласуются с данными из [1. С. 183].

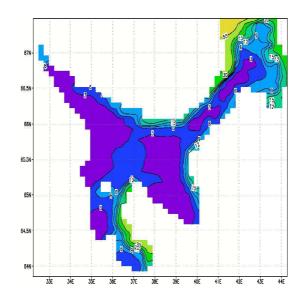
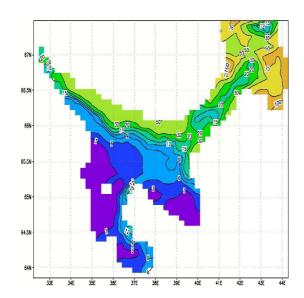


Рис. 4. Распределение толщины льда, январь



Puc. 5. Распределение толщины льда, март

С помощью модели были проведены численные эксперименты: расчет температуры Белого моря в климатическом масштабе времени с вариациями одного из факторов атмосферного блока. В численном эксперименте сравнивалась средняя (по объему моря и за сутки) температура воды за 30 лет (климатическая норма Всемирной метеорологической организации) при одинаковых условиях, но температура воздуха T_a была завышена и занижена на один градус, а также изменена по формуле $T_{a'} = T_a + \operatorname{sgn} T_a$. В другом эксперименте рассматривалось влияние количества облачности на температуру воды моря в реальных условиях по данным NCEP, сплошной облачности, отсутствии облачности, сплошной облачности зимой при ее отсутствии летом (дни с 90-го по 274-й). Корреляционные матрицы температуры поверхности моря не содержат элементов менее 0,992. Эксперимент показал, что модельная температура поверхностного слоя слабо реагирует на вариации приповерхностной температуры воздуха. Этот же вывод справедлив для искусственного изменения количества облачности в модели. Систематическое завышение или занижение температуры приводит к сравнимому изменению температуры воды, при том, что другие поля реагируют еще слабее. Даже относительно сильное возмущение температуры воздуха, $\pm 5^{\circ}$, приводит к корреляциям не менее 0.96 (это корреляция между результатами расчетов для завышенной и заниженной температуры воздуха, а корреляция между возмущенным решением и исходным рядом превышает 0,98). При этом средние значения для

исходной, завышенной и заниженной температуры воздуха равны соответственно 3,5°; 5,7° и 1,7°. Все сказанное свидетельствует о том, что модель моря устойчива по отношению к вариациям атмосферного форсинга. Толщина и площадь ледяного покрова, разумеется, более чувствительны к вариациям температуры воздуха; однако корреляции все же достаточно велики: в табл. 1, 2 приведены корреляционные матрицы для толщины и площади льда.

Tаблица 1. Корреляции и средние рядов максимальной толщины льда за сутки при наблюдаемой температуре воздуха T_a , при $T_a + 5^\circ$ и $T_a - 5^\circ$.

| | T_a | $T_a - 5$ | $T_a + 5$ |
|-------------|-------|-----------|-----------|
| T_a | 1,00 | 0,84 | 0,73 |
| $T_a - 5$ | 0,84 | 1,00 | 0,63 |
| $T_a + 5$ | 0,73 | 0,63 | 1,00 |
| Среднее, см | 60 | 96 | 26 |

 $Tаблица\ 2.$ Корреляции и средние рядов площади льда на конец каждого месяца при наблюдаемой температуре воздуха T_a , при T_a+5° и T_a-5° .

| | T_a | $T_a - 5$ | $T_a + 5$ |
|---------------------------------|-------|-----------|-----------|
| T_a | 1,00 | 0,90 | 0,92 |
| $T_a - 5$ | 0,90 | 1,00 | 0,75 |
| $T_a + 5$ | 0,92 | 0,75 | 1,00 |
| Среднее, 10^3 км ² | 17 | 25 | 8, 5 |

Таким образом, расчеты по численной модели Белого моря, основанной на модели Северного Ледовитого океана, согласуются с общепринятой картиной трехмерной крупномасштабной циркуляции Белого моря [2], а модель устойчива по отношению к возмущениям метеорологических данных и начальных термохалинных полей. В перспективе, моделируя состояние атмосферы над акваторией и водосбором Белого моря, можно будет рассматривать изменчивость гидрофизических характеристик моря при различных сценариях изменения климата.

Работа выполнена при поддержке гранта $P\Phi\Phi M$ № 13-05-98802-р-север-а и Программы стратегического развития ПетрГУ.

Литература

- 1. *Белое море* и его водосбор под влиянием климатических и природных факторов / Ред. Н. Н. Филатов, А. Ю. Тержевик. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2007. 349 с.
- 2. *Белое море*. Справочник «Моря СССР». Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР.

- Т. II. Вып. 1. Гидрометеорологические условия. Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 240 с.
- 3. Дианов М. Б. и др. Результаты гидродинамического моделирования полусуточных приливов в Белом море. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР. 1990. 20 с.
- 4. Саркисян А. С. и др. Математические модели циркуляции океанов и морей // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Том 2: Математическое моделирование / Отв. ред. В. П. Дымников. М.: Наука. 2005. С. 174–278.
- 5. Саркисян А. С. Полвека численному моделированию бароклинного океана // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 1. С. 6–20.
- 6. Семенов Е. В. Численное моделирование динамики Белого моря и проблема мониторинга // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40, № 1. С. 128–141.
- 7. Семенов Е. В., Лунева М. В. О совместном эффекте прилива, стратификации и вертикального турбулентного перемешивания на формирование гидрофизических полей в Белом море // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 5. С. 660–678.
- 8. Яковлев Н. Г. Воспроизведение крупномасштабного состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана в 1948-2002 гг. Часть 1: численная модель и среднее состояние // Изве-

- стия РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45, №3. С. 1–16.
- 9. *ЦКП* КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных»: http://cluster.krc.karelia.ru (дата обращения: 13.11.2013).
- 10. Amante C., Eakins B. W. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, 19 pp.
- 11. Flather R. A. A tidal model of the northwest European continental shelf // Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege. 1976. Vol. 6(10). P. 141–164.
- 12. Neelov I. A., Savchuk O. P. 3-D IO RAS-AARI Coupled Hydrodynamic-biogeochemical Model of the White Sea (Final report of INCO-Copernicus Project «WHITESEA» No. ICA2-CT-2000-10014: «Sustainable management of the marine ecosystem and living resources of the White Sea»). 2003. 220 p.
- 13. Zimin A. V. Internal waves on the White Sea shelf according to observations // Earth and Environmental Science. Oceanology. 2012. Vol. 52, N 1. P. 11–20
- 14. NCEP/NCAR Reanalysis: http://www.esrl. noaa.gov (дата обращения: 31.08.2013).
- 15. The Arctic Ocean Model Intercomparison Project: http://www.whoi.edu/page.do?pid=29836 (дата обращения: 31.08.2013).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Чернов Илья Александрович

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н. Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск Республика Карелия, Россия, 185910 доцент

Петрозаводский государственный университет пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910 эл. почта: chernov@krc.karelia.ru тел.: (8142) 766312

Толстиков Алексей Владимирович

научный сотрудник, к. г. н. Институт водных проблем Севера Карельского научного центра РАН пр. А. Невского, д. 50, Петрозаводск Республика Карелия, Россия, 185030 эл. почта: alexeytolstikov@mail.ru тел.: (8142) 576381

Chernov, Ilya

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia Petrozavodsk State University 33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: chernov@krc.karelia.ru tel.: (8142) 766312

Tolstikov, Alexey

Northern Water Problems Institute, Karelian Research Center, Russian Academy of Sciences 50 A. Nevsky St., 185030 Petrozavodsk, Karelia, Russia e-mail: alexeytolstikov@mail.ru tel.: (8142) 576381 УДК 519.115:519.2

АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ НЕРАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ

Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин, А. В. Колчин

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

В общей схеме размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам и в частном случае схемы без пустых ячеек проводятся следующие исследования. Для общего числа исходов частной схемы выписано рекуррентное соотношение, и по нему получена явная точная формула для него. Выявлена связь чисел исходов в общей и частной схемах. Описан случайный процесс последовательного размещения по одной частице по ячейкам, на основании которого приводится алгоритм решения задачи перечислительной комбинаторики представления всех возможных исходов размещения фиксированного числа частиц по ячейкам в схеме и получения распределения их вероятностей. Предложены разные способы моделирования состояний схемы и приближенного нахождения числа ее исходов методом стохастического моделирования.

Kлючевые слова: перечислительные задачи комбинаторного анализа, схема размещения.

N. Yu. Enatskaya, E. R. Khakimullin, A. V. Kolchin. ANALYSIS OF A SCHEME OF ALLOCATING INDISTINGUISHABLE PARTICLES TO INDISTINGUISHABLE CELLS

The following investigations are carried out in the general scheme of allocation of indistinguishable particles to indistinguishable cells and in the particular scheme with no empty cell allowed. A recurrence relation is found for the total number of outcomes of the particular scheme and an explicit expression for it is obtained. A relation between the numbers of outcomes of the general and particular schemes is found. A random process of successive allocation of a single particle to cells which provides us with an algorithm for solving the combinatorial problem and finding all the outcomes of allocation of a fixed number of particles to cells in the scheme under consideration and finding the distribution of their probabilities is described. Various methods to simulate the states of the scheme and approximate the number of its outcomes by means of stochastic simulation techniques are suggested.

Key words: enumerative combinatorics, allocation scheme.

1. Введение

Комбинаторные задачи и методы занимают значительное место в исследованиях по теории вероятностей. В последние десятилетия замет-

ные усилия были направлены на изучение задач о случайном размещении частиц по ячей-кам, где r дробинок независимо друг от друга бросают в n ящиков. Внимание к задачам о

размещении частиц является отражением общего повышения интереса к комбинаторным задачам, который вызван в том числе возросшими перечислительными возможностями вычислительных машин. Задачи изучения случайных размещений частиц по ячейкам возникают в статистической физике, вычислительной технике, теории автоматов, в математической физике, астрономии и биологии, и не раз независимо переоткрывались многими авторами в различных теоретических и прикладных исследованиях.

1.1. Вид результата размещения частиц по ячейкам

Пусть n — число ячеек в рассматриваемой схеме. Результаты размещения в схеме размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам описываются векторами вида $\bar{\mu}_r = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r)$, где r — число частиц, μ_i — число ячеек, содержащих ровно по i частиц после размещения r частиц по n ячейкам, так что справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{r} \mu_i = n, \qquad \sum_{i=1}^{r} i\mu_i = r.$$

Результат размещения можно также представить в виде вариационного ряда заполнений ячеек вида $(0,\ldots,0,1,\ldots,1,\ldots,r)$, где число значений i есть $\mu_i,\ i=0,\ldots,r$. В частном случае схемы без пустых ячеек $\mu_0=0$.

1.2. Сравнение схем размещения неразличимых частиц по различимым и неразличимым ячейкам

В нашей схеме размещения с неразличимыми ячейками исходы описываются векторами $\bar{\mu}_r$, в то время как в схеме размещения с различимыми ячейками они определяются различными заполнениями ячеек с учетом их порядка. Поэтому число исходов $N^* = N^*(r,n)$ в нашей схеме меньше, чем число исходов $N_1 = N_1(r,n)$ в схеме размещения с различимыми ячейками за счет того, что каждому фиксированному исходу, описываемому вектором $\bar{\mu}_r$ в рассматриваемой нами схеме, соответствует $n!/\prod_{i=0}^r \mu_i!$ исходов в схеме размещения с различимыми ячейками.

1.3. Изменение вектора $\bar{\mu}_k$ при добавлении одной частицы

Опишем отличие вектора $\bar{\mu}_{k+1}$ от вектора $\bar{\mu}_k$ при размещении по n ячейкам после k еще одной частицы. Оказывается, что при этом в векторе $\bar{\mu}_k$ будут изменяться на единицу ровно две соседних компоненты, причем левая будет уменьшаться на единицу, а правая — увеличиваться на единицу. В силу неотрицательности

компонент векторов $\bar{\mu}_k$ и $\bar{\mu}_{k+1}$ число разных векторов $\bar{\mu}_{k+1}$, получающихся из данного вектора $\bar{\mu}_k$, будет равняться числу его ненулевых компонент, причем это число в векторе $\bar{\mu}_{k+1}$, по сравнению с вектором $\bar{\mu}_k$, при попадании добавленной частицы в ячейку с i частицами, в зависимости от значений компонент вектора $\bar{\mu}_k$,

- а. не изменяется при $\mu_i > 1$, $\mu_{i+1} > 0$;
- б. увеличивается на 1 при $\mu_i > 1$, $\mu_{i+1} = 0$;
- в. уменьшается на 1 при $\mu_i = 1, \, \mu_{i+1} > 0.$

Нетрудно видеть, что из разных векторов $\bar{\mu}_k$ при добавлении одной частицы могут получаться одинаковые векторы $\bar{\mu}_{k+1}$. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Пусть n=4, тогда $\bar{\mu}_5=(0,3,1,0,0,0)$, и $\bar{\mu}_5=(1,2,0,1,0,0)$ приводят к вектору $\bar{\mu}_6=(0,3,0,1,0,0,0)$ при попадании частицы в первом случае в ячейку с двумя частицами, а во втором — в пустую.

2. Точное вычисление чисел исходов в общей и частной схемах размещения частиц по ячейкам

2.1. Связь чисел исходов в общей и частной схемах размещения

Число исходов $N^*=N^*(r,n)$ в общей схеме может быть получено из числа N=N(r,n) частной схемы без пустых ячеек. Для этого предлагается следующая процедура: к данным r частицам добавим n частиц, тем самым получив $r^*=r+n$ частиц, которые разместим по n ячейкам без пустых ячеек $N(r^*,n)=N(r+n,n)$ способами. После этого извлечем из каждой ячейки по одной частице, отчего число размещений не изменится и снова будет равно N(r+n,n). Отсюда получаем, что

$$N^*(r, n) = N(r + n, n).$$
 (1)

2.2. Рекуррентная формула для N = N(r, n)

Для N=N(r,n) найдем рекуррентное соотношение с помощью деления всей совокупности N исходов частной схемы на две, численности которых зависят от меньших значений параметров, чем исходные r и n. K первой совокупности отнесем те исходы из N(r,n), в которых минимальное заполнение ячеек равно 1; их число равно N(r-1,n-1), и они получаются, если в любую ячейку положить одну частицу, а остальные r-1 частиц разместить по той же схеме по остальным n-1

ячейкам. Ко второй отнесем те исходы, в которых минимальное заполнение ячеек строго превосходит 1; их число равно N(r-n,n), и они получаются, если во все ячейки положить по одной частице, а остальные r-n частиц разместить по n ячейкам по той же схеме. Таким образом, приходим к рекуррентной формуле

$$N(r,n) = N(r-1,n) + N(r-n,n), (2)$$

где числа N(r,n) обладают при $r,n\geqslant 0$ следующими очевидными свойствами:

- 1. N(r,r) = 1;
- 2. N(r, n) = 0 при r < n;
- 3. N(r,0) = 0:
- 4. N(r,1) = 1.

Используя приведенные выше свойства чисел N(r,n), называемые далее предельными, проводим по (2) такое число итераций по каждой ветви рекурренты (2), которое приводит к предельным значениям слагаемых. При этом, в общем случае, длины ветвей рекурренты до достижения предельных значений по свойствам 1—4 различны.

Пример 2. Пусть r = 7, n = 3. Тогда по (2) получаем, что

$$\begin{split} N(7,3) &= N(6,2) + N(4,3) &= \\ &= N(5,1) + N(4,2) + \\ &+ N(3,2) + N(1,3) &= \\ &= 1 + N(3,1) + N(2,2) + N(2,1) + \\ &+ N(1,2) + 0 &= \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 4. \end{split}$$

Элементарный перебор исходов схемы дает следующие различные заполнения ячеек, без пустых, с учетом неразличимости ячеек: $(1,1,5),\ (1,2,4),\ (1,3,3),\ (2,2,3),\$ что соответствует векторам

$$\begin{split} \bar{\mu}_7 &= (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7) \\ &\in \big\{ (0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\ &\quad (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0), \\ &\quad (0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0), \\ &\quad (0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0) \big\}, \end{split}$$

иными словами, получаем четыре варианта, как и по рекуррентной формуле (2).

2.3. Точная формула для N = N(r, n)

Вывод явной формулы для N(r,n) проведем на основе рекуррентного соотношения (2) и закономерностей его применения при многократных итерациях с понижением значений параметров r и n до получения предельных значений.

Замечание 1. При получении явной формулы для числа N(r,n) будем считать, что его предельные значения по параметрам достигаются на одной и той же m-й итерации по всем ветвям рекурренты (2), несмотря на то что при численном ее применении для расчета числа N(r,n) это не всегда так (см. пример 2), поскольку ветви рекурренты могут заканчиваться по свойствам 1—4 числа N. Тем не менее наше допущение выполняется, если формально применять рекуррентную формулу (2) к числам N(r, n), уже достигшим предельных значений, для чего доопределим свойства чисел N(r,n) для параметров r и n, допускающих значения, меньшие или равные нулю, следующим образом:

1a.
$$N(r,r) = 1, r \ge 0$$
;

2a.
$$N(r, n) = 0, r < n$$
;

3a.
$$N(r,n) = 0, n \le 0, r + n \ne 0$$
;

4a.
$$N(r, 1) = 1$$
.

Это значит, что количества итераций по всем ветвям рекурренты (2) могут быть взяты равными.

Введем индикаторную функцию

$$I(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ 1, & z \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда искомое число N, с учетом свойств 1а–4а и рекуррентной формулы (2), может быть представлено в виде

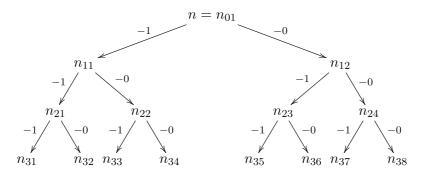
$$N(r,n) = \sum_{j=1}^{2^m} I(r_{mj} - n_{mj}), \tag{3}$$

где

$$m = \min \left\{ i: \sum_{j=1}^{2^{i}} (n_{ij} - 1)(r_{ij} - n_{ij})I(r_{ij} - n_{ij}) = 0 \right\}, \quad (4)$$

и где r_{ij} и n_{ij} есть соответственно значения параметров r и n в j-м слагаемом по рекуррентной формуле (2) при i-й итерации. Для единства обозначений положим

$$r = r_{01}, \qquad n = n_{01}.$$



Puc. 1. Схема 1

Формула (4) дает способ нахождения числа m путем проверки для каждого $i=1,2,\ldots$ условия

$$\sum_{i=1}^{2^{i}} (n_{ij} - 1)(r_{ij} - n_{ij})I(r_{ij} - n_{ij}) = 0, \quad (5)$$

при первом выполнении которого получаем число m, равное последнему значению i.

Таким образом, задача сводится к построению явных формул для вычисления параметров r_{mj} и n_{mj} , участвующих в формуле (3), для чего требуется находить значения r_{ij} и n_{ij} и для i < m, причем с учетом характера ветвления рекурренты (2) на два слагаемых; на i-й итерации индекс j меняется от 1 до 2^i .

Для выявления закономерностей при применении рекуррентной формулы (2) приведем схемы изменения каждого из параметров r и n в слагаемых при последовательных итерациях рекурренты (2). Начнем с более простой схемы 1 (рис. 1) для параметра n_{ij} . Для этого по вертикали (сверху вниз) представим параметры n_{ij} по мере проведения итераций, а по горизонтали — его последовательные обозначения в слагаемых рекуррентного соотношения в порядке его применения. На стрелках схемы перехода к следующей итерации укажем действия для пересчета параметра n_{ij} .

Будем рассматривать схему 1 как граф переходов из состояния n_{01} во все другие возможные по рекурренте (2) состояния n_{ij} . Всем правым переходам (ребрам) в графе поставим в соответствие нули, а левым — единицы. Тогда переход по (2) из состояния n_{01} в любое возможное состояние на m-м уровне (то есть на m-й итерации) можно представить траекторией $(T_m) = (T_m)_2$ в виде последовательности нулей и единиц в соответствии с числами

на последовательных ребрах траектории от состояния n_{01} до состояния n_{mj} , а полученная последовательность (T_m) будет представлять собой двоичную запись числа $2^m - j$, где j — номер состояния на m-м уровне. По схеме 1 пересчета значения n_{mj} из $n = n_{01}$ с учетом операций, указанных на схеме по итерациям рекурренты, следует, что для вычисления значения n_{mj} из начального значения n нужно вычесть столько единиц, сколько их имеется в траектории графа от состояния $n = n_{01}$ до состояния n_{mj} , то есть число единичных разрядов двоичной записи числа $2^m - j$. Отсюда получаем формулу для вычисления n_{mj} :

$$n_{mj} = n - S_{2^m - j}, (6)$$

где S_z — сумма двоичных разрядов числа z. Покажем применение формулы (6) на примере.

Пример 3. При m=3, состояниям с номерами от 1 до 2^3 , то есть от 1 до 8, определяемым значениями параметра n_{3j} , то есть состояниям n_{31} , n_{32} , n_{33} , n_{34} , n_{35} , n_{36} , n_{37} , n_{38} , будут соответствовать траектории (111), (110), (101), (100), (011), (010), (001), (000), представляющие собой двоичные записи чисел (2^m-j) , где j— номер состояния на уровне m=3. Тогда $\{n_{3j}\}$ при $j=1,\ldots,8$ будут принимать в порядке роста индекса j значения $\{n-3,n-2,n-2,n-1,n-2,n-1,n-1,n\}$, что совпадает с результатом непосредственных вычислений по схеме 1 по указанным операциям на ребрах графа по каждой траектории.

Замечание 2. Формула (4) при замене числа m на любое i, не превосходящее m, дает возможность определять значение n_{ij} на i-й итерации.

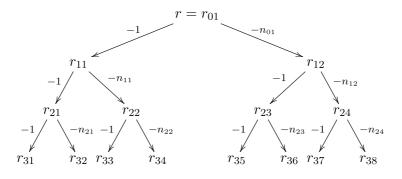


Рис. 2. Схема 2

Замечание 3. Обозначив через $(T_i) = (T_i)_2$ запись числа T_i в двоичном коде и через $(T_i)_{10}$ запись числа в десятичном коде, соответствующие траектории (T_i) до i-го уровня включительно, получаем, что номер слагаемого на i-й итерации, то есть второй индекс последнего состояния траектории (T_i) на i-м уровне, удовлетворяет равенству

$$j = 2^i - (T_i)_{10}. (7)$$

Поясним использование результата (7) на примере.

Пример 4. Пусть i=3 (см. схему 1). Тогда траектория (111) пересекает уровень i=3 по состоянию n_{3j} , где в силу (7)

$$j = 2^3 - (111)_{10} = 8 - 7 = 1;$$

траектория (110) пересекает уровень i=3 по состоянию n_{3j} , где в силу (7)

$$j = 2^3 - (110)_{10} = 8 - 6 = 2;$$

траектория (101) пересекает уровень i=3 по состоянию n_{3j} , где в силу (7)

$$j = 2^3 - (101)_{10} = 8 - 5 = 3,$$

и так далее.

Аналогично рассмотрим изменения первого параметра числа N(r,n), именно – параметра r_{ij} при последовательных итерациях рекурренты (2). Приведем соответствующую схему (аналогичную схеме 1) пересчета значений r_{ij} по итерациям рекурренты (2) с указанием операций на стрелках переходов (ребрах графа).

Снова, как и схему 1, рассматриваем схему 2 (рис. 2) как граф переходов из состояния $r = r_{01}$ во все другие возможные состояния при итерациях по рекурренте (2) и будем ставить в соответствие всем правым переходам (ребрам графа) нули, а левым — единицы. Тогда переход из состояния r_{01} в любое j-е состояние на m-м уровне r_{mj} можно представить траекторией $(T_m) = (T_m)_2$ — последовательностью нулей и единиц в порядке итераций, то есть двоичной записью числа $2^m - j$. Из схемы 2 следует, что для вычисления значения r_{mi} из начального значения $r = r_{01}$ нужно вычесть столько единиц, сколько их имеется в траектории (T_m) от r_{01} до r_{mj} , то есть число S_{2^m-j} и число вида $\sum_{k=1}^{L_m} n_{p_k-1,l_k}$, где L_m — число нулей в траектории (T_m) , $\{p_k\}$ — места нулей в траектории (T_m) , а значение l_k вычисляется по формуле (7) как точка пересечения траектории (T_m) с уровнем $p_k - 1$. То есть по (7) получаем

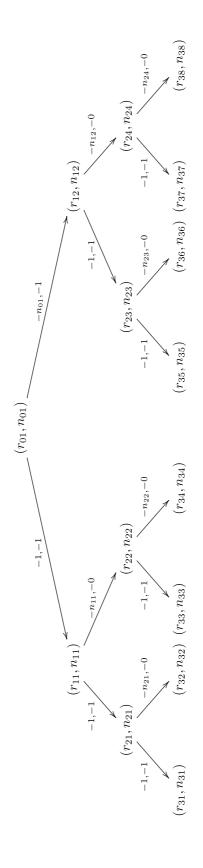
$$l_k = 2^{p_k - 1} - (T_{p_k - 1})_{10},$$

где $(T_i)_{10}$ — десятичный код числа (T_i) . Отсюда получаем, что

$$r_{mj} = r - S_{2^m - j} - \sum_{k=1}^{L_m} n_{p_k - 1, l_k},$$
 (8)

где значения n_{p_k-1,l_k} вычисляются по формуле (6).

Замечание 4. Формула (8) дает общий вид выражения для r_{ij} при замене в ней m на i, а L_m — на L_i .



Puc. 3. Cxema 3

:

Формулы (3)–(8) дают явное точное выражение для определения искомого числа исходов N(r,n) в частной схеме размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам без пустых ячеек. Тогда (см. п.2.1) число исходов $N^*(r,n)$ в общей схеме, допускающей пустые ячейки, пересчитывается из числа N(r,n) по формуле (1).

Поясним порядок использования формул (3)–(8) при вычислении числа N(r,n) по формуле (3).

Для наглядности расчета приведем общую схему пересчета параметров r_{ij} и n_{ij} по итерациям рекурренты (2). Рассматривая ее как граф переходов из состояния $r = r_{01}$, $n = n_{01}$ во все другие возможные по рекурренте (2) состояния, будем указывать на ребрах графа при левых и правых переходах операции пересчета параметров r и n в порядке этих переходов.

Вычисление искомого числа N=N(r,n) начинаем с определения числа m — номера итерации, когда числа N впервые по всем ветвям итераций рекурренты достигают предельных значений по обобщенным свойствам 1a—4a чисел N(r,n).

Оказывается, что вместо трудоемкого глобального вычисления параметров r_{ij} и n_{ij} по схеме 3 (рис. 3) для проверки выполнения условия (5), при выполнении которого впервые последнее значение индекса i фиксируется в качестве искомого числа m, можно определить значение m сразу непосредственно по данным r и n. Для этого введем понятие длины траектории в графе без выравнивания длин ветвей рекурренты, понимаемое как число итераций до достижения параметрами r и n значений, при которых число N принимает предельное значение по свойствам 1–4.

Длина траектории определяется значениями параметров r и n и скоростями их убывания по итерациям до выполнения впервые хотя бы одного из условий: n=1 или $r\leqslant n$.

В качестве искомого числа m нас интересует длина наибольшей траектории. В соответствии с рекуррентной формулой (2), для числа N(r,n) по левым сдвигам оба параметра убывают на любой итерации на единицу, а по правым — убывает только первый параметр r на величину второго параметра, то есть тем медленнее, чем меньше второй параметр n. С учетом очевидного неравенства

$$\frac{r}{n} < \frac{r-k}{n-k}, \qquad k > 0,$$

при r>n это означает, что траектория максимальной длины должна состоять вначале из максимального числа n-2 левых переходов, не приводящих ее к концу (при (n-1)-м левом

переходе (сдвиге) параметр n принимает значение 1, и траектория заканчивается), чтобы максимально уменьшить скорость убывания по итерациям параметра r, а затем из правых переходов, число которых и будем определять. К началу правых переходов первый параметр принимает значение r - (n-2) = r - n + 2и убывает при каждом правом сдвиге на величину второго параметра, который достигает значения 2 и при правых переходах не меняется. Траектория по подряд идущим правым сдвигам заканчивается в соответствии со свойствами 1-4 чисел N(r,n), когда первый параметр впервые становится меньшим или равным двум. Значит, число правых переходов есть [(r-n+2)/2], если число r-n+2 четно, или [(r-n+2)/2]+1 в противном случае, что, очевидно, записывается эквивалентной формулой [(r-n+3)/2]-1, где [z] есть целая часть числа z. Тогда искомая максимальная длина т вычисляется из исходных значений r и n по формуле

$$m = n - 2 + \left[\frac{r - (n - 2) + 1}{2}\right] - 1 =$$

$$= n - 3 + \left[\frac{r - n + 3}{2}\right]. \tag{9}$$

Легко проверяется, что любое изменение порядков и количеств левых сдвигов может только уменьшить длину траектории.

Далее после нахождения числа m выписываются подряд все траектории $(T_m)_2$, от первой до 2^m -й, в виде последовательностей нулей, соответствующих правым сдвигам, и единиц, соответствующих левым сдвигам. По каждой j-й траектории, $j=1,\ldots,2^m$, находятся число нулей L_m и их места $\{p_k\}$, $k=1,\ldots,m$, в траектории, и по формулам (6) и (8) вычисляются значения параметров n_{mj} и r_{mj} , после чего для нахождения искомого числа N=N(r,n) используется формула (3) с учетом свойств 1a-4a.

Проведем вычисление числа N по описанному алгоритму на примере.

Пример 5. Пусть $r=7,\ n=3$. (Результат примера 5 был получен в примере 2 непосредственным расчетом по рекуррентной формуле (2) и свойствам 1–4 чисел N(r,n)). Здесь вначале производим непосредственное вычисление числа N с выравниванием длин траекторий до m по свойствам 1а–4а по схемам 1, 2, 3 и по рекуррентной формуле (2). По формуле (9)

$$m = 3 - 3 + \left\lceil \frac{7 - 3 + 3}{2} \right\rceil = 3.$$

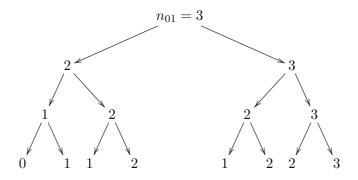


Схема 1

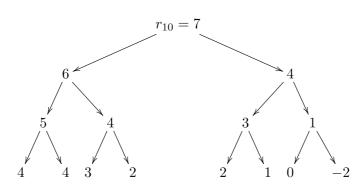


Схема 2

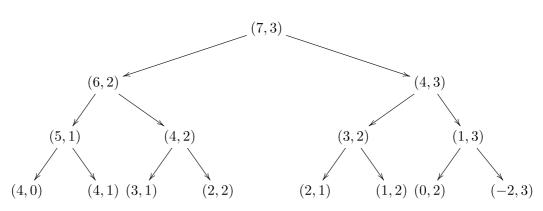


Схема 3

Puc. 4. Пример вычислений

Тогда приходим к ситуации, изображенной на рис. 4.

Теперь вычисляем искомое число N по (3) как сумму чисел, соответствующих траекториям (слева направо) (111), (110), (101), (100),

 $(011),\ (010),\ (001),\ (000),\$ определенных свойствами 1а—4а:

$$N = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 4$$
,

что совпадает с результатом примера 2.

| \overline{j} | $(T_3)_2$ | $\{p_k - 1\}$ | $l_k = 2^{p_k - 1} - (T_{p_k - 1})_{10}$ | $r_{31} = r - S_{2^m - j} - \sum_{k=1}^{L_m} n_{p_k - 1, l_k}$ | r_{31} |
|----------------|-----------|---------------|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 | 111 | | | $r - S_{111} = 7 - 3 = 4$ | 4 |
| 2 | 110 | $p_1 - 1 = 2$ | $2^2 - (T_{11})_{10} = 4 - 3 = 1$ | $r - S_{110} - n_{21} = 7 - 2 - 1 = 4$ | 4 |
| 3 | 101 | $p_1 - 1 = 1$ | $2^1 - (T_1)_{10} = 2 - 1 = 1$ | $r - S_{101} - n_{11} = 7 - 2 - 2 = 3$ | 3 |
| 4 | 100 | $p_1 - 1 = 1$ | $2^1 - (T_1)_{10} = 2 - 1 = 1$ | $r - S_{100} - n_{11} - n_{22} = 7 - 1 - 2 - 2 = 2$ | 2 |
| | | $p_2 - 1 = 2$ | $2^2 - (T_{10})_{10} = 4 - 2 = 2$ | | |
| 5 | 011 | $p_1 - 1 = 0$ | $2^0 = 1$ | $r - S_{011} - n_{01} = 7 - 2 - 3 = 2$ | 2 |
| 6 | 010 | $p_1 - 1 = 0$ | $2^0 = 1$ | $r - S_{010} - n_{01} - n_{23} = 7 - 3 - 2 = 2$ | 2 |
| | | $p_2 - 1 = 2$ | $2^2 - (T_{01})_{10} = 3$ | | |
| 7 | 001 | $p_1 - 1 = 0$ | $2^0 = 1$ | $r - S_{001} - n_{01} - n_{12} = 7 - 1 - 3 = 0$ | 0 |
| | | $p_2 - 1 = 1$ | $2^1 - (T_0)_{10} = 2$ | | |
| | | $p_1 - 1 = 0$ | $2^0 = 1$ | $r - S_{000} - n_{01} - n_{12} - n_{24} = 7 - 0 - 3 - 3 - 3 = -2$ | -2 |
| 8 | 000 | $p_2 - 1 = 1$ | $2^1 - (T_0)_{10} = 2$ | | |
| | | $p_3 - 1 = 2$ | $2^2 - (T_{00})_{10} = 4$ | | |

Теперь проведем вычисление искомого числа N в примере по формулам (3)–(9). Вначале вычислим все значения $\{n_{ij}\}$ для $i \in \{1,\ldots,m\} = \{1,\ldots,3\}, j \in \{1,\ldots,2^i\}$ по формуле (7):

$$\{n_{01}\} = \{3\};$$

$$\{n_{1j}\} = \{n_{11} = 3 - S_1 = 2;$$

$$n_{12} = 3 - S_0 = 3\} = \{2; 3\};$$

$$\{n_{2j}\} = \{n_{21} = 3 - S_{11} = 0;$$

$$n_{22} = 3 - S_{10} = 2;$$

$$n_{23} = 3 - S_{01} = 2;$$

$$n_{24} = 3 - S_{00} = 3\};$$

$$\{n_{3j}\} = \{n_{31} = 3 - S_{111} = 0;$$

$$n_{32} = 3 - S_{110} = 1;$$

$$n_{33} = 3 - S_{101} = 1;$$

$$n_{34} = 3 - S_{100} = 2;$$

$$n_{35} = 3 - S_{011} = 1;$$

$$n_{36} = 3 - S_{010} = 2;$$

$$n_{37} = 3 - S_{001} = 2;$$

$$n_{38} = 3 - S_{000} = 3\},$$

что совпадает со значениями $\{n_{ij}\}$ в схемах 1 и 3. Далее по формуле (8) вычислим значения $\{r_{3j}\}$, предварительно определив для каждого $j=1,\ldots,8$ все входящие в формулу (8) значения, а именно $\{j\}$, $(T_3)_2$, $\{p_k\}$, $\{l_k\}$. Представим все вычисления для $\{r_{3j}\}$ в таблице с использованием вычисленных выше значений $\{n_{ij}\}$ для $i=1,\ldots,3$. Итак, получаем, что $\{r_{31}\}=\{4,4,3,2,2,1,0,-2\}$, что совпадает с результатом непосредственного вычисления $\{r_{3j}\}$ по схемам 2 и 3 и с результатами применения рекуррентного соотношения (2) в примере 2. Далее по (3) и свойствам 1a—4а для N(r,n)=N(7,3) получаем, что

$$N = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 4$$
.

что совпадает с результатом прямого перебора всех вариантов размещения, приведенных в примере 2.

3. Вероятностный анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам

3.1. Случайный процесс последовательного размещения частиц по ячейкам в схеме

Построим случайный процесс, исходы которого на i-м шаге описываются компонентами вектора $\bar{\mu}_i$, определенного во введении. Случайный процесс будет состоять в размещении на каждом шаге еще одной частицы по n неразличимым ячейкам. Состоянием процесса на i-м шаге будем считать так называемую вторую маркировку заполнений ячеек, то есть численности их заполнений всех возможных уровней в возрастающем порядке после размещения i частиц, представляемые вектором $\bar{\mu}_i$ при нулевом начальном заполнении.

Представим процесс в виде графа переходов из состояния в состояние пошагово по мере поединичного роста числа размещенных частиц, используя следующие обозначения: $E_i^{(i)}$ – j-е состояние после размещения i частиц, то есть на *i*-м шаге размещения. Состояния $\{E_j^{(i)}\}$ нумеруются в порядке попадания следующей частицы в ячейки с растущим предварительным уровнем заполнения (сначала — в одну из пустых ячеек, если они есть, затем — в одну из ячеек с одной частицей, если они есть, затем – с двумя частицами, если они есть, и так далее). Таким образом, состояния на каждом шаге будут упорядочены по принятому правилу. Вектор $\bar{\mu}_i$, описывающий состояние процесса на i-м шаге, будет состоять из i+1 компоненты, задающих численности ячеек с уровнями заполнений от 0 до i в возрастающем порядке. Начальный вектор $\bar{\mu}_0 = (n)$ состоит из одной компоненты (все ячейки пустые). Для наглядности на ребрах графа укажем вероятности переходов из состояния в состояние (рис. 5).

3.2. Распределение вероятностей векторов $\{\bar{\mu}_r\}$ и вычисление чисел N и N^*

Зафиксируем i = r, то есть r-й шаг случайного процесса размещения r частиц по nячейкам. Тогда в графе (см. рис. 5) получим на r-м шаге перечень всех упорядоченных по вышеприведенному правилу состояний $\{\bar{\mu}_r\}$, иными словами, всех размещений r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам. Их количество и есть число $N^* = N^*(r, n)$ исходов в общей схеме размещений. Число исходов N = N(r, n) в схеме без пустых ячеек можно получить, выкидывая из N^* состояний общей схемы состояния с нулевой первой компонентой числа пустых ячеек. Таким образом, получаем метод вычисления чисел N и N^* путем перечисления состояний в графе случайного процесса последовательного размещения частиц до r-го шага.

Кроме этого, в результате упорядочения состояний в графе (см. рис. 5) решена задача перечислительной комбинаторики явного представления всех размещений r частиц по n ячейкам исходной схемы.

Распределение вероятностей векторов $\{\bar{\mu}_r\}$ вычисляется по графу (см. рис. 5) путем сложения по всем траекториям графа до данного состояния — вектора $\bar{\mu}_r$ — произведений вероятностей последовательных переходов, указанных на ребрах графа.

Пример 6. Пусть r = 6. Тогда

$$\begin{split} \mathbf{P}(E_1^{(4)}) &= \mathbf{P}(\bar{\mu}_4 = (n-4,4,0,0,0)) = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n}, \\ \mathbf{P}(E_2^{(4)}) &= \mathbf{P}(\bar{\mu}_4 = (n-3,2,1,0,0)) = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{3}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n-2}{n}, \end{split}$$

и так далее, для всех пяти состояний.

Перебор траекторий до каждого конечного состояния в рассмотренном примере при r=6 не вызывает затруднений, хотя для больших значений r решение этой проблемы требует отдельного рассмотрения. Обсудим общий поря-

док перебора траекторий до данного состояния при вычислении его вероятности по схеме на рис. 5. В силу единственности начального состояния для каждого конечного состояния предлагается выписывать траектории справа налево по обратным стрелкам в графе и перебирать их сверху вниз на каждом шаге.

4. Исследование стохастической модели схемы

4.1. Моделирование схемы размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам

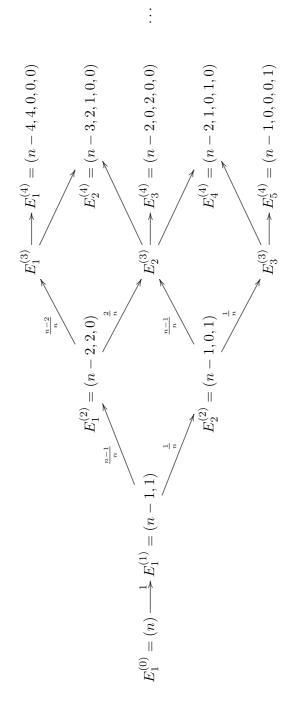
Способ 1. В п.3 теоретически найдено дискретное распределение вероятностей всех состояний схемы на любом шаге. Поэтому по полученному распределению на r-м шаге проводим моделирование состояний схемы методом маркировки (см. $[1, гл. 3, \S4]$).

Замечание 5. Если при $r \geqslant n$ требуется смоделировать аналогичную схему без пустых ячеек, в графе перечисленных состояний на r-м шаге (см. рис. 5) исключаем состояния с нулевой компонентой μ_0 в векторе $\bar{\mu}_r$, а вероятности остальных состояний делим на единицу минус суммарная вероятность состояний с нулевой компонентой и далее применяем метод маркировки.

Способ 2. Известным, например, из [1, гл. 3, [§1] способом моделируем заданное количество M_1 размещений r неразличимых частиц по nразличимым ячейкам; выбираем из них M_2 повторяющихся, остальные маркируем по уровням заполнения в возрастающем порядке, выкидывая одинаковые. Получаем L_1 исходов вида вектора $\bar{\mu}_r$. С отбракованными M_2 размещениями повторяем ту же процедуру, что и с исходными M_1 размещениями, отбраковывая из них M_3 повторяющихся, и получаем L_2 исходов того же вида. Далее, заменяя M_i на M_{i+1} , а L_i на L_{i+1} , $i=2,3,\ldots$, повторяем ту же процедуру k раз до тех пор, пока среди отбракованных вариантов не будет повторяющихся. Тогда, объединяя исходы вида вектора $\bar{\mu}_r$, получаем

$$L = \sum_{j=1}^{k} L_j$$

исходов требуемой схемы.



Puc. 5. Граф переходов

Замечание 6. Если при $r \ge n$ нужно смоделировать исходы аналогичной схемы без пустых ячеек, то известным, например, из [1, гл. 3, §1] способом моделируем M_1 размещений r неразличимых частиц по n различимым ячейкам без пустых ячеек и применяем к ним второй способ.

4.2. Приближенное вычисление чисел N^* и N методом, использующим стохастическое моделирование

Воспользуемся вторым способом моделирования размещений соответственно в общей схеме, допускающей пустые ячейки с общим числом исходов N^* , и в схеме без пустых ячеек с общим числом исходов N. Тогда можно считать, что

$$N^* \binom{n+r-1}{r}^{-1} \approx \frac{L}{M_1},$$

откуда получаем, что

$$N^* \approx \frac{L}{M_1} \binom{n+r-1}{r}.$$

Аналогично, по замечанию 6, из того, что

$$N\binom{r-1}{n-1}^{-1} \approx \frac{L}{M_1},$$

находим приближенное значение N:

$$N \approx \frac{L}{M_1} \binom{r-1}{n-1}.$$

О МЕТОДЕ МАРКИРОВКИ

Для полноты изложения приведем кратко основные сведения о методе маркировки (см. [1]).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Энатская Наталия Юрьевна

доцент, к. ф.-м. н.

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

ул. М. Пионерская, 12, 113054 Москва, Россия эл. почта: $\mathrm{nat}1943$ @mail.ru

Хакимуллин Евгений Робертович

профессор, к. ф.-м. н.

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

ул. М. Пионерская, 12, 113054 Москва, Россия эл. почта: evgeni.hakimullin@mail.ru

Колчин Андрей Валентинович

к. ф.-м. н.

эл. почта: andrei.kolchin@gmail.com

Метод маркировки является одним из методов генерирования («разыгрывания») дискретной случайной величины с заданным законом распределения

$$P(X = x_k) = p_k$$
.

На отрезке [0,1] изобразим точки вида $\sum_{k=1}^s,\,s=1,2,\dots$ Пусть r — возможное значение случайной

Пусть r — возможное значение случайной величины R, равномерно распределенной на отрезке [0,1], тогда

$$\mathbf{P}(0 < r < p_1) = p_1,$$
 $\mathbf{P}(p_1 < r < p_1 + p_2) = p_2, \dots,$
 $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^{k} p_i\right) = p_k, \dots$

Отсюда следует, что попадание случайного числа R на k-й отрезок моделирует полученное значение случайной величины $X = x_k$.

Замечание. Для многих основных распределений так называемый коэффициент воспроизводимости $\gamma_k = p_{k+1}/p_k$ имеет для всех k удобное общее выражение как функции от k. Поэтому в таком случае при использовании метода маркировки нет необходимости загрузки в память всего ряда распределения, вместо этого $\{p_k\}$ вычисляется по мере необходимости по формуле

$$p_{k+1} = \gamma_k p_k.$$

Литература

1. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. МИЭМ, Москва, 2012. 185 с.

Enatskaya, Natalia

Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Higher School of Economics 12 M. Pionerskaya St., 113054 Moscow, Russia e-mail: nat1943@mail.ru

Khakimullin, Evgeny

Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Higher School of Economics 12 M. Pionerskaya St., 113054 Moscow, Russia e-mail: evgeni.hakimullin@mail.ru

Kolchin, Andrey

e-mail: andrei.kolchin@gmail.com

УДК 004.01:006.72 (470.22)

STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS

V. Kornikov¹, A. Pepelyshev², A. Zhigljavsky²

¹St.Petersburg State University ²Cardiff University

In this paper, we continue the research started in [5]. We apply the so-called Singular Spectrum Analysis (SSA) to forecast the temperature records taken from http://vortex.nsstc.uah.edu/, the web-site of the National Space Science and Technology Center, USA, NASA. We compare the forecasts we made three years ago and published in [5] with the temperatures actually recorded. By doing so we demonstrate that our forecasts were quite accurate. We then forecast the temperatures for the next several years and show that the forecasts are not very different from the ones we made earlier: according to our forecasts, the Earth temperatures are neither increasing nor decreasing and will continue to be volatile.

Key words: Singular Spectrum Analysis, forecasting.

В. В. Корников, А. Н. Пепелышев, А. А. Жиглявский. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ГЛОБАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗЕМЛИ

Эта статья является продолжением исследования, начатого в работе [5], где метод Анализ Сингулярного Спектра применяется для прогноза временных рядов температуры Земли, взятых с сайта Национального Центра Космической Науки и Технологии, США, НАСА, http://vortex.nsstc.uah.edu/. В статье мы сравниваем прогнозы, сделанные три года назад и опубликованные в [5], с температурами, измеренными за эти три года. Сравнение показывает, что наши прогнозы были достаточно точными. Затем мы приводим прогноз температуры на несколько лет вперед и показываем, что эти прогнозы мало отличаются от построенных ранее. Согласно нашим прогнозам, температура Земли не увеличивается и не уменьшается, а будет продолжать колебаться.

Ключевые слова: Анализ Сингулярного Спектра, прогноз.

We consider the temperature records representing the average temperature on Earth and its parts during the last few decades. We make a large number of forecasts of these temperatures. To make the forecasts we apply the so-called Singular Spectrum Analysis (SSA), which is a well-known tool of analyzing and forecasting time series in climatology. To achieve the robustness of forecasts, we choose

a wide range of parameters of SSA. Results show that the forecasts are very stable. The most recent forecasts confidently predict that the level of temperatures in the next few years is going to be very close the current level of temperatures. Some additional results can be found at the website http://earth-temperature.com/forecast/ and in our previous paper [5].

THE METHODOLOGY

Singular Spectrum Analysis

Singular Spectrum Analysis is a well-known tool of analyzing and forecasting time series in climatology in general and analyzing temperature records in particular, see e.g. [2, 4, 7, 8]. There are several versions. We shall use the most basic version. A short description of this algorithm is given below, see [3] and [4] for details.

Short description of SSA

Let x_1, \ldots, x_T be a time series of length T. Given a window length L (1 < L < T), we construct the L-lagged vectors $X_i = (x_i, \ldots, x_{i+L-1})^T$, $i = 1, 2, \ldots, K = T - L + 1$, and compose these vectors into the matrix

$$\mathbf{X} = (x_{i+j-1})_{i,j=1}^{L,K} = [X_1 : \ldots : X_K].$$

This matrix has a size $L \times K$ and is often called 'trajectory matrix'. It is a Hankel matrix, which means that all the elements along the diagonal i+j=const are equal.

The columns X_j of **X**, considered as vectors, lie in the L-dimensional space \mathbf{R}^{L} . The singular-value decomposition (SVD) of the matrix $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ yields a collection of L eigenvalues and eigenvectors, which are often called Empirical Orthogonal Functions (EOF). Sometimes, the empirical covariance matrix of the series is used in place of $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$. Let us choose the EOFs corresponding to r largest eigenvalues of $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$, where r is a given number, $1 \leq r < L$. These EOFs determine an r-dimensional subspace in \mathbf{R}^{L} (call this subspace S_{r}). The L-dimensional data $\{X_1, \ldots, X_K\}$ is then projected onto this r-dimensional subspace and the subsequent averaging over the diagonals gives us some Hankel matrix X which is considered as an approximation to X. The series reconstructed from \tilde{X} satisfies some linear recurrent formula which may be used for forecasting.

SSA forecasting

There are several ways of constructing forecasts based on the SSA decomposition of the series described above, see Chapter 2 in [3] and Chapter 3 in [4]. The most obvious way is to use the linear recurrent formula which the series reconstructed from $\tilde{\mathbf{X}}$ satisfies. We however prefer to use the so-called 'SSA vector forecast' ([3], Sect. 2.3.1). The main idea of this forecasting algorithm is as follows. Selection of r eigenvectors of $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ leads to the creation of the subspace S_r . SVD properties give us a hope that the L-dimensional vectors $\{X_1, \ldots, X_K\}$ lie close to this subspace. The forecasting algorithm then sequentially constructs the vectors $\{X_{K+1}, X_{K+2}, \ldots\}$ so that they stay as close as possible to the chosen subspace S_r .

Choice of SSA parameters

In the examples below, the length of the series is T=373 and the forecasting horizon is $h\cong 100$. If the structure of the series is assumed stable then large values of L of the order $L\cong 100$ should be preferred to small values of the order $L\cong 10$. We, however, do not assume that the structure of the series is rigid. In this case, large values of L would not give SSA enough flexibility. On the other hand, for small values of L, SSA may be too sensitive to the noise and small variations in the trend. It is therefore natural to select values of L somewhere in-between. Our choice is $20\leqslant L\leqslant 50$, which we believe is a rather broad range.

The second SSA parameter to choose is r, the dimension of the subspace S_r . The choice of r should depend on what we intend to forecast. For example, if we observe some seasonal variations in the data and we want to forecast these variations, then we have to choose r large enough to capture these variations. There are several procedures (see e.g. [3]) for choosing the most suitable value of r (roughly speaking, r should be the smallest among those values of r for which the residuals after signal extraction pass the chosen statistical tests for being a noise). These procedures, however, are often not very reliable and are not well suited for long- and medium range forecasting.

In what follows, we choose $r \in [5,7]$. We realize that whatever the rule of selection of r, some values of r are too small, which leads to us missing parts of the signal, but other values of r are too large, which means that we include a significant part of the noise into the 'reconstructed signal'. This, however, goes in line with one of the main aims of our study, which is checking the stability of the forecasts.

Stability of forecasts

Forming the samples of forecasts

Assume that we have a family of SSA forecasts which is parameterized by a parameter $\theta \in \Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, where $\theta = (L, r)$ and m is the total number of chosen pairs of parameters (L, r). For each time moment $t \leq T$, any g > 0 and any $\theta \in \Theta$ we can build a g-step ahead forecast $\hat{x}_{t+g}(\theta)$ based on the information x_1, \dots, x_t . Hence for any $t \leq T$ we can compute the following set of forecasting results:

$$F_t = \{\hat{x}_{T+q}(\theta) : g \in [h_1, h_2], \ \theta \in \Theta\},\$$

where $0 < h_1 \le h_2$ are some numbers. The number of elements in the samples F_t is $M = m(h_2-h_1+1)$.

To sum up, our forecasting procedure gives us $T-T_0+1$ samples $F_t=\{f_1^{(t)},\ldots,f_M^{(t)}\}$ at all $t=T_0,\ldots,T$, where T_0 is the first time moment we make the forecasting.

Comparison of the samples

We now need to compare the samples F_t $(t = T_0, ..., T)$ to evaluate the stability of the corresponding forecasts and decide whether at t = T we have reached an acceptable level of stability.

The mean values of the samples F_t are $\bar{f}_t = (f_1^{(t)} + \ldots + f_M^{(t)})/M$. As the future is unknown, it is impossible to check whether the mean values \bar{f}_t give good approximations to the true values $\mathbf{E}x_{T+h}$. Hence the values \bar{f}_t do not provide much information about the quality of forecasts.

As measures of stability, we must consider the behaviour of some characteristics of variability of the samples F_t . The most common among these characteristics is the (empirical) standard deviation of F_t :

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} (f_i^{(t)} - \bar{f}_t)^2}.$$

Another important characteristic of the sample variability is the so-called range of the sample F_t :

$$R_t = \max_{i=1,\dots,M} f_i^{(t)} - \min_{i=1,\dots,M} f_i^{(t)}.$$

RESULTS

Characteristics of forecast quality

We consider the Earth temperature records from the web-site http://vortex.nsstc.uah.edu/ (National Space Science and Technology Center, NASA, USA). The records represent the temperature on Earth and some of its parts since December 1978. We did not not present the analysis of longer temperature records as there is some controversy around earlier temperature records. see [6]. The series are the so-called temperature anomalies rather than the absolute temperatures (temperature anomalies are computed relative to the base period 1951–1980). Working with anomalies rather than with absolute temperature records is customary in climatology, see for example the publications and web-sites of the Goddard Institute for Space Studies. In the present subsection we follow [5] and use the data from December 1978 to December 2009 so that altogether we have T = 373 data points. The first time moment we start the forecasts is January

2005 implying $T_0 = 314$. We forecast the series until 2018 (longer-term forecasts are very similar) by setting $h_1 = 97, h_2 = 99$.

We select the domain $L \in [20, 50]$ for the SSA window length L and choose the first $r \in [5, 7]$ EOFs. Although a better forecast (with better stability) can be obtained if we optimize the domains of parameters L and r for each individual series, we have fixed the domains to show the robustness of results. Furthermore, the results of our study are very stable with respect to these domains.

To illustrate our analysis, consider the series of the global temperature on Earth and Northern Hemisphere temperature. These two series of temperatures are discussed most often. We have done similar analysis for some other series; the results are presented at the web-site http://earthtemperature.com/forecast/. For each of the three chosen temperature series we plot the following.

- (I) Figures 1 and 4: the series itself, the SSA approximation and SSA forecast for L = 50 and r = 7 computed at the last point t = T (December 2009).
- (II) Figures 2 and 5 (left): the series $-\bar{f}_t$, standard deviations s_t (light grey), ranges R_t (dark grey) for $t = 314, \ldots, 373$ (the averages \bar{f}_t are always plotted with the minus sign for the purpose of clarity of display).
- (III) Figures 2 and 5 (right): box-plots of the samples F_t for t = 325, 337, 349, 361, 373.
- (IV) Figures 3 and 6: forecasts for the temperature at January 2018 using the series x_1, \ldots, x_t for L=20, 30, 40, 50, r=5, 7 and all $t=314, \ldots, 373$.

Note that the markers on the x-axis in all plots correspond to Januaries. To compare the forecasted values of the temperatures with recent values, note the average values of these temperatures for 2000–2009: 0,222 for Earth; 0,312 for Northern Hemisphere.

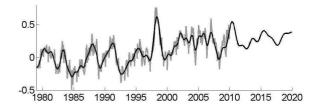


Fig. 1. Earth temperature. The time series (gray), the SSA approximation and the forecast for L=50 and r=7 (black).

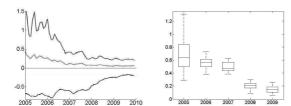


Fig. 2. Earth temperature. Left: averages $-\bar{f}_t$ (black), standard deviations s_t (light grey), ranges R_t (dark grey). Right: box-plots of the samples F_t .

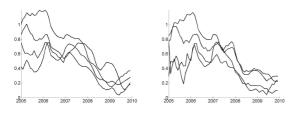


Fig. 3. Forecasts for the Earth temperature at Jan 2018; L=20,30,40,50 and r=5 (left) and r=7 (right).

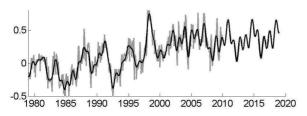


Fig. 4. Northern Hemisphere temperature. The time series (gray), the SSA approximation and the forecast for L=50 and r=7 (black).

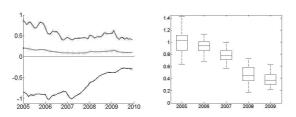


Fig. 5. Northern Hemisphere temperature: Left: averages $-\bar{f}_t$ (black), standard deviations s_t (light grey), ranges R_t (dark grey). Right: box-plots of the samples F_t .

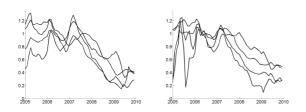


Fig. 6. Forecasts for the Northern Hemisphere temperature at Jan 2018; L=20,30,40,50 and r=5 (left) and r=7 (right).

Assessing the accuracy of forecasts made in 2009

In Figure 7 we can see that during the period Jan 2010 to Sep 2013 the global Earth temperatures roughly followed a typical forecast given in [5].

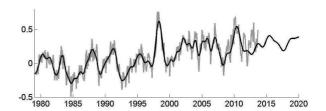


Fig. 7. Global Earth temperature. Gray: the original time series from http://vortex.nsstc.uah.edu/ for the period Dec 1978 to Sept 2013. Black: the SSA approximation until Dec 2009 and the forecast from Jan 2010 onwards. SSA parameters: L=50 and r=7.

Figure 8 shows that for the global Earth temperatures, all forecasts made in [5] for the period Jan 2010 to Dec 2020 were very similar and the actual global Earth temperature during the whole period Dec 1978 to Sept 2013 was well inside the family of forecasts. Figure 8 also shows that the forecasts made in Dec 2009 do not show any significant change in the level of temperatures.

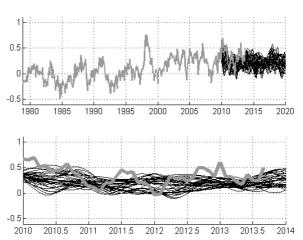


Fig. 8. Global Earth temperature. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

Figure 9 is similar to Figure 8 but shows the North pole temperatures (rather than the global Earth temperatures). Again, all forecasts made in 2009 for the period Jan 2010 to Dec 2020 were very similar and the actual global Earth temperature during the whole period Dec 1978 to

Sept 2013 was well inside the family of forecasts. Unlike Figure 8, Figure 9 shows that the forecasts made in Dec 2009 indicate a very small increase in the level of temperatures in the North pole. This figure should be compared with Figure 16 where revised forecasts are shown. Note also that although the forecasts were unable to catch the volatility of the actual series, these forecasts have shown the main trend (more precisely, the absence of any trend) very accurately.

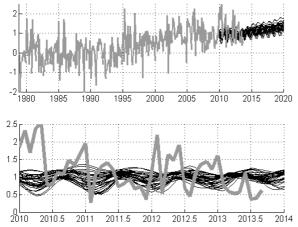


Fig. 9. North Pole temperatures. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

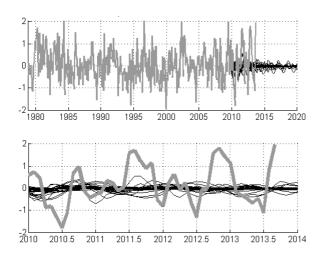


Fig. 10. South Pole temperatures. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

Figure 10 is similar to Figures 8 and 9. It shows the South pole temperatures.

Unlike the global Earth and North pole temperatures, the South pole temperatures never showed any trend but were very volatile. The volatility did not exhibit any patterns and this was reflected in the SSA forecasts: all these forecasts were very close to a constant. Figure 10 shows that the South pole temperatures continue to be volatile with no tendency apparent.

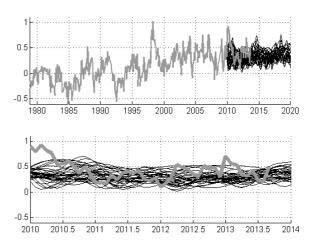


Fig. 11. Northern hemisphere temperatures. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

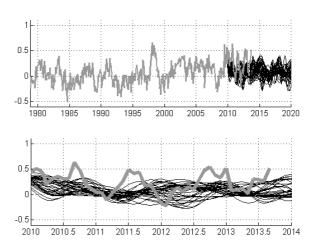


Fig. 12. Southern hemisphere temperatures. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

Figures 11, 12, 13 and 14 are similar to Figures 8, 9 and 10 and deal with Northern hemi-

sphere, Southern hemisphere, Earth land and Earth ocean temperatures, respectively. These pictures are self-explanatory. They show the good quality of the SSA forecasts made in 2009 and the fact that the temperatures continued to be volatile but did not rise in the last three years.

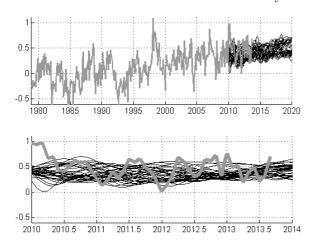


Fig. 13. Earth land temperatures. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

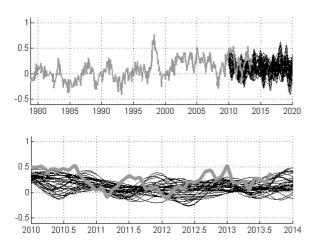


Fig. 14. Earth ocean temperatures. Top: the original time series for the period Dec 1978 to Sept 2013 (gray) and the family of forecasts from Jan 2010 defined by $L=20,\ldots,50$ and r=5,7 (black). Bottom: an extraction from the top graph showing the period Jan 2010 to Dec 2014.

Forecasting from the present time until Jan 2020

In the figures that follow we show the families of the SSA forecasts of different temperatures from Oct 2013 until Jan 2020. To make the forecasts we use SSA with the same parameters as above; that is, $L = 20, \ldots, 50$ and r = 5, 7. The

data used is the corresponding temperature series from Dec 1978 until Sept 2013, thus the length of all series is 418.

Figures 15, 16, 17, 18, 19, 20 and 21 show forecasts (constructed using the most recent data) of the temperatures for the Earth overall, North pole, South pole, Northern hemisphere, Southern hemisphere, Earth land and Earth ocean temperatures, respectively. The new forecasts were made using the data until Sept 2013 (that is, the most recent data available at the time of submission of the present paper). These figures complement Figures 8, 9, 10, 11, 12, 13 and 14, respectively. None of the forecasts shows any tendencies for temperature increase. They show, however, a lot of volatility and even a possibility of an insignificant decrease of some temperatures.



Fig. 15. Earth temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013.

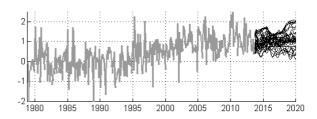


Fig. 16. North pole temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013 for L = 20, ..., 50 and r = 5, 7.

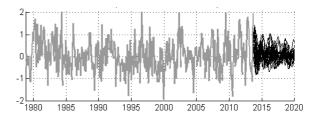


Fig. 17. South pole temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013 for $L = 20, \ldots, 50$ and r = 5, 7.

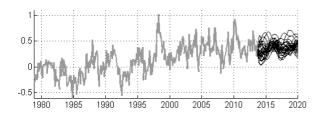


Fig. 18. Northern hemisphere temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013 for L = 20, ..., 50 and r = 5, 7.

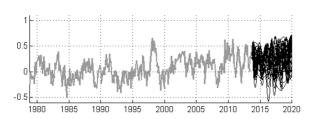


Fig. 19. Southern hemisphere temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013 for L = 20, ..., 50 and r = 5, 7.

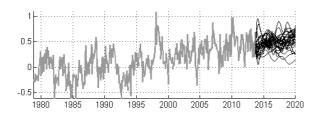


Fig. 20. Earth land temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013 for $L=20,\ldots,50$ and r=5,7.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Корников Владимир Васильевич

доцент, к. ф.-м. н.

Санкт-Петербургский государственный университет Университетская наб., 28, Санкт-Петербург, Россия, 199034

эл. почта: vkornikov@mail.ru

Пепелышев Андрей Николаевич

научный сотрудник, к. ф.-м. н. Школа математики, Университет Кардиффа Кардифф, Великобритания эл. почта: pepelyshevan@cardiff.ac.uk

Жиглявский Анатолий Александрович профессор, д. ф.-м. н. Школа математики, Университет Кардиффа Кардифф, Великобритания эл. почта: zhigljavskyaa@cardiff.ac.uk тел.: +44 (0) 29 208 7507 6

-0.5 -1980 1985 1990 1995 2000 2005 2010 2015 2020

Fig. 21. Earth ocean temperature. The time series (gray) until Sep 2013, the family of forecasts (black) from Oct 2013 for $L = 20, \ldots, 50$ and r = 5, 7.

REFERENCES

- 1. Supplementary materials http://earth-temperature.com/stability/ (дата обращения: 12.09.2013).
- 2. Ghil M., Vautard R. (1991) Interdecadal oscillations and the warming trend in global temperature time series. Nature, 350, 324–327.
- 3. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. (2001). Analysis of Time Series Structure: SSA and related techniques. Chapman & Hall/CRC.
- 4. Golyandin N., Zhigljavsky A. (2013). Singular Spectrum Analysis for Time Series. Springer briefs in statistics, Springer-Verlag.
- 5. Pepelyshev A., Zhigljavsky A. (2010). Assessing the stability of long-horizon SSA forecasting. Statistics and Its Interface 3, 321–327.
- 6. $Plimer\ I.$ (2009). Heaven and Earth: Global Warming The Missing Science. Quartet books, London.
- 7. Schlesinger M., Ramankutty N. (1994). An oscillation in the global climate system of period 65–70 years. Nature, 367, 723–726.
- 8. Vautard R., Yiou P., Ghil M. (1992). Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signal. Physica D 58, 95–126.

Kornikov, Vladimir

Saint-Petersburg State University 28 Universitetskiy pr. 198504 Saint-Petersburg, Russia e-mail: vkornikov@mail.ru

Pepelyshev, Andrey

Cardiff University Senghennydd road Cardiff, UK, CF24 4AG e-mail: pepelyshevan@cardiff.ac.uk

Zhiglajvsky, Anatoly

Cardiff University Senghennydd road Cardiff, UK, CF24 4AG e-mail: zhigljavskyaa@cardiff.ac.uk tel.: +44 (0) 29 208 7507 6

ХРОНИКА

ИНСТИТУТУ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ КАРНЦ РАН – 15 ЛЕТ

Целенаправленное развитие математических исследований в Карельском филиале АН СССР (КФ АН СССР) началось в 1969 г., когда Президиум КФ АН СССР подготовил и одобрил обоснование создания вычислительного центра (ВЦ) и направил письмо с этим обоснованием вице-президенту АН СССР академику М. Д. Миллионщикову.

Однако следует отметить, что первые шаги в использовании вычислительной техники в КФ АН СССР были предприняты еще в 1961 г. после получения и использования ЭВМ «Минск-1» при проведении научных исследований. В вышеупомянутом обосновании была приведена поэтапная схема создания и проект штатного расписания лабораторий ВЦ. Позднее в том же году была также подготовлена заявка в Центракадемснаб АН СССР на вычислительные машины «Мир-1» и «Минск-32», которые были получены и введены в эксплуатацию в 1970 и 1972 годах соответственно.

В июле 1969 г. Президиум КФ АН СССР рассмотрел вопрос о создании лаборатории математических методов и вычислительной техники (Протокол № 9 от 10 июля 1969 г.), а 1 августа того же года утверждается штатное расписание лаборатории в количестве 10 единиц. Временно исполняющим обязанности заведующего лабораторией в составе аппарата Президиума КФ АН СССР назначается В. Л. Файнберг, а в сентябре 1971 г. заведующим избирается к. т. н. Г. А. Борисов. В начале 1973 г. лаборатория передается в Отдел экономики филиала (Приказ № 4 от 09.01.1973 г.), а в мае 1973 г. она реорганизуется в Отдел математических методов и вычислительной техники, входит в состав Института леса КФ АН СССР, врио зав. отделом и руководителем лаборатории автоматизации проектирования назначается к. т. н. Г. А. Борисов. В июле 1973 г. в составе Отдела создается лаборатория автоматизации научных исследований, руководителем назначается Ю. С. Раутиайнен. Исследования и разработки первоначального периода существования Отдела были направлены на создание систем статистической обработки экспериментальных данных и систем автоматизированного проектирования транспортных сетей и лесомелиоративных каналов.

Первые шаги к преобразованию Отдела в самостоятельное научное подразделение были сделаны в 1972 г. и поддержаны президентом АН СССР академиком М. В. Келдышем после его визита в КФ АН СССР, когда было принято постановление президиума АН СССР о создании Отдела математического профиля. Карельский обком КПСС и Совет Министров КАССР поддержали вышеупомянутое предложение, а в июне 1974 г. коллегия Госкомитета Совета Министров СССР по науке и технике приняла предложение АН СССР об организации Отдела математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП) (протокол № 39 от 10.07.1974 г.).

Постановлением президиума АН СССР (№ 56 от 23.01.75 г.) в составе КФ АН СССР создается Отдел ММАНИП как самостоятельное научное подразделение и утверждаются следующие основные направления научных исследований:

- исследование и разработка экономикоматематических моделей, используемых для создания автоматизированных систем управления в различных областях народного хозяйства КАССР;
- проведение работ в области автоматизации обработки данных научных исследований с целью повышения эффективности этих исследований;
- проведение работ по автоматизированному проектированию транспортных коммуникаций и мелиоративных систем.

Большую поддержку и помощь в организации Отдела оказали член Отделения математики АН СССР член-корреспондент В. Я. Козлов и председатель президиума КФ АН СССР член-корреспондент Н. И. Пьявченко. На мо-

мент создания Отдела его структура включала четыре лаборатории:

- автоматизации научных исследований (АНИ, зав. лабораторией к. т. н. А. Д. Сорокин);
- научных основ автоматизации проектирования (НОАП, руководитель к. т. н. Γ . А. Борисов);
- математического обеспечения ЭВМ (МО ЭВМ, зав. лабораторией В. В. Аксенов);
- вычислительной техники (BT, зав. лабораторией к. т. н. Г. Н. Пырх).

В конце 1975 г. в Отделе была создана лаборатория автоматизированных информационных систем (АИС, заведующий к. э. н. В. А. Лебедев). В составе лаборатории НОАП функционировали группы автоматизации проектирования, математического моделирования и экономико-математических моделей. В составе лаборатории МО ЭВМ также были созданы группы подготовки данных, операторов ЭВМ и эксплуатации математического обеспечения. В 1976 г. группа экономико-математических моделей была переведена в Отдел экономики КФ АН СССР. В кадровом отношении из 45 чел. численного состава Отдела 5 сотрудников были кандидатами наук, 27 чел. имели высшее образование, 13 чел. – среднее образование. Управленческий персонал насчитывал 3 чел., Отдел не был наделен правами юридического лица.

В 80-е годы двадцатого столетия при расширении тематики исследований происходило и изменение структуры Отдела. В 1986 г. была организована лаборатория программных средств автоматизации на базе лабораторий АИС и МО ЭВМ (заведующий к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын), а также лаборатория микропроцессорных систем на базе лабораторий АНИ и ВТ (руководитель к. т. н. А. Д. Сорокин). В 1989 г. лаборатория АИС преобразуется в лабораторию геоэкоинформатики (заведующий к. э. н. В. А. Лебедев). С расширением тематики исследований продолжился рост численного и качественного состава Отдела, укреплялась материально-техническая база. Были приобретены и запущены в эксплуатацию мощная ЭВМ ЕС-1052 (1982 г.), специализированные измерительно-вычислительные комплексы ИВК-3 (1981 г.) и ИВК-1 (1986 г.) для автоматизации экспериментов. Первая в КФ АН СССР персональная ЭВМ РС XT появилась в Отделе в 1986 г. Наибольшего «пика» количественный состав Отдела достиг в 1990 г., когда в нем работало 87 сотрудников, из них 38 научных (в их числе 11 кандидатов наук) и 49 научно-технических сотрудников. Первые шаги тесного научноорганизационного взаимодействия с Петрозаводским госуниверситетом (ПетрГУ) Отдел предпринял в 1989 г., когда была организована на паритетных началах лаборатория «Элементная база вычислительной техники и АСНИ», в которой работали три сотрудника физического факультета ПетрГУ, а научное руководство осуществлял декан физического факультета д. ф.-м. н. В. А. Гуртов.

Впоследствии в 2007 г. на основе договора о сотрудничестве между ИПМИ Карельского научного центра РАН и ПетрГУ был создан учебно-научный комплекс, в состав которого вошли филиалы кафедр алгебры и теории вероятностей математического факультета (руководитель д. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов) и информатики и математического обеспечения того же факультета (руководитель к. ф.м. н. В. Т. Вдовицын). В рамках функционирования вышеупомянутого комплекса сотрудники института ежегодно читают более десятка спецкурсов и более 30 курсов лекций, проводят около 20 практических и лабораторных занятий, под их руководством подготавливаются и защищаются магистерские диссертации, квалификационные работы на получение степени бакалавра, дипломные и курсовые рабо-

Очередное изменение структуры Отдела произошло в 1991 г., когда постановлением Президиума Карельского научного центра РАН (№ 27 от 17.04.1991) были организованы следующие лаборатории:

- научных основ автоматизации проектирования (зав. к. т. н. Γ . А. Борисов);
- математического моделирования (зав. к. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов);
- программных средств автоматизации (зав. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын);
- геоэкоинформатики (зав. к. э. н. В. А. Лебедев);
- локально-вычислительных сетей (рук. к. т. н. А. Д. Сорокин);
- группа эксплуатации ЭВМ (рук. С. Б. Смирнов);
- группа автоматизации управленческих задач (рук. Г. В. Воинова);
- совместная с физическим факультетом ПетрГУ лаборатория «Элементная база вычислительной техники и АСНИ» (рук. д. ф.-м. н. В. А. Гуртов).

В ноябре 1992 г. Отдел ММАНИП меняет название и становится Отделом математики и анализа данных (ОМАД). Это переименование было инициировано Отделением математики РАН, и Президиум Карельского научно-

го центра РАН принял соответствующее постановление (N 53 от 26.11.1992).

Утвержденные в январе 1990 г. Президиумом АН СССР следующие направления научных исследований Отдела ММАНИП сохранились и для Отдела математики и анализа данных:

- системное изучение природных, социальных и производственных комплексов Карелии;
- разработка математических и информационных моделей для решения научнотехнических и экологических задач оптимального управления этими комплексами.

В связи с тенденцией в Российской академии наук перевода институтов на полную юридическую самостоятельность аналогичная работа проводилась в Карельском научном центре. Поэтому приказом № 344-к от 23.11.1993 Отдел математики и анализа данных с 1 октября был переведен на самостоятельный баланс и наделен правами юридического лица. В порядке подготовки к вышеуказанному переводу был разработан и утвержден Президиумом КарНЦ РАН первый устав Отдела (постановление № 43 от 29.10.1992).

В октябре 1994 г. Президиум РАН расширил направление научных исследований ОМАД и ввел еще одно направление:

 изучение проблем развития топливноэнергетического комплекса Республики Карелия.

В рамках принятых основных направлений НИР сотрудниками Отдела решаются следующие проблемы:

- теоретические исследования в математике и прикладной статистике;
- разработка программных средств математического моделирования с использованием статистических методов;
- применение методов и программных средств математического моделирования для решения разнообразных научноисследовательских задач;
- исследование новых информационных технологий и их применение для решения задач автоматизации научных исследований в Карельском научном центре РАН;
- исследование и разработка компьютерных систем связи;
- информатизация фундаментальных и прикладных научных исследований в Карельском научном центре РАН в области экологии и охраны природы;
- $-\,$ автоматизация проектирования транспортных и энергетических систем;
- создание систем моделирования энергетических объектов и изучение пространственно-

временного распределения возобновляемых энергетических ресурсов Карелии.

Очередным этапом в развитии Отдела стала подготовка к реорганизации его в Институт. Первые шаги в этом направлении были сделаны в феврале 1997 г., когда Ученый совет принял решение о целесообразности создания на базе ОМАД Института математики и анализа данных. Президиум Карельского научного центра РАН в марте того же года поддержал решение Ученого Совета о преобразовании ОМАД в Институт, а в апреле 1997 г. бюро Отделения математики РАН (постановление № 3 от 30.04.1997) поддерживает преобразование ОМАД в Институт математического профиля. Директором-организатором в апреле 1998 г. приглашается из Сибирского отделения РАН В. В. Мазалов (Читинский институт природных ресурсов СО РАН). В ходе подготовки к преобразованию в декабре 1998 г. утверждается новая структура ОМАД в составе лабораторий:

- теории вероятностей и компьютерной статистики (зав. д. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов);
- математической кибернетики (рук. д. ф.-м. н. В. В. Мазалов);
- информационных компьютерных технологий (зав. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын);
- телекоммуникационных систем (рук. к. т. н. А. Д. Сорокин);
- моделирования природно-технических систем (зав. к. т. н. Γ . А. Борисов, с 1999 г. д. ф.-м. н. Ю. В. Заика).

В июне 1999 г. Президиум РАН принимает решение о реорганизации ОМАД в Институт прикладных математических исследований (постановление № 187 от 29.06.1999). В 2000 г. общее собрание Отделения математики РАН избирает директором Института д. ф.-м. н. В. В. Мазалова. Большую помощь и содействие в реорганизации Отдела в Институт оказали вице-президент РАН академик А. А. Гончар, академик-секретарь Отделения математики РАН Л. Д. Фаддеев, зам. академика-секретаря Отделения математики РАН д. ф.-м. н. (академик РАН с 2011 г.) А. Б. Жижченко, Председатель Президиума Карельского научного центра РАН д. б. н. (член-корреспондент РАН с 2003 г.) А. Ф. Титов и помощник Председателя Карельского научного центра РАН к. т. н. Н. С. Пширков. Подготовку соответствующих документов о необходимости создания Института осуществлял к. т. н. А. Д. Сорокин. Основными направлениями исследований Института были утверждены следующие:

- исследование проблем дискретной математики, математического программирования, теории вероятностей, математической и прикладной статистики;
- исследование и разработка методов математического и информационного моделирования с целью решения экологических, энергетических и других проблем природной и социально-культурной среды Республики Карелия;
- исследование и разработка информационных и телекоммуникационных систем для обеспечения проведения фундаментальных исследований.

В течение полутора лет после создания Института были выбраны и утверждены руководящие органы, в том числе и Ученый совет, при сохранении прежней структуры института, разработан, утвержден и зарегистрирован в Министерстве юстиции Республики Карелия Устав Института.

За период функционирования Института значительно усилилась публикационная деятельность сотрудников, выпущено 9 сборников научных трудов Института «Методы математического моделирования и информационные технологии» (1999–2009 гг.), 4 выпуска серии «Математическое моделирование и информационные технологии» (2010–2013 гг.) журнала «Труды Карельского научного центра Российской академии наук», опубликовано 11 монографий и 19 учебных пособий. С 2009 г. институт совместно с Санкт-Петербургским госуниверситетом издает журнал «Математическая теория игр и ее приложения» (4 выпуска в год); последние пять лет ежегодно печатается более 50 статей в российских (из списка ВАК) и зарубежных журналах.

Активизировалась работа по грантам. В последние пять лет регулярно осуществлялась работа по 3 проектам фундаментальных иследований Отделения математических наук РАН, по 5 и 7 проектам РФФИ и РГНФ. Год от года укрепляются международные связи Института с зарубежными партнерами. Сотрудники приглашаются для чтения лекций и проведения совместных исследований в научные и учебные организации Испании, Франции, Италии, Германии, Финляндии и ряда других стран. Кроме того, участвуют в международных конференциях и семинарах за рубежом,

где выступают с докладами, в том числе и с пленарными.

На момент создания Института при нормативной численности 40 единиц в его составе работало 26 научных сотрудников, из них 3 доктора физико-математических наук и 9 кандидатов наук. При реорганизации Отдела в Институт нормативная численность была увеличена до 45 единиц. К настоящему моменту общая численность составляет 40 человек, в их числе 28 научных сотрудников, включая 7 докторов и 21 кандидата наук. В 1997 г. Отделение математики РАН разрешило аспирантскую подготовку по двум специальностям, а позднее добавилась еще одна специальность. Бессрочная лицензия на образовательную деятельность переоформлена в 2012 г. За время существования Института аспирантуру окончили более двух десятков человек, и в настоящее время в научных должностях работают 14 кандидатов наук, прошедших обучение в аспирантуре Института. За этот же период 2 чел. защитили докторские диссертации и 4 соискателя – кандидатские. Доля исследователей в возрасте до 39 лет составляет половину из общей численности научных сотрудников. Средний возраст докторов наук на 01.01.2014 г. составляет 60,4 года, кандидатов наук -40,3 года.

За годы функционирования Института значительно укрепилась его материальнотехническая база. Рабочие места сотрудников и аспирантов обеспечены персональными компьютерами, имеющими выход в сеть Интернет. Осуществляется координация работ в области телекоммуникаций в КарНЦ РАН, Институт ведет администрирование серверов центрального коммуникационного узла (ЦКУ) и техническую поддержку пользователей компьютерной сети КарНЦ РАН. В 2008 г. по подготовленному в Институте обоснованию КарНЦ РАН приобрел вычислительный кластер производительностью 851 Гфлопс, который позднее был передан в безвозмездное пользование Институту. На его базе в 2009 г. организован Центр коллективного пользования (ЦКП) «Центр высокопроизводительной обработки данных» руководитель к. ф.-м. н. И. А. Фалько, а с 2010 г. – к. ф.-м. н. Е. Е. Ивашко.

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ И ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ НАУК ОБ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ» (CITES-2013)

(Петрозаводск, 25 августа – 5 сентября 2013 г.)

С 25 августа по 5 сентября в Петрозаводске состоялись международная конференция и школа молодых ученых, посвященные вычислительным и информационным технологиям для наук об окружающей среде «CITES-2013».

Организаторы конференции: Сибирский центр климато-экологических исследований и образования (СЦ КЛИО), Институт прикладных математических исследований (ИПМИ) КарНЦ РАН, Институт вычислительной математики (ИВМ) РАН, Институт мониторинга климатических и экологических систем (ИМКЭС) СО РАН, Научно-исследовательский вычислительный центр (НИВЦ) МГУ, Институт водных проблем Севера (ИВПС) КарНЦ РАН, Карельский научный центр (КарНЦ) РАН, Петрозаводский государственный университет (ПетрГУ).

Председатель Программного комитета школы-конференции СІТЕS-2013 — академик В. П. Дымников (ИВМ РАН).

Члены Программного комитета: проф. A. Бакланов (Danish Meteorological Institute, Н.Ф. Дания), чл.-корр. PAHЕланский (Институт физики атмосферы PAH), чл.-корр. РАН В. В. Зуев (ИМКЭС СО РАН), чл.-корр. РАН В.Н. Лыкосов (ИВМ РАН, Московский государственный университет), чл.-корр. РАН И.И. Мохов (Институт фиатмосферы PAH), чл.-корр. Н. Н. Филатов (ИВПС КарНЦ РАН), проф. Е.П. Гордов (СЦ КЛИО, ИМКЭС СО РАН), проф. В.В. Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН), докт. П. Гройсман (NOAA, США), проф. В. Н. Крупчатников (СибНИГМИ, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН), д. ф.-м. н. В. А. Крутиков (ИМКЭС СО РАН), проф. М. Кулмала (Finnish Meteorological Institute, Финляндия), проф. В. В. Пененко (Институт вычислительной математики и математический геофизики СО РАН), проф. А.А. Рогов (ПетрГУ), проф. Л. А. Руховец (СПб Экономикоматематический институт РАН), проф. Ч. Шмуллиус (Friedrich-Schiller-University, Германия), проф. А. З. Швиденко (International Institute for Applied System Analysis, Австрия), к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын (КарНЦ РАН), проф. С. Зилитинкевич (Finnish Meteorological Institute, Финляндия).

С 25 по 31 августа на базе учебнооздоровительного центра «Урозеро» Карельского регионального института управления, экономики и права ПетрГУ проводилась школа молодых ученых, в работе которой особое внимание уделялось исследованию океана и климата. Рассмотрено взаимодействие атмосферы и океана, атмосферы и гидрологических объектов суши на разных временных и пространственных масштабах, а также обсуждались другие задачи использования вычислительно-информационных технологий в науках об окружающей среде.

В первые два дня ведущими специалистами в данной области были представлены семь концептуальных лекций. Затем в течение четырех последующих дней участникам прочитаны специальные тематические лекции и организованы практические занятия для закрепления и усвоения материала. Занятия проводились в оборудованных компьютерных классах в студенческом бизнес-инкубаторе ПетрГУ.

Научная программа школы включала лекционные курсы, посвященные рассмотрению следующих направлений: взаимодействие атмосферы и океана на различных временных и пространственных масштабах; моделирование динамики океана, морей и внутренних водоемов; геофизические пограничные слои; система усвоения гидрофизических полей; региональные аспекты взаимодействия атмосферы и гидросферы; модели динамических и эволюционных игр в задачах экологии; кли-



матические проблемы Арктики и Субарктики. Темы предложенных спецкурсов: долгопериодная изменчивость в климатической системе; исследование чувствительности океанской циркуляции на основе использования флуктационно-диссипационной теоремы; проблемы Белого моря, Ладожского и Онежского озер; моделирование поверхностных волн; океанографические проблемы сезонного прогноза погоды.

По завершении этой работы молодые ученые и лекторы приняли участие в международной конференции CITES-2013. Конференция открылась 31 августа 2013 г. практической секцией, посвященной ознакомлению с экологическим состоянием прибрежной зоны Онежского озера. В ходе работы секции участники посетили музей-заповедник «Кижи». С 1 сентября началась работа тематических секций конференции CITES:

- Моделирование и анализ региональных атмосферных процессов.
- Моделирование и анализ регионального состояния подстилающей поверхности и ее гидрологического режима.
- Моделирование и анализ регионального климата.
- системы для наук о Земле.
- Математические методы в экологии.

В рамках конференции проводилось рабочее совещание NEESPI/SIRS под председательством докт. П. Гройсмана, проф. Е. П. Гордова и проф. В. В. Мазалова. Оно было посвящено различным аспектам изменений регионального климата в Северной Евразии и их взаимосвязи с глобальными процессами. На совещании представлены результаты проектов, координируемых NEESPI и SIRS. В частности, большое внимание уделялось основной теме школы молодых ученых — «Океан и климат», обсуждались дальнейшее развитие/транформация NEESPI и новые инициативы, посвященные исследованиям окружающей среды Северной Евразии.

Большой интерес вызвали доклады о глобальных изменениях климата (чл.-корр. РАН В. В. Зуев, проф. Е. П. Гордов). Резонансным было выступление проф. А.А. Жиглявского, имеющего альтернативный взгляд на проблему глобального потепления. Большое количество интересных докладов было посвящено задачам моделирования Мирового океана (проф. Н. Г. Яковлев, проф. А. Г. Георгиади). Наряду с работами известных ученых на конференции обсуждались доклады молодых исследователей, в том числе участников школы (И. Г. Окладникова, А. Н. Пененко, А. К. Монзиковой, Е.И. Морару и др.). Сотрудники ИПМИ КарНЦ РАН приняли активное участие в работе секции «Математические методы в экологии».

Участники конференции получили электронные материалы, содержащие расширенные тезисы всех докладов. Презентации до-• Данные и информационно-вычислительные кладов участников выставлены на сайте http://www.scert.ru/en/conferences/Cites2013/ materials. По результатам работы конференции и школы было принято решение об издании коллективной монографии «Модели и методы в проблеме взаимодействия атмосферы и гидросферы», содержащей материалы прочитанных лекций и наиболее интересных выступлений.

Е. К. Костикова, А. Н. Реттиева

МЕЖДУНАРОДНОЕ РАБОЧЕЕ СОВЕЩАНИЕ «СЕТЕВЫЕ ИГРЫ И МЕНЕДЖМЕНТ»

(Петрозаводск, 23–25 июня 2013 г.)

Летом 2013 г. недалеко от г. Петрозаводска, на территории базы ПетрГУ «Урозеро» проводилось очередное международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент» («Networking Games and Management»). Совещание было организовано Институтом прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводским государственным университетом и Государственным институтом исследований в информатике и автоматике INRIA (Франция) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РАН, Президиума Российской академии наук и Программы стратегического развития ПетрГУ.

Данное совещание является традиционным, проходит уже четвертый раз и продолжает серию совещаний в области сетевых игр. Первое мероприятие, посвященное этой тематике, состоялось в 2002 г. («Сетевые игры и распределение ресурсов» «Networking Games and Resource Allocation»), затем, начиная с 2009 г., оно стало проводиться под постоянным названием «Сетевые игры и менеджмент» («Networking Games and Management»). Традиционно все совещания организовывались перед международной конференцией «Теория игр и менеджмент» («Game Theory and Management») в г. Санкт-Петербурге, так как тематики этих двух мероприятий имеют много общего.

В рабочем совещании приняли участие 36 человек, включая четверых представителей Германии, Франции, Финляндии и Украины. В состав Программного комитета вошли ведущие российские и зарубежные ученые: председатель В. В. Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск), С. Алто (Университет Аалто, Финляндия), Э. Альтман, К. Авраченков (INRIA, Франция), А. Ю. Гарнаев (СПб-ГУ, Санкт-Петербург), А. В. Гуртов (Институт информационных технологий г. Хельсинки, Финляндия), А. Н. Дудин (БГУ, Минск,

Беларусь), П. Джако (Университет Ланкастера, Великобритания, и ВСАМ, Бильбао, Испания), Х. Камеда (Университет Тсукуба, Ибараки, Япония), Б. Монин (Университет г. Падерборна, Германия), Е. В. Морозов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск), И. Норрос (Технический исследовательский центр Финляндии VTT, Хельсинки, Финляндия), Д. А. Новиков (ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова, Москва), М. Пагано (Университет г. Пизы, Италия), Л. А. Петросян (СПбГУ, Санкт-Петербург), Б. Стюарт (Университет Гента, Бельгия), К. Шайовски (Институт математики, Вроцлавский университет технологий, Польша), А. А. Васин (МГУ, Москва), A. B. Воронин (ПетрГУ, Петрозаводск), А. Б. Жижченко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва).

Тематика данного рабочего совещания была посвящена обсуждению последних разработок в области теории игр в сетях и управления. Работа семинара проводилась по следующим направлениям: сетевые игры и управление, задачи оптимальной маршрутизации, аукционы, переговорные задачи, игры с обучением и адаптивные игры. Представленные на совещании доклады вызвали большой интерес у участников, что нашло свое отражение в оживленных дискуссиях. Особо стоит отметить пленарный доклад проф. Б. Монина (Университет Падерборна, Германия) «Сложность вычисления равновесий» (The Complexity of Computing Equilibria), в котором обсуждались проблемы вычислительной сложности нахождения равновесных ситуаций в задачах оптимальной маршрутизации и баланса нагрузки в сети. Также большой интерес вызвали пленарные доклады К. Авраченкова (INRIA, Франция) и А. Ф. Кононенко (ВЦ РАН, Москва). Всего прозвучало 29 докладов, из которых 6 пленарных. Секционные доклады были представлены на трех секциях: Сети и теория очередей (Networking and Queuing),



Сетевые игры (Networking Games), Социальные сети (Social Networks). Также в рамках семинара проводилась школа молодых ученых с курсом лекций на тему «Равновесие в телекоммуникационных системах».

К началу совещания были изданы расширенные тезисы докладов, с которыми можно ознакомиться на сайте http://mathem.krc.karelia.ru/event.php?id=184 & plang=r. По результатам работы совещания

приняты следующие решения: продолжить серию рабочих совещаний на тему «Сетевые игры и менеджмент», опубликовать избранные результаты, представленные на совещании, в будущих выпусках научного журнала «Математическая теория игр и ее приложения» (http://mgta.krc.karelia.ru).

В. В. Мазалов, Ю. В. Чиркова, А. А. Ивашко

ПЕРВАЯ РОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА БАЗЕ BOINC: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ» (BOINC:FAST)

(Петрозаводск, 9-13 сентября 2013 г.)

В сентябре 2013 года на базе ПетрГУ под Петрозаводском, на берегу озера Урозеро была проведена первая российская конференция «Высокопроизводительные вычисления на базе ВОІNС: фундаментальные исследования и разработки». На конференции обсуждались вопросы использования программной платформы ВОІNС в организации высокопроизводительных вычислений на базе Desktop Grid грид-систем, создаваемых из персональных компьютеров. Организаторами конференции выступили Институт прикладных математических исследований (ИПМИ) КарНЦ

РАН, Институт проблем передачи информации РАН, Петрозаводский государственный университет и ЦКП КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных».

Небольшая по масштабам, конференция примечательна своей географией: Иркутск и Пенза, Москва, Курск и Петрозаводск, доклад представил аспирант из Китая Тянь Бо, проходящий обучение в МГУ, для участия в конференции в Петрозаводск вернулась аспирантка ИПМИ Наталия Никитина, временно прервав стажировку в г. Любеке (Германия). Специально для конференции записал свой ви-

деодоклад руководитель и главный разработчик проекта ВОІЛС Дэвид Андерсон (США), в котором он представил современное состояние отрасли и планы на будущее. В режиме телеконференции выступил председатель International Desktop Grid Federation Роберт Ловас (Венгрия), рассказавший о деятельности организации. Не менее интересны были и другие доклады. На конференции рассказывалось об опыте реализации расчетных проектов, использовании BOINC-грид в рамках одной организации, интеграции BOINC с вычислительными кластерами, повышении производительности проектов на основе специальных математических моделей, обработке больших наборов данных в BOINC-грид, моделировании телекоммуникационных сетей и многом другом.

Конференции оказал информационную поддержку журнал «Суперкомпьютеры»: каждый участник получил по два номера журнала среди раздаточных материалов, а в первом номере 2014 г. опубликована статья об итогах конференции. Финансовую поддержку предоставили Российский фонд фундаментальных исследований и Петрозаводский государственный университет (в рамках Программы стратегического развития). К конференции было приурочено и объявление о начале сотрудничества с мировым лидером

GP GPU — компанией NVIDIA, которая безвозмездно предоставила свои видеокарты и учебно-методическую помощь для организации в Петрозаводском государственном университете учебных курсов по программированию на языке CUDA.

В рамках конференции был организован круглый стол «Проекты добровольных вычислений: диалог разработчиков и участников», в котором приняли участие как исследователи, разработчики проектов, так и представитель информационного портала BOINC.ru — крупнейшего российского ресурса, объединяющего русскоговорящих добровольцев, участвующих в различных BOINC-проектах.

Другим важным мероприятием стало заседание российского отделения International Desktop Grid Federation, на котором участники обсудили приоритетные направления сотрудничества, в том числе международного, меры по развитию и повышению популярности Desktop Grid в России, создание новых проектов и привлечение пользователей и ученых к использованию Desktop Grid.

Следующая встреча исследователей, на которой широко обсуждались вопросы развития Desktop Grid, — Национальный суперкомпьютерный форум, который прошел в конце ноября в г. Переславле-Залесском.

Е. Е. Ивашко



НАЦИОНАЛЬНЫЙ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЙ ФОРУМ

(Переславль-Залесский, 26–29 ноября 2013 г.)

Национальный суперкомпьютерный форум — одно из основных научных мероприятий российской отрасли высокопроизводительных вычислений. Форум ежегодно проводится на базе Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН в г. Переславле-Залесском и является крупной площадкой, на которой встречаются представители самых разных российских научных организаций и ведущих коммерческих компаний. В пленарных докладах и в рамках девяти секций были представлены результаты научных исследований, перспективы развития российской и мировой суперкомпьютерной отрасли, результаты суперкомпьютерного моделирования в различных областях.

В одном из первых докладов — «Развитие и внедрение отечественных суперкомпьютерных технологий в наукоемкие отрасли промышленности», — представленном группой авторов из ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» (г. Саров), рассказывалось об использовании специального высокопроизводительного программного обеспечения для проектирования и виртуальных испытаний ведущей российской техники — самолета Сухой Суперджет-100 и двигателей для него, новейших модификаций грузовых автомобилей КамАЗ, двигателей ракеты «Ангара» и даже проектируемых атомных реакторов. Использовавшиеся в этих проектах пакеты программ инженерного анализа тоже являются разработкой РФЯЦ-ВНИИЭФ и были продемонстрированы на мастер-классе.

Представитель ЗАО «МЦСТ» в докладе «Платформа "Эльбрус" — шаг к отечественному суперкомпьютеру» обозначил перспективы отечественных микропроцессоров в суперкомпьютерной гонке. Архитектура «Эльбрус» развивается с начала 1970-х гг., на сегодняшний день микропроцессоры на базе этой архитектуры используются в отечественных компьютерах — начиная от суперкомпьютеров, заканчивая персональными.

Блок докладов о возможностях коммерциализации наукоемких проектов был представлен Инновационным центром «Сколково» и Российской венчурной компанией, рассказавшими о перспективах развития научных проектов, которые появляются благодаря коммерциализации.

Соорганизатором Национального суперкомпьютерного форума выступил ИПМИ КарНЦ РАН, проводивший совместно с Институтом проблем передачи информации РАН секцию «Гриды из рабочих станций и комбинированные гриды», а научный сотрудник института Е. Е. Ивашко вошел в состав Программного комитета конференции. Для участников секции форум стал продолжением конференции BOINC:FAST, проведенной двумя месяцами ранее в Петрозаводске.

Опыт Центра распределенных вычислений ИППИ РАН в области развития технологий добровольных вычислений был представлен М. А. Посыпкиным. Исследования ИППИ РАН в области Desktop Grid имеют широкий спектр — от разработки концепции «облачного» сервиса управления комбинированными вычислительными инфраструктурами, включающего как вычислительные кластеры и грид кластеров, так и публичные «облака» и Desktop Grid, до проекта по моделированию функционирования телекоммуникационных сетей на базе BOINC.

Сотрудники ИПМИ КарНЦ РАН Е. Е. Ивашко и А. С. Румянцев представили доклады с рассказом об исследованиях, проводимых в институте: о концепции корпоративных Desktop Grid, приложениях на их основе и повышении производительности Desktop Grid благодаря эффективным политикам планирования ресурсов, найденным на основе специальных математических моделей.

Взгляд на научные исследования со стороны пользователей, предоставляющих ресурсы своих компьютеров для Desktop Grid, представил координатор сайта BOINC.RU A. Л. Ан-

дреев в докладе «Добровольные распределенные вычисления в России глазами кранчера. Современное состояние и перспективы развития». С другой стороны научных исследований — рассказ О. С. Заикина о проекте SAT@home, активно использующем добровольные вычисления.

В итоге научная программа конференции оказалась очень насыщенной и интересной, а сделанные доклады станут отправной точкой для новых, еще более глубоких исследований.

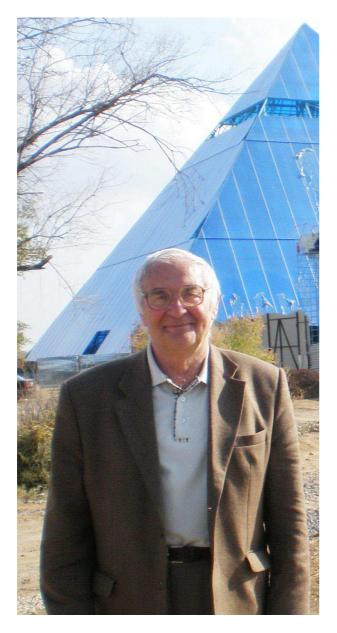
Е. Е. Ивашко



ЮБИЛЕИ И ДАТЫ

ВАЛЕНТИН ФЕДОРОВИЧ КОЛЧИН

(к 80-летию со дня рождения)



В этом году исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося математика, доктора физико-математических наук, профессора, академика Академии криптографии Рос-

сийской Федерации, члена редколлегии серии «Математическое моделирование и информационные технологии» Трудов Карельского научного центра РАН Валентина Федоровича Колчина. Он родился 20 февраля 1934 г. в Москве. После окончания в 1957 г. механикоматематического факультета Московского государственного университета работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в настоящее время В. Ф. Колчин — ведущий научный сотрудник Отдела дискретной математики. Его учителями были академик АН СССР Ю. В. Прохоров и членкорреспондент АН СССР Б. А. Севастьянов.

В. Ф. Колчин является крупным специалистом по теории вероятностей, дискретной математике, теории графов, комбинаторике. Его результаты внесли заметный вклад в развитие теории случайных объектов, в частности, случайных размещений, случайных отображений и подстановок, случайных графов, случайных уравнений, ветвящихся случайных процессов. Широко известны также его достижения в теории суммирования случайных величин, особенно при доказательстве локальных предельных теорем в схеме серий.

В. Ф. Колчин предложил так называемую обобщенную схему размещения частиц по ячейкам. Эта схема позволяет сводить многие перечисленные комбинаторные задачи к исследованию локального асимптотического поведения серий сумм независимых случайных величин, что существенно облегчает получение результатов по сравнению с другими методами, а во многих случаях применение данной схемы является единственным известным методом решения таких задач. Важным достоинством этого подхода является возможность для доказательства предельных теорем использовать хорошо известный в теории вероятностей метод характеристических функций. В настоящее время известно много примеров успешного применения схемы размещения

для решения важных теоретических и прикладных проблем вероятностной комбинаторики, но потенциал предложенного В. Ф. Колчиным метода далеко не исчерпан, поскольку число таких примеров постоянно увеличивается. Важную роль сыграло обнаружение В. Ф. Колчиным связи между графами, например, деревьями и лесами, ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона и обобщенной схемой размещения. Благодаря этому в работах Колчина и его учеников получено много новых результатов как о случайных графах, так и о ветвящихся процессах. Валентин Федорович воспитал много учеников, успешно защитивших кандидатские и докторские диссертации, одним из которых является и автор этой заметки.

В. Ф. Колчин внес большой вклад в становление и развитие Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, частности, он принимал непосредственное личное участие в защитах диссертаций ряда сотрудников нашего института. Валентин Федорович является главным организатором (и неоднократным председателем Оргкомитета) традиционных международных Петрозаводских конференций «Вероятностные методы в дискретной математике», которые проходят раз в четыре года, с 1983 г. их проведено уже восемь. Важнейшим результатом этих конференций было создание в 1989 г. одного из ведущих отечественных математических журналов «Дискретная математика», главным редактором которого многие годы был В. Ф. Колчин.

Среди увлечений В. Ф. Колчина можно отметить спорт. Он любит футбол, горные лыжи, а также рыбалку, в том числе и в Карелии. Валентина Федоровича отличает очень внимательное и доброжелательное отношение к людям, порядочность, простой и веселый характер, у него много друзей, с которыми его связывают многолетние и теплые отношения. Коллектив сотрудников ИПМИ сердечно поздравляет юбиляра и желает ему крепкого здоровья и успехов.

Ю. Л. Павлов

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ В. Ф. КОЛЧИНА

1966. Скорость приближения к предельным распределениям в классической задаче о дробинках // Теория вероятностей и ее применения, 11, № 1. С. 128–140.

1967. Один случай равномерных локальных предельных теорем с переменной решет-

кой в классической задаче о дробинках // Теория вероятностей и ее применения, 12, \mathbb{N} 1. С. 57–67.

- **1968.** A certian class of limit theorems for conditional distribution // Litovskii math. sb, 8. P. 53–63.
- **1969.** О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме // Теория вероятностей и ее применения, 14, № 3. С. 476–487.
- **1971.** Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок // Теория вероятностей и ее применение, 16, N 1. С. 67–81.
- **1974.** On a combinatorial limit theorem // Theory Probab. Appl., 18, № 4. Р. 728–739. (Соавт. В. П. Чистяков.)

О предельных распределениях одной статистики // Теория вероятностей и ее применения, 19, № 2. С. 367–374. (Соавт. В. П. Чистяков.)

- **1975.** К цикловой структуре случайных подстановок // Математические заметки, 18, \mathbb{N} 6. Р. 929–938. (Соавт. В. П. Чистяков.)
- **1976.** Задача о размещении частиц и случайные отображения // Теория вероятностей и ее применения, 21, № 1. С. 48–62.

Случайные размещения. М.: Наука, 223 с. (Соавт. Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков.)

- **1977.** Ветвящиеся процессы, случайные деревья и обобщенная схема размещения частиц // Математические заметки, 21, N 5. P. 691–705.
- **1978.** Момент вырождения ветвящегося процесса и высота случайного дерева // Математические заметки, 24, № 6. Р. 859–870.

Random allocations. Washington, Winston and Sons, 262 р. (Соавт. Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков.)

- **1984.** Случайные отображения. М.: Наука. 207 с.
- **1986.** О поведении случайного графа вблизи критической точки // Теория вероятностей и ее применения, 31, № 3. С. 503–515.

Random mappings. New York, OSPD, 207 p. Random mappings and branding processes // Proceedings of the 1st World Congress of the Bernoulli Society. V. 1, Utredit, VMU Sci. Press, 211–218.

- **1989.** О числе подстановок с ограничениями на длины циклов // Дискретная математика, 1, № 2. С. 97–109.
- **1990.** О числе циклов в случайном неравновероятном графе // Дискретная математика, 2, N_2 3. С. 137—145. (Соавт. В. И. Хохлов.)

- **1992.** О совместности системы случайных сравнений // Дискретная математика, 4, N 3. С. 75–85.
- **1995.** Пороговый эффект для систем случайных уравнений специального вида // Дискретная математика, 7, \mathbb{N} 4. С. 29–39. (Соавт. В. И. Хохлов.)
- 1997. Systems of random linear equations with small number of non-zero coefficients in finite fields // Probabilistic methods in discrete mathematics, Utrecht, VSP. P. 295–304.
- **1999.** Random graphs. Cambridge, Cambridge University Press, 252 p.

Ветвящиеся процессы и случайные гипердеревья // Дискретная математика, 11, № 1. С. 7—23.

Пороговое свойство для систем уравнений в конечных полях // Дискретная математика, 11, № 3. С. 15—23.

2000. Случайные графы. М.: Физматлит. 256 с.

2006. О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика, 18, № 4. С. 113–127. (Соавт. А. В. Колчин.)

2007. Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика, 19, № 3. С. 15–21. (Соавт. А. В. Колчин.)

2010. Random graphs. 2nd ed Cambridge, Cambridge University Press, 252 p.

ГАЛИНА ВЛАДИМИРОВНА ВОИНОВА

(к 75-летию со дня рождения)



Галина Владимировна Воинова родилась 19 июля 1939 года в г. Кировске Мурманской области. После окончания средней школы с серебряной медалью в г. Апатиты Мурманской области в 1956 году поступила в Петрозаводский государственный университет на физикоматематический факультет, который окончила в 1961 г. с отличием. После окончания учебы была направлена на работу в Карельский филиал АН СССР (КФ АН СССР) в отдел энергетики, где трудилась с 1961 по 1963 год в должности старшего лаборанта, младшего научного сотрудника. В связи с реорганизацией Карельского филиала АН СССР была переведена в КарНИИЛП, где продолжала работать до 1971 г. в должности м. н. с., исполня-

ющей обязанности ученого секретаря отделения систем управления. В 1971 г. перешла на работу в лабораторию математических методов и вычислительной техники КФ АН СССР на должность старшего инженера. В 1973 г. вышеупомянутая лаборатория была реорганизована в Отдел математических методов и вычислительной техники при Институте леса КФ АН СССР, а в 1975 г. был организован Отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП) с непосредственным подчинением Президиуму филиала, в котором Г. В. Воинова была назначена ученым секретарем. В должности ученого секретаря ОМ-МАНИП, а с 1992 года – Отдела математики и анализа данных (ОМАД) Г. В. Воинова проработала 24 года. После создания Института прикладных математических исследований (ИПМИ) КарНЦ РАН в 1999 г. она работала заместителем директора по общим вопросам с совмещением обязанностей главного экономиста, а с января 2002 г. и по настоящее время - в должности зам. директора института по экономическим и кадровым вопросам.

Г. В. Воинова является высококвалифицированным специалистом в области разработки математических моделей и систем программ механизированного проектирования продольного профиля лесовозных дорог, водоотводящих и мелиоративных каналов, составления смет их строительства. Системы автоматизированного проектирования вышеупомянутых объектов в 70–80-х годах прошлого века были успешно внедрены в десятках проектных организаций страны, представлены на ВДНХ и награждены тремя бронзовыми медалями.

За время работы в Отделе ММАНИП Галина Владимировна являлась ответственным исполнителем и руководителем разработки системы автоматизированного проектирования объектов лесоосушения, повышала свою квалификацию посредством учебы в заочной аспирантуре. По результатам исследований и

разработок Γ . В. Воинова имеет 40 научных трудов, из них 25 печатных, материалы исследований докладывались на различных конференциях.

Г. В. Воинова, работая в должности ученого секретаря Отдела с 01.04.1975 г., накопила большой опыт проведения научноорганизационной работы и делопроизводства в научном учреждении. Одновременно выполняла обязанности экономиста, освоила работу планово-финансового отдела: учет затрат по бюджетным, грантовским и хоздоговорным работам, составление штатного расписания. Принимала активное участие в разработке программ на ПЭВМ по ведению финансовобухгалтерского учета, являлась руководителем раздела по автоматизации управленческих задач в КарНЦ РАН. Отличные знания научно-организационного процесса проведения исследований позволяют ей успешно решать разнообразные вопросы деятельности Института.

Галина Владимировна принимала активное участие в общественной жизни коллектива, являлась членом экспертных комиссий Филиала и Отдела, редакционно-издательского и библиотечного советов научного центра, комиссии по распределению жилья для молодых ученых центра. Ее характеризует высокая ответственность за порученное дело, творческое отношение к своим обязанностям.

Г. В. Воинова – одна из самых ярких представителей института. Она не стареет с годами, обладает неуемной энергией, активно трудится на дачном участке. Это очень доброжелательный и внимательный человек. Она всегда готова оказать помощь и поддержку окружающим ее людям, особенно молодежи. Галина Владимировна пользуется уважением в коллективе.

За многолетний добросовестный труд и успехи в научно-организационной деятельности награждена: медалью «Ветеран труда» (1989), Почетной грамотой Российской академии наук и Профсоюза работников РАН

(2000), Почетной грамотой г. Петрозаводска (2005), Почетной грамотой Российской академии наук (2009), Почетной грамотой Республики Карелия (2014) и др.

Коллектив Института прикладных математических исследований поздравляет юбиляра, желает бодрости, оптимизма и дальнейших успехов на благо института.

А. Д. Сорокин, Т. П. Тихомирова

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Г. В. ВОИНОВОЙ

- **1967.** Математические модели организации производства земляных работ и их решение // Механизация строительства (в соавторстве).
- **1975.** Автоматизация проектирования лесомелиоративных каналов // Сб. Автоматизация проектирования линейных сооружений (в соавторстве).
- **1977.** Проектирование объектов лесоосушения с помощью ЭВМ «Минск-32» // Информационный листок Карельского межотраслевого ЦНТИ (в соавторстве).
- **1978.** Система автоматизированного проектирования лесомелиоративных каналов // Алгоритмы и программы. Гос. фонд алг. и программ СССР. Инф. бюл. 1 (21) (в соавторстве).
- **1980.** Система автоматизированного проектирования лесомелиоративных каналов. ВДНХ (в соавторстве).
- **1986.** ЭВМ в научных исследованиях и проектировании // Годы свершений.

Проектирование объектов лесоосушения с помощью ЭВМ типа EC // Информационный листок ЦНТИ (в соавторстве).

- **1989.** Система автоматизированного проектирования объектов лесоосушения (КАНАЛ-ЕС) // Программные средства инф. бюл., вып. 2 (в соавторстве).
- **2007.** Институт прикладных математических исследований // Карелия. Энциклопедия. Т. 1 (в соавторстве).

ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ МАЗАЛОВ

(к 60-летию со дня рождения)



Владимир Викторович Мазалов родился 6 марта 1954 г. в Магнитогорске Челябинской области. После окончания школы в 1971 г. поступил на факультет прикладной математики – процессов управления Ленинградского государственного университета, который окончил в 1976 г. Там же продолжил учебу в аспирантуре. В 1980 г. по распределению уехал на работу в Читинский политехнический институт. В 1981 г. защитил кандидатскую диссертацию, продолжая работать в институте в должности ассистента, старшего преподавателя. В 1984 г. был приглашен в Читинский институт природных ресурсов Сибирского отделения РАН (ЧИПР СО РАН) для организации лаборатории математического моделирования. В 1991 г. защитил докторскую диссертацию, в 1993 г. был избран директором ЧИПР СО РАН и работал в этой должности до 1998 г. В апреле 1998 г. по согласованию с бюро Отделения математики РАН В. В. Мазалов переводится в Отдел математики и анализа данных (ОМАД) Карельского научного центра РАН и назначается и. о. зав. отделом. В 1999 г. ОМАД реорганизуется путем преобразования в Институт прикладных математических исследований (ИПМИ) Карельского научного центра РАН, а В. В. Мазалов назначается директором-организатором Института. В 2000 г. Президиумом РАН он утвержден в должности директора ИПМИ Карельского научного центра РАН и работает им до настоящего времени.

В. В. Мазалов является ведущим специалистом в области теории игр и исследования операций. Основные научные результаты им получены при решении оптимизационных и минимаксных задач, связанных с управлением случайными процессами, он разработал новый подход к построению решений многокритериальных задач наилучшего выбора в условиях неопределенности. Это позволило исследовать широкий класс динамических и эволюционных игр, возникающих, в частности, в задачах экологии поведения животных, а также разработать методы нахождения равновесия в таких играх. Предложенные математические модели позволяют лучше понять эволюцию ряда важных аспектов поведения животных, таких как миграция, конкуренция за ресурсы, выбор партнера и фуражирование. Им также разработан принципиально новый подход к управлению биологическими популяциями на основе выделения охранной территории, полностью исследована классическая модель конкуренции Хотеллинга на плоскости, предложены новые теоретико-игровые модели переговоров.

Исследования В. В. Мазалова неоднократно были поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований (1993- $1995, \ 1996-1998, \ 2001-2003, \ 2006-2008, \ 2010-$ 2012, 2013–2015 гг.), Международного научного фонда ИНТАС, Швейцарского научного фонда, Немецкой службы академических обменов, Международной Соросовской образовательной программы, Шведского института, Японского фонда развития науки, Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН, Программы сотрудничества университетов Сиднея (Австралия) и Падерборна (Германия). Он являлся организатором летних школ молодых ученых «Математические проблемы в экологии»,

международных симпозиумов и семинаров по динамическим играм и приложениям, Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике, Международного рабочего совещания «Сетевые игры и распределение ресурсов», VI Российско-скандинавского симпозиума «Теория вероятностей и прикладная вероятность», школы молодых ученых и международной конференции «Вычислительные и информационные технологии для наук об окружающей среде».

В. В. Мазалов — научный редактор журналов: «Scientiae Mathematicae ряда Japonica» (Математическая ассоциация, Япония), «International Game Theory Review» (World Scientific, Сингапур), «International Nova Journal of Mathematics Game Theory and Algebra» (Nova Science Publishers, CIIIA), «Обозрение прикладной и промышленной математики», а также редактор ежегодника «Game Theory and Applications», издаваемого в Нью-Йорке издательством Nova Science Publishers и освещающего труды российских ученых. В 2009 г. он организовал журнал «Математическая теория игр и ее приложения» (4 выпуска в год), который включен в список ВАК, и является заместителем ответственного редактора; он также ответственный редактор серии «Математическое моделирование и информационные технологии» журнала «Труды Карельского научного центра Российской академии наук».

Результаты исследований В. В. Мазалова представлены в более чем 200 печатных работах, в том числе в 6 монографиях. За последние пять лет им опубликовано более 80 работ, в том числе 2 монографии.

- В. В. Мазалов активно участвует в подготовке научных кадров: в течение ряда лет преподавал в Забайкальском государственном педагогическом университете, в последние 15 лет преподает в Петрозаводском государственном университете $(\Pi e T p \Gamma Y)$ (профессор-совместитель по кафедре теории вероятностей и анализа данных), руководит дипломными работами и подготовкой магистерских диссертаций. Регулярно проводит семинары по теории игр с аспирантами и магистрантами ПетрГУ. Осуществляет научное руководство аспирантами. Под его руководством защищено 17 кандидатских диссертаций:
- 1. Винниченко С. В. «Задачи на правило остановки в минимаксной постановке» (1992, Санкт-Петербург).

- 2. Ковалев С. В. «Функция риска в задаче поиска глобального экстремума» (1994, Санкт-Петербург).
- 3. Кочетов Э. А. «Игры с оптимальной остановкой в условиях неполной информации» (1996, Санкт-Петербург).
- 4. Добрынина И. А. «Зоопланктон рек Верхнеамурского бассейна» (1997, Иркутск).
- 5. Панова С. В. «Динамические игры с оптимальной остановкой» (1998, Санкт-Петербург).
- 6. Забелин А. А. «Переговоры в динамических играх» (2001, Санкт-Петербург).
- 7. Фалько И. А. «Задача о продаже недвижимости» (2001, Санкт-Петербург).
- 8. Пешков Н. В. «Свойства оптимального момента остановки в задаче наилучшего выбора» (2003, Петрозаводск).
- 9. Журавлев Д. Н. «Последовательный анализ трафика вычислительной сети» (2004, Петрозаводск).
- 10. Реттиева А. Н. «Методы динамических игр в задаче управления биоресурсами: подход с введением заповедной зоны» (2004, Петрозаводск).
- 11. Чуйко Ю. В. «Сетевые игры и распределение ресурсов» (2006, Санкт-Петербург).
- 12. Токарева Ю. С. «Равновесие в арбитражных процедурах» (2008, Петрозаводск).
- 13. Фалько А. А. «Игры наилучшего выбора с несколькими участниками» (2009, Санкт-Петербург).
- 14. Калугина А. М. «Производящие функции в играх голосования» (2009, Петрозаводск).
- 15. Ивашко Е. Е. «Задачи наилучшего выбора с разладкой» (2010, Санкт-Петербург).
- 16. Трухина Л. И. «Кооперативные решения в задачах анализа информационных сетей» (2013, Петрозаводск).
- 17. Щипцова А. В. «Игровые модели размещения ресурсов и их приложения» (2013, Петрозаводск).

Аспиранты, обучающиеся под руководством В. В. Мазалова, поощрялись стипендией Республики Карелия за особые успехи в учебно-исследовательской деятельности, научно-техническом творчестве и т. д., а также были лауреатами конкурса «Лучшие аспиранты Российской академии наук», который объявляется Фондом содействия отечественной науке.

В. В. Мазалов неоднократно приглашался для проведения совместных исследований и чтения лекций в ведущие зарубежные университеты (Лозанна, Швейцария; Дрезден, Германия; Сидней, Австралия; Стокгольм, Шве-

ция и др.); выступал с докладами на международных конференциях, в частности, на IX Международном симпозиуме по динамическим играм и их приложениям, Аделаида, Австралия (декабрь 2000 г.); II Международной конференции «Теория игр и приложения», Китай (сентябрь 2007 г.); на Первом международном симпозиуме по алгоритмической теории игр, Падерборн, Германия (май 2008 г.); Европейском симпозиуме по исследованию операций, Бонн, Германия (июль 2009 г.); Бразильской конференции по теории игр в честь Джона Нэша, Сан-Паулу, Бразилия (август 2010 г.); Европейской конференции по комплексным системам, Вена, Австрия (сентябрь 2011 г.); 6-м Европейском конгрессе математиков, Краков, Польша (июль 2012 г.), 26-й Европейской конференции по исследованию операций, Рим, Италия (июль 2013 г.).

По количеству научной продукции (монографии, статьи в высокорейтинговых российских и зарубежных журналах, доклады на российских и международных конференциях высокого уровня) и числу кандидатов наук, прошедших подготовку в аспирантуре под его руководством, В. В. Мазалов занимает лидирующие позиции в нашем институте.

С 2002 по 2004 г. В. В. Мазалов был председателем диссертационного совета К 002.142.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика» (при ИПМИ КарНЦ РАН). Он является членом Президиума КарНЦ РАН, председателем Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, членом диссертационных советов по защите докторских диссертаций в ПетрГУ и Новгородском госуниверситете.

За успешную научную, научно-организационную и педагогическую деятельность В. В. Мазалов награжден Почетной грамотой Читинской обл. (1997 г.), Почетной грамотой Республики Карелия (2004 г.), Почетной грамотой Российской академии наук и Профсоюза работников Российской академии наук (2004 г.), Почетной грамотой г. Петрозаводска (2006 г.), в 2009 г. ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации».

Владимира Викторовича отличают большая трудоспособность, инициативность, простота в общении с сотрудниками. Он пользуется уважением коллег, любит спорт, с удовольствием бегает на лыжах и катается на горных лыжах, увлекается дайвингом, любит природу.

Коллектив сотрудников ИПМИ КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра и желает ему крепкого здоровья, творческих успехов в научной деятельности, интересных путешествий и встреч с коллегами.

В. Т. Вдовицын, А. Д. Сорокин

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ В. В. МАЗАЛОВА

1987. Игровые моменты остановки. Новосибирск: Наука. 189 с.

1990. Оптимальная остановка наблюдений в задачах управления случайными блужданиями // Теория вероятностей и ее применения. Т. 35, вып. 4. С. 669–676. (Соавт. С. В. Винниченко).

1992. Моменты остановки и управляемые случайные блуждания. Новосибирск: Наука. 104 с. (Соавт. С. В. Винниченко).

1999. Dipersal and inbreeding avoidance // American Naturalist. Vol. 154, N 3. Pp. 282–292. (Coabt. N. Perrin).

2000. Local competition, inbreeding, and the evolution of sex-biased dispersal // American Naturalist. Vol. 155, N 1. Pp. 116–127. (Coabt. N. Perrin).

2003. Location game on the plane // International Game Theory Review. Vol. 5, N 1. Pp. 13–25. (Coabt. M. Sakaguchi).

2006. An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object // Journal of Applied Probability, Vol. 43, N 1. Pp. 87–101. (Соавт. М. Татакі).

Wardrop Equilibria and Price of Stability for Bottleneck Games with Splittable Traffic // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 4286, Springer. Pp. 331–342. (Coabt. B. Monien, F. Schoppmann, K. Tiemann).

2008. Регулируемое равновесие в дискретной задаче разделения биоресурсов // Доклады Академии наук, МАИК Наука / Интерпериодика. Т. 423, N 3. C. 220–222. (Соавт. А. Н. Реттиева).

Nash equilibrium in two-sided mate choice problem // International Game Theory Review. Vol. 10, N 4. Pp. 421–435. (Coabt. A. A. Falko).

2010. Математическая теория игр и приложения. СПб.; М.; Краснодар: Лань. 446 с.

Fish wars and cooperation maintenance // Ecological Modelling 221. Pp. 1545:1553. (Coabt. A. N. Rettieva).

2012. Переговоры. Математическая теория. СПб.; М.; Краснодар: Лань. 304 с. (Соавт. А. Э. Менчер, Ю. С. Токарева).

Arbitration procedures with multiple arbitrators // European Journal of Operational Research. Vol. 217, Issue 1. Pp. 198–203. (Соавт. Yu. Tokareva).

АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КИРИЛЛОВ

(к 60-летию со дня рождения)



Александр Николаевич Кириллов родился 9 апреля 1954 в г. Ленинграде. С 1961 по 1971 г. учился в средней школе № 80 (с преподаванием ряда предметов на английском языке). Был победителем ленинградских городских олимпиад по математике, физике и литературе.

В 1971 г. А. Н. Кириллов поступил на факультет прикладной математики — процессов управления (ПМ-ПУ) Ленинградского госуниверситета (ЛГУ). После окончания учебы в 1976 г. поступил в аспирантуру ЛГУ. За время обучения в аспирантуре был деканом малого факультета ПМПУ, занимаясь организацией профориентационной работы с абитуриентами.

После аспирантуры с 1979 по 2010 г. работал на кафедре высшей математики Ленинградского государственного института целлюлозно-бумажной промышленности (с 1993 — Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, СПбГТУРП) ассистентом, доцентом (с 1986 г.). В 1988 г. ему присвоено звание допента.

В СПбГТУРП в течение нескольких лет А. Н. Кириллов работал заместителем декана

по научной работе факультета АСУТП и заместителем декана по воспитательной работе теплоэнергетического факультета. Избирался членом профкома СПбГТУРП.

В 1986–1988 гг. А. Н. Кириллов – член комиссии по математике Совета по контролю за приемом в вузы г. Ленинграда. Многократно участвовал в работе предметной экзаменационной комиссии по математике, с 2000 по 2010 г. – председатель предметной экзаменационной комиссии СПбГТУРП. С 2004 по 2009 г. – заместитель ответственного секретаря приемной комиссии. С 2004 по 2008 г. – ответственный за проведение ЕГЭ в СПбГТУРП, в 2006–2008 гг. – член городской конфликтной комиссии Санкт-Петербурга (при проведении ЕГЭ).

В 2009–2010 учебном году готовил команду студентов СПбГТУРП для участия в олимпиаде по математике среди вузов Санкт-Петербурга и Северо-Запада РФ. По результатам олимпиады команда заняла третье место (впервые за время существования СПбГТУРП).

В 2007–2010 г. был привлечен к работе в Санкт-Петербургском университете экономики и финансов для создания базы данных тестовых заданий по математике, которые используются, в частности, Министерством образования $P\Phi$ для проверки знаний студентов.

С 2010 г. – ведущий научный сотрудник лаборатории природно-технических систем Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. По совместительству работает профессором кафедры математического анализа ПетрГУ.

Основные области научных исследований А. Н. Кириллова: теория управления, динамические системы, гибридные системы, теория неподвижных точек, математическое моделирование технологических, экологических и экономических процессов, популяционная динамика.

А. Н. Кирилловым предложен подход к построению динамических систем со структурными изменениями на основе предложенных им концепции эволюционного времени и метода динамической декомпозиции. Получено обобщение классической модели Вольтерра, учитывающее миграционные процессы. Построены математические модели экономического роста в системах с переменной структурой, модели технологических процессов целлюлозно-бумажной промышленности и рационального природопользования. Предложены новые подходы к математическому моделированию режимов стабилизации нелинейных динамических систем за конечное время. Получены результаты в направлении развития классической теоремы Пуанкаре – Биркгофа (о двух неподвижных точках в кольце).

В 1983 г. А. Н. Кириллов защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (на факультете ПМ-ПУ в ЛГУ). Тема диссертации: «Исследование управляемости систем при смешанных ограничениях». В 2009 г. в ПетрГУ защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по теме «Методы математического моделирования динамики систем со структурными изменениями в задачах экологии и рационального природопользования». Является автором более 80 научных и 20 учебно-методических работ, руководит аспирантами.

А. Н. Кириллов – член Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, входит в редакционные коллегии журналов «Математическое моделирование и информационные технологии» (КарНЦ РАН) и «Вопросы анализа» (ПетрГУ). Работал председателем ГАК в ПетрГУ (специальность «математика»).

А. Н. Кириллов – почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации (2006), награжден грамотой Комитета по науке и высшей школе Правительства г. Санкт-Петербурга (2004), Благодарностью Министерства образования РФ (2001).

Помимо высокого профессионального уровня юбиляра характеризует увлечение английской литературой, литературоведением и историей, особенно такими периодами, как Отечественная война 1812 года, Великая французская революция и наполеоновские войны, движение декабристов.

Коллектив Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН поздравляет Александра Николаевича и желает ему дальнейших творческих успехов.

Ю. В. Заика

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ А. Н. КИРИЛЛОВА

- **1979.** Об оценке адекватности моделей объектов в задачах управления // Труды Военно-инженерного краснознаменного института им. А. Ф. Можайского. Вып. 592. С. 18–21. (Соавт. Р. М. Юсупов.)
- **1982.** Одна математическая модель распределения капитальных вложений // Экономика и математические методы. Т. 18. Вып. 5. С. 922–925.
- **1989.** Системы управления с переменной структурой технологическими объектами в ЦБП // Л.: ЛТИЦБП. 52 с. (Соавт. В. Н. Суриков.)
- 1997. The Stabilization Problem for Certain Class of Ecological Systems // International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering. Vol. 7. N 2. P. 247–251.
- **1999.** Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 6. Вып. 2. С. 318–336.
- **2006.** Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. Вып. 4. С. 127–131.
- **2008.** Нелинейная стабилизация динамических систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. № 12. С. 6–11.
- **2009.** Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. Т. 52. № 3. С. 23–28.
- **2011.** Моделирование динамики структур гибридных систем // Информационноуправляющие системы. № 4. С. 42–46.
- **2012.** Линейная алгебра в управляемой динамике // Курс лекций. Петрозаводск: Изд-во КарНЦ РАН. 102 с.
- **2013.** Some extensions of the Poincaré-Birkhoff theorem // Journal of fixed point theory and applications. Vol. 13. Issue 2. P. 611–625. (Coabt. V. Starkov.)

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее — Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершенных оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылается электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступна на сайте – http://transactions.krc.karelia.ru.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей -30 страниц, для оригинальных -25, для сообщений -15, для хроники и рецензий -5-6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи большего объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в д в у х $_{3}$ к $_{3}$ е м п л я р а х , напечатанных на одной стороне листа формата A4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: УДК к у р с и в о м на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; полное название организации — место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: ВВЕДЕНИЕ. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ. ВЫВОДЫ. ЛИТЕРАТУРА); благодарности; литература (с новой страницы).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8-10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на вклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. С с ы л к и на л и тер а т у р у в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Диа-граммы и графики не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов — в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5-2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления (http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем — работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTex 2ϵ) с использованием стилевого файла, который находится по aдресу http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755.

TABLE OF CONTENTS

| Yu. G. Abacumov, M. A. Verhoturova, V. G. Banin. APPROXIMATION CONSTANTS IN ESTIMATION OF LIP1 CLASS FUNCTIONS APPROXIMATION BY BASKAKOV'S TRIGONOMETRIC OPERATORS | 3 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B. Z. Belashev, A. V. Kabedev. GLOBAL OPTIMIZATION ALGORITHMS FOR DATA ANALYSIS | 6 |
| V. K. Bolondinskii, S. N. Sheremetiev. APPLICATION OF COSINOR- ANALYSIS TO INVESTIGATING OF DIURNAL CO_2 EXCHANGE DYNAMICS IN PINE SHOOTS | 14 |
| G. A. Borisov, T. P. Tikhomirova. ESTIMATION OF THE DYNAMIC COMPONENT OF LOAD LOSSES OF ENERGY FROM ELEMENTS OF POWER GRIDS | 25 |
| R. V. Voronov, O. V. Lukashenko, A. P. Moschevikin. AUTOMATIC RECALIBRATION OF A LOCAL POSITIONING SYSTEM BASED ON THE FINGERPRINTING TECHNIQUE | 29 |
| M. E. Galakhova, A. N. Kirillov. THE DYNAMICS OF ECONOMIC GROWTH WITH STRUCTURAL ALTERATIONS | 36 |
| H. Gao, V. V. Mazalov, J. Hu, A. V. Shchiptsova. EQUILIBRIUM IN LOCATION GAME ON AIRLINE MARKET | 41 |
| Yu. V. Zaika. ESTIMATION OF HYDROGEN THERMODESORPTION PARAMETERS | 48 |
| A. A. Ivashko. GAIN MAXIMIZATION PROBLEM IN THE URN SCHEME | 62 |
| A. N. Kirillov, N. V. Smirnov. PARAMETER ESTIMATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE BIOLOGICAL TREATMENT PROCESS IN AN AERATION TANK | 67 |
| A. V. Kolchin. AN APPLICATION OF THE GENERALISED ALLOCATION SCHEME TO ANALYSING A CLASS OF SEQUENCES GENERATED BY A SHIFT REGISTER | 75 |
| A. V. Kolchin, N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME | 80 |
| A. V. Lasunsky. MAINTAINING STEADY-STATE EQUILIBRIUM AFTER DISCRETIZATION OF THE SYSTEM | 87 |
| A. Yu. Lukyanov, A. A. Kogut, B. Z. Belashev. SOFTWARE AND HARDWARE SYSTEM OF RADON MONITORING | 93 |
| S. E. Mikheev. A SMOOTHING OF FUNCTIONS | 100 |
| S. E. Mikheev, P. D. Morozov. APPLICATION OF QUASIHERMITIAN CUBIC SPLINES FOR OVERSAMPLING OF AUDIO FILES | 106 |
| Yu. S. Tokareva. TENDER MODEL WITH ESTIMATION OF DIFFERENT PARAMETERS OF THE PROJECT | 116 |
| I. A. Cheplyukova. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE NUMBER OF MULTIPLE EDGES OF A VERTEX OF A CONFIGURATION GRAPH | 121 |
| I. A. Chernov. OPTIMAL REPLICATION OF TASKS IN A COMPUTING GRID | 130 |
| I. A. Chernov, A. V. Tolstikov. NUMERICAL MODELLING OF THE WHITE SEA LARGE-SCALE DYNAMICS | 137 |
| N. Yu. Enatskaya, E. R. Khakimullin, A. V. Kolchin. ANALYSIS OF A SCHEME OF ALLOCATING INDISTINGUISHABLE PARTICLES TO INDISTINGUISHABLE CELLS | 143 |
| V. Kornikov, A. Pepelyshev, A. Zhigljavsky. STATISTICAL FORECASTING OF EARTH TEMPERATURE RECORDS | 155 |
| CHRONICLE | |
| A. D. Sorokin. The Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre RAS turned 15 | 162 |
| E. K. Kostikova, A. N. Rettieva. International Conference and Young Scientists School on Computational Information Technologies for Environmental Sciences: «CITES-2013», Petrozavodsk, Russia, 25 August – 5 September, 2013 | 166 |

| V. V. Mazalov, Y. V. Chirkova, A. A. Ivashko. International workshop «Networking Games and Management», June 23–25, 2013 | 168 | | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--|--|--|
| E. E. Ivashko. 1 st Russian Conference «BOINC:FAST: Basic and Applied Science for Technology», Petrozavodsk, September 9–13, 2013 | | | | |
| E. E. Ivashko. National Super Computing Forum, Pereslavl-Zalesski, November 26–29, 2013 | 171 | | | |
| DATES AND ANNIVERSARIES | | | | |
| Yu. L. Pavlov. Valentin F. Kolchin (on the 80 th anniversary) | 173 | | | |
| A. D. Sorokin, T. P. Tikhomirova. Galina V. Voinova (on the 75 th anniversary) | 176 | | | |
| V. T. Vdovitsyn, A. D. Sorokin. Vladimir V. Mazalov (on the 60 th anniversary) | 178 | | | |
| Yu. V. Zaika. Aleksander N. Kirillov (on the 60 th anniversary) | | | | |
| INSTRUCTIONS FOR AUTHORS | 183 | | | |

Научное издание

Труды Карельского научного центра Российской академии наук

№ 4, 2014

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Печатается по решению Президиума Карельского научного центра РАН

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-48848 от 02.03.2012 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Редактор А. И. Мокеева Оригинал-макет Е. Н. Спектор Стилевой файл А. С. Румянцев

Подписано в печать 27.06.2014. Формат $60x84^{1}/_{8}$. Гарнитура СМR. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 21,16. Усл. печ. л. 21,86. Тираж 500 экз. Изд. № 472. Заказ 226.

Карельский научный центр РАН Редакционно-издательский отдел 185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50