Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 3–5

УДК 517.51

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ КОНСТАНТАХ В ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА LIP 1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ БАСКАКОВА

Ю. Г. Абакумов[1], М. А. Верхотурова[1], В. Г. Банин[2]

[1] *Забайкальский государственный университет*
[2] *Финансовый университет при Правительстве РФ*

Рассматриваются некоторые вопросы, касающиеся оценочных и точных констант в оценках приближения функций классов Lip1 тригонометрическими операторами Баскакова.

Ключевые слова: аппроксимационные константы, тригонометрические операторы Баскакова.

Yu. G. Abakumov, M. A. Verhoturova, V. G. Banin. APPROXIMATION CONSTANTS IN ESTIMATION OF LIP1 CLASS FUNCTIONS APPROXIMATION BY BASKAKOV'S TRIGONOMETRIC OPERATORS

Some aspects of estimation constants application in approximation of functions from *Lip*1 class by Baskakov's trigonometric operators are considered.

Key words: approximation constants, Baskakov's trigonometric operators.

1. Общие сведения о тригонометрических операторах Баскакова и некоторых аппроксимативных свойствах этих операторов

Тригонометрическими операторами Баскакова называются аппроксимационные последовательности $\left\{M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}\right\}_{n=2k_m+1}^{\infty}$, где

$$M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,\ x) = \frac{2^{m-1}\prod_{j=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k_j}{n}}{\pi n}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+x)\,\sin^2\frac{nt}{2}dt}{\sin^2\frac{t}{2}\prod_{j=1}^{m}\left(\cos t-\cos\frac{2k_j\pi}{n}\right)},$$

а целые параметры m, k_j не зависят от n и удовлетворяют неравенствам:
$m>0,\ 0<k_1<k_2<\ldots<k_m$.

Если $f\in Lip_M 1$, то имеет место следующая оценка:

$$\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x)-f(x)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant M\cdot A_O^{[m](k_1,\ldots,k_m)}\cdot n^{-1}+o\left(n^{-1}\right),\qquad (1)$$

где

$$A_O^{[m](k_1,\ldots,k_m)}=$$

$$=4\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t dt}{t\prod_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}.$$

Константа $A_O^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ получила название оценочной константы (в отличие от точной константы, о которой речь пойдет дальше).

Было установлено, что в неравенстве (1) константу $A_O^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ можно заменить на

$A^{[m](k_1,...,k_m)}$, которая определяется неравенством

$$A^{[m](k_1,...,k_m)} = = 4\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int_0^\infty \frac{m(t)\sin^2 tdt}{t\prod_{j=1}^{m}(\pi^2k_j^2-t^2)},$$

где $m(t) = sign\left(\prod_{j=1}^{m}(r_j-t)\right)$.

Константы r_j, $j=1,...,m$, $0<r_1<k_1\pi<r_2<k_2\pi<...<r_m<k_m\pi$, являются корнями уравнения

$$G_{[m](k_1,...,k_m)}(r) = \frac{1}{2}, \qquad (2)$$

$$G_{[m](k_1,...,k_m)}(r) = = \pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int_0^r \frac{\sin^2 tdt}{t^2\prod_{j=1}^{m}(\pi^2k_j^2-t^2)}.$$

Существование требуемых решений уравнения (2) в общем случае до сих пор не доказано. Существование констант r_j, $j=1,...,m$, удовлетворяющих равенству $G_{[m](k_1,...,k_m)}(r)=\frac{1}{2}$, доказано при $m=1,2,3$ и любых допустимых k_j, а также в некоторых частных случаях при $m=4,5$ (см. [1, 2]).

2. О константе $A_H^{[4](1,2,3,4)}$

Воспроизведем (с некоторыми изменениями) по [1] доказательство существования констант r_j в случае $m=4$, $(k_1,k_2,k_3,k_4)=(1,2,3,4)$. Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. *Если* $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_3) > \frac{1}{2}$, *то уравнение* (2) *имеет четыре корня* r_j, $j=1,...,4$, *таких, что* $0<r_1<\pi k_1<r_2<\pi k_2<r_3<\pi k_3<r_4<\pi k_4$.

Доказательство. Очевидно, что уравнение (2) имеет указанные в условиях утверждения четыре корня, если $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_1) > \frac{1}{2}$, $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_2) < \frac{1}{2}$, $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_3) > \frac{1}{2}$, $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(\pi k_4) < \frac{1}{2}$. Выполнение первых двух неравенств доказано Е. Ю. Карымовой (см. [3]). Третье неравенство выполнено по условию. Четвертое неравенство выполняется потому, что $G_{[4](k_1,k_2,k_3,k_4)}(r)$ при $r\in[\pi k_4,\infty)$, возрастая, стремится к $\frac{1}{2}$.

Утверждение доказано. □

Теорема 1. *Имеет место неравенство* $G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi) > \frac{1}{2}$.

Доказательство. Известно, что

$$G_{[4](1,2,3)}(3\pi) > \frac{1}{2}.$$

Покажем, что

$$G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi) > G_{[3](1,2,3)}(3\pi).$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\int_0^{3\pi}\frac{\sin^2 tdt}{\prod_{j=1}^{4}(j^2\pi^2-t^2)} > 0 \qquad (3)$$

(левая часть неравенства получится, если из $G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi)$ вычесть $G_{[3](1,2,3)}(3\pi)$). Таким образом, доказательство неравенства $G_{[4](1,2,3,4)}(3\pi) > \frac{1}{2}$ сводится к доказательству неравенства (3). Правая часть неравенства (3) выглядит следующим образом:

$$\int_0^{3\pi}\frac{\sin^2 tdt}{(\pi^2-t^2)(4\pi^2-t^2)(9\pi^2-t^2)(16\pi^2-t^2)} = = \int_0^{3\pi}F(t)\,dt.$$

$$\int_0^{3\pi}F(t)dt = \int_0^{\pi}F(t)dt + \int_\pi^{2\pi}F(t)dt + + \int_{2\pi}^{3\pi}F(t)dt = I_1+I_2+I_3.$$

$$I_1 = \int_0^{\pi}\frac{\sin^2 tdt}{\prod_{j=1}^{4}(j^2\pi^2-t^2)}.$$

Во втором интеграле делаем замену $\tau=t-\pi$ (в записи переходим вновь к обозначению t вместо τ):

$$I_2 = -\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t(\pi-t)(4\pi^2-t^2)(9\pi^2-t^2)(4\pi+t)(5\pi-t)}.$$

В третьем интеграле сделаем замену $\tau=t-2\pi$ и перейдем к обозначению t вместо τ:

$$I_3 = \int_0^{\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2-t^2)(2\pi-t)(3\pi+t)(4\pi+t)(5\pi+t)(6\pi+t)}.$$

Произведя сложение, получим

$$I_1+I_2+I_3 = = \int_0^{\pi}\frac{\left(3t^2+9\pi t+6\pi^2\right)\sin^2 tdt}{(5\pi+t)(6\pi+t)\prod_{j=1}^{4}(j^2\pi^2-t^2)}.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательно при $t\in[0,\pi]$, имеем

$$I_1+I_2+I_3 > 0.$$

Теорема 1 доказана. □

3. О точных константах вида $A_H^{[m](k_1,...,k_m)}$

Мы уже отмечали, что точные константы вычисляются по формуле

$$A^{[m](k_1,...,k_m)} =$$

$$= 4\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int_0^\infty \frac{m(t)\sin^2 tdt}{t\prod_{j=1}^{m}(\pi^2k_j^2-t^2)},$$

где $m(t) = sign\left(\prod_{j=1}^{m}(r_j-t)\right)$, если уравнение (2) имеет m решений, расположенных так, как это оговорено в п. 1.

Утверждение 2. *Уравнение* (2) *имеет* m $(m>3)$ *решений, расположенных так, как это оговорено в п.1, если для* $i=3,...,m-1$ *выполняются неравенства*

$$G_{[m](k_1,..,k_m)}(k_i\pi) > \frac{1}{2} \quad \textit{при нечетном } i. \qquad (4)$$

$$G_{[m](k_1,..,k_m)}(k_i\pi) < \frac{1}{2} \quad \textit{при четном } i. \qquad (5)$$

Доказательство. Доказательство опустим, оно совершенно аналогично доказательству утверждения 1. □

Теорема 2. *Если при некоторых* $k_1<k_2<...<k_{m-1}$ *уравнение* (2) *имеет* m *решений, расположенных так, как это оговорено в п.1, то найдется* $N_0(k_1,...,k_{m-1})$ *такое, что при* $k_m>N_0$ *имеют место неравенства* (4) *и* (5).

Доказательство. Имеем

$$G_{[m](k_1,...,k_m)}(k_i\pi) =$$

$$= \pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int_0^{k_i\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t^2\prod_{j=1}^{m}\left(\pi^2k_j^2-t^2\right)} =$$

$$= \pi^{2m-3}\prod_{j=1}^{m-1}k_j^2\int_0^{k_i\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2\prod_{j=1}^{m-1}\left(\pi^2k_j^2-t^2\right)}\cdot\frac{1}{1-\frac{t^2}{\pi^2k_m^2}}dt =$$

$$= \pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m-1}k_j^2\cdot\Big(\int_0^{k_1\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t^2\prod_{j=1}^{m-1}(k_j^2\pi^2-t^2)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi_1^2}{\pi^2k_m^2}}+$$

$$+\sum_{p=1}^{i-1}\int_{k_p\pi}^{k_{p+1}\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t^2\prod_{j=1}^{m-1}(k_j^2\pi^2-t^2)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi_{p+1}^2}{\pi^2k_m^2}}\Big),$$

где $\xi_1\in(0,k_1\pi)$, $\xi_q\in(k_{q-1}\pi,k_q\pi)$.
Так как

$$\frac{1}{1-\frac{\xi_q^2}{\pi^2k_m^2}}\to 1$$

при $k_m\to\infty$, $q<m$, получаем, что

$$\lim_{k_m\to\infty}G_{[m](k_1,...,k_m)}(k_i\pi) = G_{[3](k_1,...,k_{m-1})}(k_i\pi).$$

А это эквивалентно утверждению, которое сформулировано как теорема 2. Итак, теорема 2 доказана. □

Следствие 1. *При любом* $m>0$ *существует бесконечное число таких* $k_j, j=1,..,m$, *что уравнение* (2) *имеет* m *решений, расположенных так, как это оговорено в п. 1.*

Литература

1. *Абакумов Ю. Г., Карымова Е. Ю., Коган Е. С.* Об одной точной константе // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2008. С. 14–17.

2. *Абакумов Ю. Г., Верхотурова М. А., Коган Е. С.* Об одной экстремальной задаче теории приближения // Вестник Самарского ГУ. Естественно-науч. серия. 2012. № 3/1 (94). С. 5–13.

3. *Карымова Е. Ю.* Приближение функции Хевисайда некоторыми методами суммирования рядов Фурье: монография // Е. Ю. Карымова, Ю. Г. Абакумов, С. В. Долгов, Т. В. Дубровина, Е. С. Коган. Чита: ЧитГУ, 2010. 121 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Абакумов Юрий Георгиевич
к. ф.-м. н., профессор
Забайкальский государственный университет
ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Россия, 672039
эл. почта: abakumovug@yandex.ru
тел.: (302) 2416444

Верхотурова Мария Алексеевна
аспирантка
Забайкальский государственный университет
ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Россия, 672039
тел.: (302) 2416444

Банин Виктор Григорьевич
к. ф.-м. н., доцент
Финансовый университет при Правительстве РФ
Ленинградский проспект, 49, Москва, Россия, 125993
эл. почта: vikbanin@mail.ru
тел.: (499) 2772118

Abakumov, Yury
Zabaykalsky State University
30 Alexandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia,
e-mail: abakumovug@yandex.ru
tel.: (302) 2416444

Verhoturova, Maria
Zabaykalsky State University
30 Alexandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia,
tel.: (302) 2416444

Banin, Victor
Financial University
49 Leningradskiy St., 125993 Moscow, Russia,
e-mail: vikbanin@mail.ru
tel.: (499) 2772118