Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 36–40

УДК 517.977

ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

М. Е. Галахова[1], А. Н. Кириллов[2]

[1] *Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров*
[2] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Рассмотрены задачи управления экономическими динамическими системами со структурными изменениями. Предлагается модель производственного объединения с переменным количеством входящих в него однородных предприятий. Строится управление в виде кредитной функции, обеспечивающей экономический рост к заданному уровню.

Ключевые слова: динамическая экономическая система, переменная структура, управление.

M. E. Galakhova, A. N. Kirillov. THE DYNAMICS OF ECONOMIC GROWTH WITH STRUCTURAL ALTERATIONS

The problems of variable structure dynamical economic systems control are considered. The economic association model consisting of variable number of homogeneous enterprizes is proposed. The control credit function, providing the economic growth to a certain given level, is constructed.

Key words: dynamical economic system, variable structure, control.

Введение

В [1, 2] был предложен подход для описания динамики структурных изменений в системе S; в ее состав могут входить подсистемы S_i, количество которых $k(t)$ в момент времени t изменяется в процессе функционирования S, $k(t) \in \{1, ..., n\}$. Подсистемы S_i могут подключаться к S или отключаться от нее. При этом подсистемы, входящие в S, взаимодействуют между собой. Введем вектор $\gamma(t) = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, где $\gamma_i(t) = 1$, если подсистема S_i в момент времени t входит в S, $\gamma_i(t) = 0$ – в противном случае. Вектор $\gamma(t)$ можно назвать внешней структурой системы S. Для задания динамики структуры вводится понятие эволюционного времени $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$, описываемого дополнительной динамической системой. При достижении переменной $y_i(t)$ порогового значения происходит отключение или подключение подсистемы S_i к системе S. Тем самым система переходит в другое фазовое пространство, возможно, не мгновенно, а через некоторое время. Если допустимы только структуры вида $\gamma = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, где первые k компонент вектора γ равны 1, а остальные – 0, и переход между структурами происходит добавлением $(k+1)$-й единицы или исключением k-й единицы, то система S называется последовательной системой со структурными изменениями (ССИ). Если возможны произвольные структуры и переходы между ними, то S называется параллельной ССИ.

В настоящей работе предложенный подход к моделированию динамики систем со структурными изменениями применяется к некоторым задачам управляемой экономической динамики, в которых структура зависит от эффективности экономической системы.

Описание модели

Рассмотрим некоторую экономическую систему, изменение структуры которой происходит согласно правилам, устанавливаемым управляющим органом. Конкретизируем систему как производственное объединение (ПО), в состав которого входят предприятия, выпускающие однородную продукцию. Пусть $x_i(t)$ – количественная характеристика состояния i-го предприятия в момент времени t, $x_i(t) \geqslant 0$. Будем считать, что динамика предприятия задается уравнением

$$\dot{x}_i = \mu_i(t)x_i + w_i(x_i, t), \qquad (1)$$

где $\mu_i(t)x_i, w_i(x_i,t)$ – скорости прироста инвестиций в предприятие i за счет его собственных средств и кредита банка соответственно; $\mu_i(t)$ – скорость прироста собственных средств, направляемых на инвестирование, на единицу объема продукции; $\mu_i(t), w_i(x_i, t)$ – кусочно-непрерывные неотрицательные функции. Уравнение (1) обобщает модель, построенную в [3]. Введем компоненты $y_i(t)$ эволюционного времени

$$y_i(t) = y_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} (c_i - w_i)dt, \qquad (2)$$

где c_i – пороговые значения, t_0 – начальный момент времени. Переменную $y_i(t)$ будем называть эволюционным временем предприятия i. Значение $y_i(t)$ влияет на присутствие i-го предприятия в системе. Дифференцируя (2), получим

$$\dot{y}_i = c_i - w_i. \qquad (3)$$

Поясним смысл эволюционного времени. Введем постоянные пороги $q_i, i = 1, ..., n$. Пусть для некоторого $r \in \{1, ..., n\}$ найдется наименьший момент времени t_r, такой что $y_r(t_r) = q_r$ при условии, что $y(t) > q_r$ при $t \in [t_0, t_r)$. Тогда в момент времени t_r происходит закрытие r-го предприятия. Экономический смысл предложенной процедуры состоит в следующем. Эффективно работающее предприятие должно в большей степени развиваться не за счет кредитов, а за счет собственных средств. Превышение функцией $y_r(t)$ порогового значения означает, что r-е предприятие набирает слишком много кредитов, которые придется погашать, используя собственные средства. Это является признаком неэффективной деятельности, что приводит к принятию органом управления решения о закрытии (или приостановке работы) предприятия. Возникает вопрос: когда закрывать предприятие? Если произвести закрытие в момент достижения кредитной функцией $w_r(x_r(t_r), t_r)$ некоторого порогового значения, то процесс закрытия станет слишком чувствительным, реагируя на мгновенные сбои в работе предприятия, приводящие к малозначительным снижениям его эффективности. Для органа управления желательно некоторое время наблюдать за деятельностью предприятия, прежде чем принимать решение. Наличие интеграла в условии закрытия, $y_r(t_r) = q_r$, придает некоторую инерционность в принятии решения о закрытии предприятия, что дает последнему возможность отработать временные сбои. Напротив, если низкая эффективность его работы, что проявляется в выполнении условия $w_r > c_r$, наблюдается в течение достаточно длительного промежутка времени, то орган управления закрывает r-е предприятие в момент времени t_r. После закрытия r-го предприятия динамика ПО, состоящего теперь из $(n-1)$-го активного предприятия, задается уравнениями (1),(3), где $i \neq r$, а r-е предприятие переходит в пассивный режим, которому соответствует система уравнений

$$\dot{x}_r = -p_r(t)x_r, \ x_r > 0, \quad \dot{x}_r = 0, \ x_r = 0, \quad (4)$$

$$\dot{y}_r = c_r, \qquad (5)$$

где $p_r(t) > 0$. Теперь рассмотрим процедуру возобновления работы предприятия r. Пусть $y_r(t) < q_r$ на интервале $(t_r, \bar{t}_r)$ и $y_r(\bar{t}_r) = q_r$. Тогда в момент времени $\bar{t}_r$ орган управления переводит предприятие из пассивного в активный режим, и его динамика задается уравнениями (1),(3). При этом $x_r(\bar{t}_r) = x_r(\bar{t}_r + 0) = \overline{x}_r$, $y_r(\bar{t}_r + 0) = q_r + \delta_r$, где $\overline{x}_r, \delta_r$ – заданные положительные постоянные. Наличие постоянной δ_r приводит к скачкообразному изменению $y_r(t)$ при достижении ею порогового значения q_r. Это значит, что предприятие получает начальный кредит на развитие, иначе может оказаться, что сразу после открытия его придется закрывать.

Замечание 1. Можно рассмотреть процедуру открытия нового предприятия, а не ранее замороженного. Будем, например, считать, что ПО расширяется, открывая новое предприятие в момент достижения всеми предприятиями, входящим в него, некоторых заданных уровней развития e_i. Пусть $\widetilde{t}$ – наименьший момент времени, для которого выполняются условия $y_i \geqslant e_i,\ i = 1, ..., n$, причем при $t < \widetilde{t}$ хотя бы одно из этих неравенств не выполняется. Тогда в момент времени $\widetilde{t}$ орган управления ПО открывает $(n+1)$-е предприятие, динамика которого задается уравнениями (1), (3), $i = n+1$, и при этом $x_{n+1}(\widetilde{t}) = \widetilde{x}_{n+1},\ y_{n+1}(\widetilde{t}) = \widetilde{y}_{n+1},\ \widetilde{x}_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1}$ – заданные постоянные, причем $d_{n+1} < \widetilde{y}_{n+1} < e_{n+1}$, $y_i(\widetilde{t}+0) = e_i + \delta_i\ i = 1, ..., n$, где $\widetilde{\delta}_i$ – заданные положительные постоянные.

Задачи управления экономическим развитием

Рассмотрим задачу управления ПО с целью достижения предприятиями заданных уровней развития к заданному моменту времени. Назовем ее задачей развития ПО. Обозначим $k(t)$ количество активных предприятий, входящих в ПО в момент времени t. Пусть $k(t_0) = n$ и динамика ПО задается системой уравнений (1), (3). Будем считать постоянными пороги c_i и коэффициенты μ_i. В качестве управляющих воздействий рассмотрим кредитные функции $w_1, ..., w_n$, которые будем полагать кусочно-постоянными. Введем вектор внешней структуры $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, где $\gamma_i = 1$, если предприятие i входит в состав ПО, $i = 0$ в противном случае. Представим некоторые задачи управления.

Найти управление, переводящее систему (1), (3) из состояния $x(t_0) = x^0$ в состояние $x(t_0+T) = x^1$ при условии

а. $k(t) = n,\ t \in [t_0, t_0+T]$,

б. $k(t_0) = k(t_0+T) = n$,

в. $k(t_0) = n$, $k(t_0+T) > 0$.

Отметим, что задача 1б решена в [4]. В задачах 1б и 1в количество предприятий переменно, что соответствует переменной размерности динамической системы, моделирующей процесс развития ПО. На промежутке управления $[t_0, t_0+T]$ некоторые предприятия могут переходить в пассивный режим и возобновлять свою деятельность. Перевод предприятия в пассивный режим можно назвать его замораживанием.

Перейдем теперь к задачам управления без замораживания, но с закрытием нерентабельных и открытием новых предприятий. Построение соответствующей модели будет основано на понятии последовательной системы со структурными изменениями. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность положительных действительных чисел $d_k,\ d_{k+1} > d_k,\ k = 1, 2, ...$ Пусть динамика ПО задается уравнениями

$$\dot{x}_i = a_i\mu_i x_i + a_i w_i,\ i = 1, ..., m, \tag{6}$$

а динамика эволюционного времени $y(t)$ уравнением

$$\dot{y} = c - \sum_{i=1}^{m} b_i w_i \tag{7}$$

на том промежутке времени, для которого выполнено условие $d_m < y < d_{m+1}$. Здесь a_i, b_i, c – положительные постоянные, управления $w_i(t) \geqslant 0$ кусочно-постоянны.

Процесс закрытия предприятия происходит в тот момент времени t^-, в который $y(t^-) = d_m$ при условии, что $y(t) \in (d_m, d_{m+1})$ при $t \in (t^- - \delta, t^-)$ для некоторого $\delta > 0$. Закрывается предприятие с номером j, для которого наименьшее значение принимает величина $x_j(t^-)$. Можно рассмотреть и другие сценарии выбора предприятия для закрытия. При этом переменная y совершает скачок на уровень $y(t^- + 0) = d_m - \delta_m$, где заданная положительная постоянная δ_m такова, что $d_{m-1} < d_m - \delta_m$. После этого предприятия перенумеруются так, что номера $1, ..., j-1$ остаются прежними, а номера $j+1, ..., m$ переходят в $j, ..., m-1$ соответственно. Динамика ПО при $t > t^-$ задается системой

$$\dot{x}_i = a_i\mu_i x_i + a_i w_i,\ i = 1, ..., m-1, \tag{8}$$

$$\dot{y} = c - \sum_{i=1}^{m-1} b_i w_i \tag{9}$$

при условии $d_m < y < d_{m+1}$.

Процесс открытия предприятия происходит в тот момент времени t^+, в который $y(t^+) = d_{m+1}$ при условии $y(t) \in (d_m, d_{m+1})$ при $t \in (t^+ - \widetilde{\delta}, t^+)$ для некоторого $\widetilde{\delta} > 0$. Открывается предприятие с номером $m+1$ с начальным условием $x_{m+1}(t^+) = x^+_{m+1}$, где x^+_{m+1}– заданная положительная постоянная. При этом переменная y совершает скачок на уровень $y(t^+ + 0) = d_{m+1} + \widetilde{\delta}^+$, где $0 < \widetilde{\delta}^+ < d_{m+2} - d_{m+1}$. Динамика ПО при $t > t^+$ задается системой

$$\dot{x}_i = a_i\mu_i x_i + a_i w_i,\ i = 1, ..., m+1, \tag{10}$$

$$\dot{y} = c - \sum_{i=1}^{m+1} b_i w_i \tag{11}$$

при условии $d_{m+1} < y < d_{m+2}$.

Поясним смысл процессов закрытия-открытия предприятий. Переменная

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (c - \sum_{i=1}^{k(\tau)} b_i w_i(\tau)) d\tau \tag{12}$$

характеризует интегрированную активность кредитования предприятий ПО в смысле отличия скорости суммарного объема кредитования $W(t) = \sum_{i=1}^{m+1} b_i w_i$ действующих предприятий ПО от порогового значения c на промежутке $[t_0, t]$. В случае достаточно длительного превышения порогового значения величиной $W(t)$, что означает малоэффективную работу ПО, которое испытывает недостаток в собственных средствах для инвестирования в развитие, закрывается наименее успешное предприятие. В противном случае в составе ПО открывается новое предприятие. Таким образом, происходит в некотором смысле реструктуризация ПО.

Поставим следующую задачу управления: построить кусочно-постоянное управление $w = (w_1, ..., w_{k(t)})$, переводящее ПО из заданного состояния $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ в момент времени t_0 в конечное состояние $x(t_0 + T) \in X(t_0 + T) \subset \mathbb{R}^{k(t_0+T)}$ такое, что

$$X(t_0+T) = \{x(t_0+T) : \sum_{i=1}^{k(t_0+T)} x_i(t_0+T) = \tilde{X}\}, \tag{13}$$

где $\widetilde{X}-$ заданный суммарный объем производства в конечный момент времени. Рассмотрим сначала случай $k(t) \in \{1, 2\}$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $k(t_0) = 1$, т. е. количество предприятий не может превышать двух на промежутке управления. Тогда на некотором начальном промежутке времени динамика ПО задается системой уравнений

$$\dot{x}_1 = a_1\mu_1 x_1 + a_1 w_1, \tag{14}$$

$$\dot{y} = c - b_1 w_1, \tag{15}$$

для которой $d_1 < y(t) < d_2$, при начальных условиях $y(t_0) = y_0$, $x_1(t_0) = x_1^0$.

Пусть управление, кредитная функция w_1, ограничено сверху: $w_1 \leqslant \overline{w}$. Это вполне естественное требование: кредит не может быть неограниченным. При этом предположим, что наибольшая возможная скорость роста $\overline{w}$ кредитных поступлений $\overline{w}$ недостаточна для достижения предприятием уровня $\widetilde{X}$ в момент времени $t_0 + T$. Это означает, что $x_1(t_0 + T) < \widetilde{X}$ при $w_1 = \overline{w}$, или, полагая $t_0 = 0$, получаем

$$(x_1^0 + \frac{\overline{w}}{\mu_1})e^{a_1\mu_1 T} - \frac{\overline{w}}{\mu_1} < \widetilde{X}. \tag{16}$$

При этом пусть при $w_1 = \overline{w}$ предприятие не закрывается и не открывается новое, т. е.

$$d_1 < y_0 + (c - b_1\overline{w})t < d_2,\ t \in [0, T), \tag{17}$$

причем $d_1 < y(T) < d_2$, $y(0) = y_0$. Последнее неравенство перепишем в виде

$$d_1 < y_0 + (c - b_1\overline{w})T < d_2. \tag{18}$$

Предполагая выполнение (17), (18), мы хотим исследовать задачу управления, т. е. развития ПО, при недостатке ресурсов у одного предприятия. Тогда возникает вопрос: можно ли за счет открытия второго предприятия достичь заданного уровня в момент времени T, расширятся ли возможности управления при открытии второго предприятия? Дадим ответ на этот вопрос. Возьмем сначала значение кусочно-постоянного управления $w_1 = w_{11}$ таким, что

$$w_{11} < max(\overline{w}, \frac{c}{b_1}). \tag{19}$$

Это условие позволяет обеспечить возрастание функции $y(t)$ при допустимом управлении. Пусть найдется момент времени $t^+ \in (0, T)$ такой, что

$$y(t^+) = d_2, \tag{20}$$

причем $d_1 < y(t) < d_2$, при $t \in [0, t^+)$. Условие (20) равносильно тому, что

$$y_0 + (c - b_1\overline{w})t^+ = d_2,$$

откуда получаем

$$t^+ = \frac{d_2 - y_0}{c - b_1 w_{11}} < T. \tag{21}$$

Следовательно,

$$w_{11} < \frac{1}{b_1}(c - \frac{d_2 - y_0}{T}). \tag{22}$$

Вместе с (20) получаем, учитывая (18), (19), что в качестве w_{11} в начальный момент надо брать постоянную, удовлетворяющую условию (22). Тогда $y(t^+) = d_2$, где t^+ определено в (21). Согласно описанной выше модели, в момент t^+ произойдет открытие второго предприятия с числовой характеристикой x_2. При этом переменная $y(t)$ совершает положительный скачок: $y(t^+ + 0) = d_2 + \delta_2$, причем $x_2(t^+) = x_2^+ -$ заданная положительная постоянная такая, что $x_1(t^+) + x_2^+ < \widetilde{X}$. Динамика ПО при $t > t^+$ задается уравнениями

$$\dot{x}_1 = a_1\mu_1 x_1 + a_1 w_1,\ \dot{x}_2 = a_2\mu_2 x_2 + a_2 w_2, \tag{23}$$

$$\dot{y} = c - b_1 w_1 - b_2 w_2, \tag{24}$$

с начальными условиями $x_1(t^+ + 0) = x_1(t^+)$, $x_2(t^+ + 0) = x_2(t^+) = x_2^+$, $y(t^+ + 0) = d_2 + \delta_2$. При этом

$$x_1(t^+) = e^{a_1\mu_1 t^+}(x_1^0 + \frac{w_{11}}{\mu_1}) - \frac{w_{11}}{\mu_1}. \tag{25}$$

Остановимся теперь на выборе управлений w_1, w_2 при $t > t^+$. Предположим, что найдены постоянные w_{12}, w_{22} такие, что $w_{12} < \overline{w}, w_{22} < \overline{w}$, решающие задачу управления. Тогда должно выполняться условие

$$x_1(T, w_{12}) + x_2(T, w_{22}) = \widetilde{X},$$

где $x_1(T, w_{12}), x_2(T, w_{22})$ – решения уравнений (23), соответствующие управлениям w_{12}, w_{22} с начальными условиями, приведенными выше. Последнее равенство равносильно тому, что

$$\sum_{i=1}^{2}((x_i(t^+) + \frac{w_{i2}}{\mu_i})e^{a_i\mu_i(T-t^+)} - \frac{w_{i2}}{\mu_i}) = \widetilde{X}, \quad (26)$$

где t^+ имеет вид (21). При этом должно выполняться условие существования обоих предприятий на отрезке $[t^+, T]$: $y(T) > d_2$, которое сводится к

$$\delta_2 + (c - b_1w_{12} - b_2w_{22})(T - \frac{d_2 - y_0}{c - b_1w_{11}}) \geqslant 0. \quad (27)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть* $k(t) = 1$ *при* $t \in [0, t^+]$, $k(t) = 2$ *при* $t \in [t^+ + 0, T]$, $\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 \leqslant \overline{w}$, *а также выполнены условия*

– (16), (18) недостатка кредитного ресурса для одного предприятия;

– (27) сохранения двух предприятий при $t \in [t^+, T]$*;*

– (26) – терминальное условие.

Тогда кредитные функции $w_1 = w_{11}$, $w_2 = 0$ *при* $t \in [0, t^+]$, $w_1 = w_{12}$, $w_2 = w_{22}$ *при* $t \in [t^+ + 0, T]$ *решают задачу перевода ПО в терминальное множество (13). При этом на промежутке* $[0, t^+]$ *ПО состоит из одного, а на промежутке* $[t^+, T]$ *– из двух предприятий.*

Заключение

Предложен подход к моделированию динамики экономической системы с переменным количеством предприятий. Рассмотрены некоторые задачи развития предприятий на заданном промежутке времени. Количество предприятий, входящих в производственное объединение, определяется эффективностью их деятельности.

Работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора Программой стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Литература

1. *Кириллов А. Н.* Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.

2. *Кириллов А. Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.

3. *Кириллов А. Н.* Одна математическая модель распределения капитальных вложений // Экономика и математические методы. 1982. Т. 18, № 5. С. 922–925.

4. *Кириллов А. Н.* Модель инвестирования экономической системы с переменной структурой // Труды института системного анализа РАН. 2007. С. 281–287.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Галахова Мария Евгеньевна
аспирантка
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров
ул. Ивана Черных, 4, Санкт-Петербург, Россия, 198095
эл. почта: secretgate@mail.ru
тел.: (812) 7712780

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Galakhova, Mariya
State Technological University of Plant Polymers
4 Ivan Chernykh St., 198095 Saint-Petersburg, Russia
e-mail: secretgate@mail.ru
tel.: (812) 7712780

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370