Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 62–66

УДК 519.216.5

ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ В УРНОВОЙ СХЕМЕ

А. А. Ивашко

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассмотрена задача оптимальной двукратной остановки, в которой необходимо максимизировать значение полученной прибыли при покупке, а затем продаже финансового актива. Найдены оптимальные стратегии и выигрыши в данной задаче.

Ключевые слова: оптимальная остановка, выборка из урны, задача о баллотировке.

A. A. Ivashko. GAIN MAXIMIZATION PROBLEM IN THE URN SCHEME

The optimal double-stopping problem of gain maximization when buying and selling financial assets is considered. The optimal stopping strategies and payoffs are obtained.

Key words: optimal stopping, urn sampling, ballot problem.

Введение

В работе рассматривается следующая многошаговая модель покупки-продажи финансового актива в дискретном времени. Ведется наблюдение за изменением цен на финансовый актив в течение заданного промежутка времени. Цель наблюдателя — сначала купить, а потом продать актив, при этом максимизировав свою прибыль — разность между ценой продажи и покупки. В каждый момент времени необходимо решить: остановиться на текущем уровне цены или продолжить процесс выбора. Предполагается, что значения цен распределены согласно урновой схеме.

Данная ситуация моделируется с помощью следующей задачи оптимальной двукратной остановки в урновой схеме. Пусть в урне имеется m_0 отрицательных и p_0 положительных шаров. Из урны вынимаются шары последовательно по одному в каждый момент времени без возвращения. Значение -1 соответствует отрицательному шару, а значение $+1$ — положительному. Обозначим последовательность

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad 1 \leqslant n \leqslant m_0 + p_0,$$

где X_k — значение шара, выбранного в момент k. Данная последовательность формирует некоторую траекторию (см., например, рис. 1). В каждый момент времени при выборе шара необходимо принять решение об остановке или продолжении наблюдения. В задаче необходимо максимизировать среднее значение разности между максимальным и минимальным выбранным значением. Будем называть первую остановку покупкой финансового актива, а вторую — продажей.

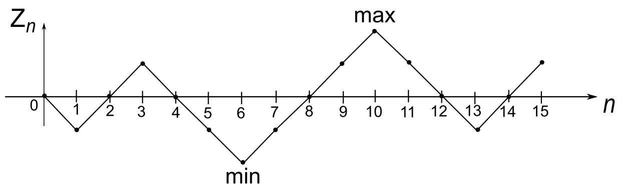

Рис. 1. Пример траектории Z_n для $p_0 = 8$, $m_0 = 7$

Модели с одной остановкой в урновой схеме были рассмотрены в различных вариантах в зависимости от целей игрока. В работе Л. Шеппа [6] была исследована задача, в которой необходимо максимизировать значение полученного выигрыша от одной остановки. М. Тамаки [8] получил решение в задаче максимизации вероятности остановки на наибольшем значении траектории. В работе А. А. Ивашко [1] было рассмотрено обобщение задачи М. Тамаки на случай двукратной остановки. В. В. Мазалов, М. Тамаки [5] рассмотрели вариант задачи о продолжительности нахождения случайного блуждания в наилучшем состоянии. Модели двукратной остановки последовательностей одинаково распределенных случайных величин можно найти в работах М. Л. Николаева [3], Г. Софронова и др. [7], В. В. Мазалова, А. А. Фалько [2, 4].

В данной работе рассмотрено обобщение задачи Л. Шеппа [6] на случай двукратной остановки. Найдено оптимальное поведение наблюдателя в классе пороговых стратегий, а также получены значения его выигрыша.

Решение задачи с одной остановкой

Предположим для определенности $p_0 = m_0$. Пусть из урны уже вынули n шаров и известны значения $\{Z_i\}_{i=1}^{n}$. Также известно, что в урне все еще осталось m отрицательных шаров и p положительных, т. е. изначально было $n + m + p = p_0 + m_0$ шаров. Обозначим данное состояние (m, p).

Исходная задача двукратной остановки решается методом динамического программирования в два этапа. Сначала необходимо найти правило остановки траектории для продажи финансового актива при условии, что покупка уже сделана. А затем найти оптимальное значение момента остановки для покупки.

Сначала рассмотрим задачу с одной остановкой, в которой необходимо продать финансовый актив по наибольшей цене. Обозначим $V(m, p)$ — выигрыш в состоянии (m, p). Так как при нахождении в состоянии (m, p) траектория может пойти вверх при выборе положительного шара с вероятностью $\frac{p}{m+p}$ и вниз при выборе отрицательного шара с вероятностью $\frac{m}{m+p}$, то выигрыш $V(m, p)$ равен

$$\begin{aligned} V(m,p) &= \max\left\{ m-p, \frac{p}{m+p}V(m,p-1) + \right. \\ &+ \left. \frac{m}{m+p}V(m-1,p) \right\}. \end{aligned}$$

Выигрыш при продолжении наблюдения равен

$$V(m,p)=\frac{p}{m+p}V(m,p-1)+\frac{m}{m+p}V(m-1,p), \quad V(0,p)=0. \tag{1}$$

Рассмотрим выигрыш при продолжении в следующем виде

$$V(m,p)=\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n(m)}{p+n}, \tag{2}$$

где $a_n(m)$ — некоторые числовые коэффициенты.

Теорема 1. *Выигрыш при продолжении $V(m,p)$ имеет вид*

$$V(m,p)=\sum_{l=1}^{m}\frac{a_1(l)}{l}\prod_{i=0}^{l-1}\frac{m-i}{m+p-i}, \tag{3}$$

где числовые коэффициенты $a_1(l)$ вычисляются рекурсивно.

Доказательство. Подставляя значение $V(m,p) = \sum_{n=1}^{m}\frac{a_n(m)}{p+n}$ в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m}\frac{a_n(m)}{p+n} &= \frac{p}{m+p}\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n(m)}{p+n-1} + \\ &+ \frac{m}{p+m}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_n(m-1)}{p+n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковым знаменателем и рассмотрим отдельно выражения следующего вида:

$$\frac{pa_n(m)+ma_{n-1}(m-1)}{(p+m)(p+n-1)},\ n=2,...,m.$$

Представим данное выражение в виде суммы двух дробей:

$$\frac{pa_n(m)+ma_{n-1}(m-1)}{(p+m)(p+n-1)}=\frac{A_n}{p+m}+\frac{B_n}{p+n-1},$$

$n = 2, ..., m,$

и найдем коэффициенты A_n и B_n методом неопределенных коэффициентов.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} A_n + B_n = a_n(m), \\ (n-1)A_n + mB_n = ma_{n-1}(m-1), \end{cases}$$

получим, что

$$\begin{aligned} &A_n = a_n(m) - B_n, \\ &B_n = \frac{ma_{n-1}(m-1) - (n-1)a_n(m)}{m-n+1}. \end{aligned}$$

Далее, приравнивая выражения с одинаковыми знаменателями в левой и правой частях (4), находим, что

$$a_{n-1}(m) = B_n = \frac{ma_{n-1}(m-1) - (n-1)a_n(m)}{m-n+1}, \quad n = 2, ..., m.$$

Отсюда выразим $a_n(m)$

$$a_n(m) = \frac{ma_{n-1}(m-1) - (m-n+1)a_{n-1}(m)}{n-1}, \quad n = 2, ..., m. \tag{5}$$

Отдельно рассмотрим числители дробей со знаменателем $p+m$. Получим

$$a_m(m) = a_1(m) + \sum_{n=2}^{m}(a_n(m) - a_{n-1}(m)) = a_m(m).$$

Используя рекурсию (5), находим формулу для вычисления коэффициентов $a_n(m)$, $n = 2, ..., m$:

$$\begin{aligned} &a_n(m) = \sum_{k=0}^{n-1} a_1(m-k)(-1)^{n+k+1}\binom{m-2}{m-n}\binom{n-1}{k}\times \\ &\times\frac{m(m-1)}{(n-1)(m-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_1(m-k)(-1)^{n+k+1}\times \\ &\times\frac{m!}{(m-n)!k!(n-k-1)!(m-k)}. \end{aligned}$$

Преобразовывая это выражение и подставляя его в формулу (2), получим (3).

□

Для того чтобы найти точное выражение выигрыша, необходимо последовательно определить $a_1(l)$, $l = 1, 2, ..., m$, используя следующий алгоритм (см. рис. 2):

- Предполагаются известными все $a_1(l)$, $l = 1, 2, ..., m-1$, и оптимальное значение $p^*_{m-1} = \max\{p : V(m-1, p) = m-1-p\}$ для заданного $m-1$ (начальные значения $a_1(1) = 1$, $p^*_1 = 0$);
- Находим $a_1(m)$ из уравнения $V(m, p^*_{m-1}) = m - p^*_{m-1}$;
- Если $V(m, p^*_{m-1}+1) > m - (p^*_{m-1}+1)$, то $p^*_m = p^*_{m-1}$;
- Если $V(m, p^*_{m-1}+1) \leqslant m - (p^*_{m-1}+1)$, то $p^*_m = p^*_{m-1}+1$ и $a_1(m)$ — решение уравнения $V(m, p^*_{m-1}+1) = m - (p^*_{m-1}+1)$.

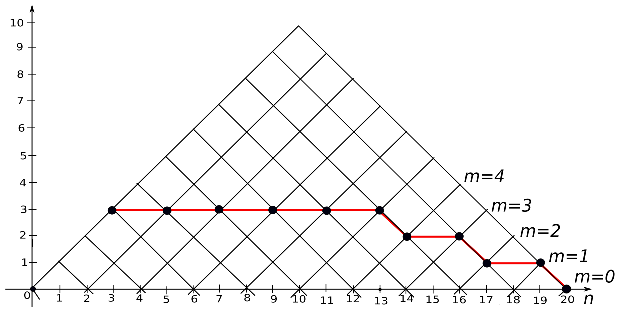

Рис. 2. Границы принятия решения для $m_0 = p_0 = 10$

В таблице 1 представлены значения коэффициентов $a_1(m)/m$ для различных $m = 1, ..., 10$.

Таблица 1. Значения $a_1(m)/m$ для различных значений m

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{a_1(m)}{m}$	1	1	3	5	7	23	49	52	76	99

Выигрыши при продолжении имеют следующий вид для $m = 1, 2, 3, 4$:

$$V(1,p) = \frac{1}{p+1};$$

$$V(2,p) = \frac{2}{p+1};$$

$$V(3,p) = \frac{9}{p+1} - \frac{12}{p+2} + \frac{6}{p+3};$$

$$V(4,p) = \frac{20}{p+1} - \frac{24}{p+2} + \frac{0}{p+3} - \frac{8}{p+4}.$$

Задача двукратной остановки

Рассмотрим задачу двукратной остановки, в которой необходимо максимизировать среднее значение разности между максимальным и минимальным выбранными значениями цены финансового актива.

Так же, как и ранее, для простоты положим $p_0 = m_0$. Пусть траектория находится в состоянии (m,p).

Обозначим $V_{(m_1,p_1)}(m,p)$ – выигрыш при продаже в состоянии (m,p), если покупка была сделана в состоянии (m_1,p_1), $U(m,p)$ – выигрыш при покупке в состоянии (m,p).

Выигрыш в задаче оптимальной однократной остановки вычисляется по формуле

$$V(m,p) = \max\Big\{m-p, \tfrac{p}{m+p}V(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}V(m-1,p)\Big\}.$$

Выигрыш при продаже в состоянии (m,p), если покупка была сделана в состоянии (m_1,p_1), имеет вид

$$V_{(m_1,p_1)}(m,p) = \max\Big\{m-p-(m_1-p_1), \tfrac{p}{m+p}V_{(m_1,p_1)}(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}V_{(m_1,p_1)}(m-1,p)\Big\} = \max\big\{m-p, \tfrac{p}{m+p}V(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}V(m-1,p)\big\} - (m_1-p_1).$$

Из вида выигрыша получаем, что пороги принятия решения об остановке при продаже актива в задаче двукратной остановки совпадают с порогами в задаче с однократной остановкой.

Выигрыш при покупке в состоянии (m,p) вычисляется по формуле

$$U(m,p) = \max\Big\{\tfrac{p}{m+p}V_{(m,p)}(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}V_{(m,p)}(m-1,p), \tfrac{p}{m+p}U(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}U(m-1,p)\Big\} = \max\Big\{V(m,p)-(m-p), \tfrac{p}{m+p}U(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}U(m-1,p)\Big\}.$$

Обозначим τ_1^*, τ_2^* — оптимальные моменты остановки для покупки и продажи соответственно. Тогда

$$\tau_1^* = \min\{k : 1 \leqslant k \leqslant p_0+m_0-1, Z_k \leqslant V(m,p) - \tfrac{p}{m+p}U(m,p-1) - \tfrac{m}{m+p}U(m-1,p)\};$$

$$\tau_2^* = \min\{n : \tau_1^* \leqslant n \leqslant p_0+m_0, Z_n \geqslant \tfrac{p}{m+p}V(m,p-1) + \tfrac{m}{m+p}V(m-1,p)\}\}.$$

Найдем выражения для вычисления выигрыша $U(m,p)$ при продолжении наблюдения аналогичным образом, как и в предыдущем разделе. Выигрыш при продолжении равен

$$U(m,p) = \frac{p}{m+p}U(m,p-1) + \frac{m}{m+p}U(m-1,p).$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Выигрыш при продолжении $U(m,p)$ имеет вид*

$$U(m,p) = \sum_{l=1}^{p}\frac{b_1(l)}{l}\prod_{i=0}^{l-1}\frac{p-i}{m+p-i},$$

где числовые коэффициенты $b_1(l)$ вычисляются рекурсивно.

Доказательство теоремы проводится аналогично теореме 1.

Для нахождения $b_1(l)$, $l = 1,2,...,p$ используем следующий алгоритм (начальные значения $b_1(1) = 1$, $m_1^* = 1$):

- Знаем $b_1(l)$, $l = 1,2,...,p-1$, $m_{p-1}^* = \max\{m : U(m,p-1) = V(m,p-1) - (m-p+1)\}$;
- Находим $b_1(m)$ из уравнения $U(m_{p-1}^*,p) = V(m_{p-1}^*,p) - (m_{p-1}^* - p)$;
- Если $U(m_{p-1}^*+1,p) > V(m_{p-1}^*+1,p) - (m_{p-1}^*+1-p)$, то $m_p^* = m_{p-1}^*$;
- Если $U(m_{p-1}^*+1,p) \leqslant V(m_{p-1}^*+1,p) - (m_{p-1}^*+1-p)$, то $m_p^* = m_{p-1}^*+1$ и $b_1(p)$ – решение уравнения $U(m_{p-1}^*+1,p) = V(m_{p-1}^*+1,p) - (m_{p-1}^*+1-p)$.

В таблице 2 представлены значения коэффициентов $b_1(p)/p$ для различных $p = 1,...,10$.

Таблица 2. Значения $b_1(p)/p$ для различных значений p

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{b_1(p)}{p}$	1	2	3	6	13	32	44	88	179	322

На рисунке 3 представлены границы принятия решений при покупке (нижняя) и продаже (верхняя) финансового актива для $m_0 =$

$p_0 = 100$. Оптимальная стратегия наблюдателя — принять решение о покупке актива, как только траектория достигнет нижней границы, а затем принять решение о продаже актива, как только траектория достигнет верхней границы.

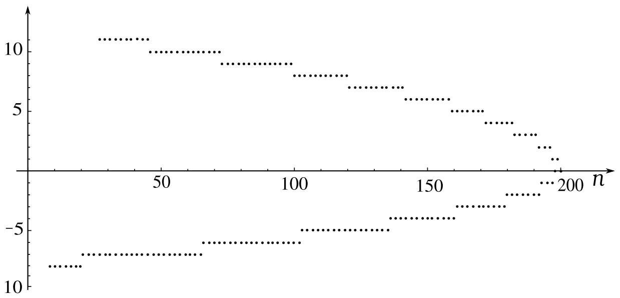

Рис. 3. Границы принятия решения для $m_0 = p_0 = 100$

Как видно на рисунке, граница принятия решения о покупке актива ближе к оси абсцисс, чем граница принятия решения о его продаже. Это связано с тем, что наблюдателю необходимо сделать двойной выбор, поэтому после того, как он уже купил акцию, его шансы получить больший выигрыш растут.

Заключение

В статье рассмотрена задача оптимальной двукратной остановки, в которой необходимо максимизировать значение полученной прибыли при покупке, а затем продаже финансового актива. Получено оптимальное поведение наблюдателя в классе пороговых стратегий. Представлены результаты численного моделирования.

Автор выражает благодарность проф. В. В. Мазалову за помощь в постановке задачи и обсуждении полученных результатов.

Работа поддержана грантами РФФИ, проект 10-01-00089а, проект 13-01-91158-ГФЕНа, а также Отделением математических наук и Программой стратегического развития ПетрГУ.

Литература

1. *Ивашко А. А.* Максимизация вероятности успеха в задаче оптимальной двукратной остановки для урновой схемы // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии, вып. 3. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2012. № 5. С. 33–37.

2. *Мазалов В. В., Фалько А. А.* Задача наилучшего выбора и ее применение в рекламных кампаниях поисковой системы Яндекс // Интернет-Математика 2007. Яндекс, 2007. С. 126–134.

3. *Николаев М. Л.* Об оптимальной многократной остановке марковских последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, вып. 2. С. 374–382.

4. *Фалько А. А.* Задача наилучшего выбора двух объектов // Методы математич. моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ Карельского НЦ РАН. Вып. 8. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2007. С. 34–42.

5. *Mazalov V. V., Tamaki M.* Duration problem on trajectories // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. 2007. Vol. 79(3–4). P. 211–218.

6. *Shepp L. A.* Explicit solutions to some problems of optimal stopping // Annals of Mathematical Statistics. 1969. N 40. P. 993–1010.

7. *Sofronov G., Keith J., Kroese D.* An optimal sequential procedure for a buying-selling problem with independent observations // J. Appl. Prob. 2006. Vol. 43. P. 454–462.

8. *Tamaki M.* Optimal stopping on trajectories and the ballot problem // Journal of Applied Probability. 2001. N 38. P. 946–959.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ивашко Анна Антоновна
научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: aivashko@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Ivashko, Anna
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: aivashko@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312