

УДК 51-76

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ В АЭРОТЕНКЕ

А. Н. Кириллов<sup>1</sup>, Н. В. Смирнов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладных математических исследований  
Карельского научного центра РАН*

<sup>2</sup>*Петрозаводский государственный университет*

Предложена математическая модель взаимосвязанных процессов нитрификации и окисления активным илом легко биоразложимых органических веществ. На основе методов теории чувствительности определяются подмножества идентифицируемых параметров, находятся характеристики параметрической идентифицируемости модели и значения параметров.

**Ключевые слова:** аэротенк, нитрификация, окисление, дифференциальные уравнения, параметрическая идентификация.

### **A. N. Kirillov, N. V. Smirnov. PARAMETER ESTIMATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE BIOLOGICAL TREATMENT PROCESS IN AN AERATION TANK**

A mathematical model of nitrification and oxidation of readily biodegradable organic matter by active sludge is proposed. Subsets of identifiable parameters are determined. Parametric identifiability characteristics of the model and values of the parameters were found out by means of the sensitivity theory.

**Key words:** aeration, nitrification, oxidation, differential equations, parameter estimation.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Очистка сточных вод является одной из наиболее важных задач рационального природопользования. В настоящее время широкое распространение получила биологическая очистка воды, которая включает в себя множество процессов [3, 5, 6]. При этом математическое моделирование является основным инструментом исследования и управления этими процессами [1, 10, 11] и др.

В 1987 г. группой исследователей под руководством М. Хенце (M. Henze) была предложена динамическая модель процесса биоочисти-

ки (ASM1) [12], имеющая методологический характер и задающая направления дальнейших исследований. При этом значения параметров моделей и вид правых частей соответствующих дифференциальных уравнений существенно зависят от конкретных очистных сооружений [9, 13].

Вследствие объективной невозможности учесть все процессы, происходящие при биоочистке, а также малого количества экспериментальных данных и их «зашумленности» оценка параметров моделей является трудноразрешимой задачей. Для параметрической

идентификации предлагаются различные подходы, в том числе использующие метод функций Ляпунова [7], метод максимального правдоподобия [14], методы теории чувствительности [15].

На основе [13] авторы в [4], используя компартментальный подход, предложили систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для описания процесса биоочистки. В правые части уравнений введены пороговые функции, позволяющие учесть преимущественное протекание процессов окисления легко биоразложимых органических веществ и нитрификации в соответствующих зонах аэротенка.

В данной статье, в отличие от [4], предлагается модель с переменной структурой, что позволяет более адекватно описывать процесс биоочистки. Используя методы теории чувствительности [9], находятся характеристики идентифицируемости параметров модели и подмножество параметров, идентифицируемых с достаточной точностью. На основе [15] решается задача параметрической идентификации. При этом в связи с нехваткой экспериментальных данных использован метод сканирования, результаты которого уточнены с помощью функций чувствительности.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ

Рассматривается процесс биологической очистки сточных вод в аэротенке, в котором происходит идеальное перемешивание иловой смеси. Аэротенк (рис.) состоит из трех коридоров, условно разделенных на пять компартментов  $C_n$ ,  $n = 1, \dots, 5$ , границы которых соответствуют точкам отбора проб. Иловая смесь, пройдя регенератор (первый коридор), попадает во второй коридор аэротенка, где она перемешивается со сточной водой. Состояние иловой смеси в выделенном объеме характеризуется постоянными для каждого компартмента параметрами и переменными концентрациями микроорганизмов активного ила, субстрата.

Введем обозначения (для простоты записи не будем использовать в них номера компартментов):  $S_O$  — концентрация растворенного кислорода;  $S_S^{in}, S_{NH}^{in}, X_H^{in}, X_A^{in}$  — концентрации легко биоразложимых органиче-

ских веществ, аммония, гетеротрофных микроорганизмов, автотрофных микроорганизмов соответственно на входе в аэротенк;  $S_S, S_{NH}, X_H, X_A$  — концентрации тех же субстратов и микроорганизмов на выходе из аэротенка;  $K_S, K_{NH}, K_{O,H}, K_{O,A}$  — константы полунасыщения: гетеротрофов легко биоразложимыми органическими веществами, автотрофов аммонием, гетеротрофов кислородом, автотрофов кислородом соответственно;  $Y_H$  и  $Y_A$  — константы перехода массы легко биоразложимого органического субстрата в биомассу гетеротрофов и массы аммония в биомассу автотрофов соответственно;  $\mu_H$  и  $\mu_A$  — максимальные скорости роста гетеротрофов и автотрофов соответственно;  $b_H$  и  $b_A$  — скорости распада гетеротрофов и автотрофов соответственно.

Концентрация  $S_S$  характеризуется значением БПК<sub>полн</sub> (полное биохимическое потребление кислорода для окисления субстрата). Как показывает практика, активный ил не окисляет весь субстрат к концу аэротенка, поэтому введем константу  $c > 0$  — остаточную концентрацию органики. В качестве  $c$  можно использовать значение БПК<sub>полн</sub> очищенной от активного ила жидкости на выходе из аэротенка.

Для описания процесса подавления гетеротрофами автотрофов при конкуренции за кислород введены пороговые функции [4]:

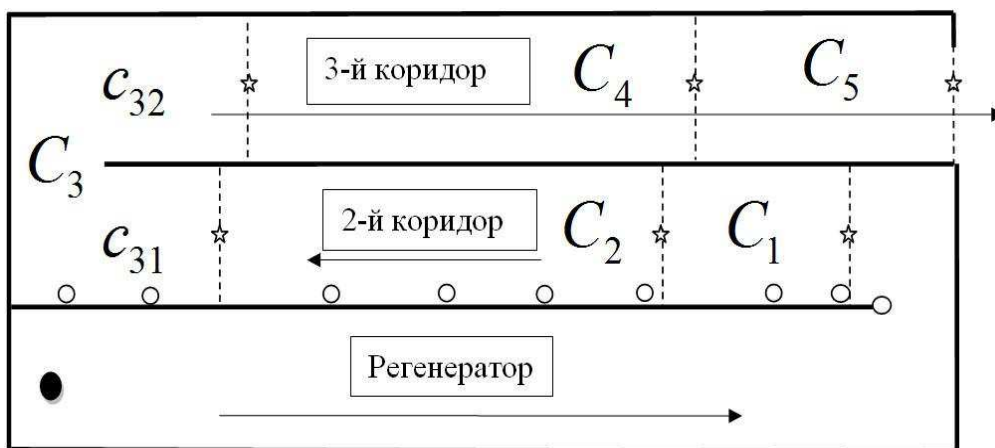
$$f_1(S_S) = \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}},$$

$$f_2(S_S, S_{NH}, K_\alpha) = \frac{S_{NH}/(S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH}/(S_S - c)},$$

где  $K_\alpha, \delta$  — некоторые положительные постоянные, характеризующие переключение процессов окисления и нитрификации. Компьютерные эксперименты показали, что значение  $\delta = 10^{-3}$  достаточно для осуществления описанного выше переключения. Значение  $K_\alpha \in [3, 5]$  (экспертная оценка) зависит от компартмента.

Рассмотрим математическую модель процесса биоочистки (1)–(4), предложенную в [4],

где  $f(x, p) = \frac{x}{x + p}$  — трофическая функция Моно,  $Q$  — суммарный расход сточной воды и смеси ила:



- – место вхождения сточной воды в аэротенк;
- – место вхождения иловой смеси в аэротенк;
- ☆ – место отбора проб;
- – направление движения иловой смеси;
- – граница компартмента.

Схема аэротенка

$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - \frac{\mu_H}{Y_H} f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}} X_H, \quad (1)$$

$$\dot{S}_{NH} = Q(S_{NH}^{in} - S_{NH}) - \frac{\mu_A}{Y_A} f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH}/(S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH}/(S_S - c)} X_A, \quad (2)$$

$$\dot{X}_H = Q(X_H^{in} - X_H) + \left( \mu_H f(S_S, K_S) f(S_O, K_{O,H}) \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}} - b_H \right) X_H, \quad (3)$$

$$\dot{X}_A = Q(X_A^{in} - X_A) + \left( \mu_A f(S_{NH}, K_{NH}) f(S_O, K_{O,A}) \frac{S_{NH}/(S_S - c)}{K_\alpha + S_{NH}/(S_S - c)} - b_A \right) X_A. \quad (4)$$

В активном иле выделяются две группы микроорганизмов: гетеротрофные и автотрофные с концентрациями  $X_H$  и  $X_A$  соответственно, которые окисляют субстрат в сточной воде. При насыщении микроорганизмов определенным типом субстрата они временно прекращают его изъятие из сточной воды, вследствие чего изменяются параметры модели. Так как иловая смесь проходит каждый компартмент за достаточно малый промежуток времени, будем считать значения параметров в каждом  $C_n$  постоянными.

Календарный год можно разбить на периоды, в каждом из которых суточный объем приходящей сточной воды и концентрации разных типов субстрата в ней можно считать постоянными. При наличии разных типов субстрата гетеротрофы преимущественно окисляют лег-

ко биоразложимый субстрат, что происходит в основном во втором коридоре аэротенка. При достаточном приближении  $S_S$  к значению  $c$  гетеротрофы начинают окислять другие типы субстрата. Активизация этого процесса требует некоторого времени, поэтому окисление других типов субстрата в основном происходит в третьем коридоре. Для описания этого процесса переключения предлагается для компартментов третьего коридора уравнения (1), (3) заменить соответственно на уравнения:

$$\dot{S}_S = Q(S_S^{in} - S_S) - \frac{1}{1 + e^{10^6 \left( \frac{c+\delta}{S_S} - 1 \right)}} X_H, \quad (5)$$

$$\dot{X}_H = Q(X_H^{in} - X_H) + \beta \frac{V_{cv}}{V_{il}} X_H, \quad (6)$$

где  $V_{cv}$ ,  $V_{il}$  — расходы сточной воды и активного ила соответственно,  $\beta$  — параметр, характеризующий удельную скорость роста гетеротрофов за счет окисления других типов субстрата, не являющихся легко биоразложимой органикой. Параметр  $\beta$  определяется экспертом. Таким образом, динамика процесса описывается системой с переменной структурой.

К моменту вхождения в  $C_5$  активный ил окислил большую часть субстрата (которую потенциально мог окислить), вследствие чего уменьшается скорость роста микроорганизмов активного ила, число отмирающих клеток не компенсируется образованием новых. В результате параметр  $\beta$  в  $C_5$  принимает значение меньше нуля.

Отметим, что в сточной воде содержатся вещества, ингибирующие окислительные свойства микроорганизмов (тяжелые металлы, фенолы, поверхностно-активные вещества и др.), поэтому с увеличением объема сточной воды в иловой смеси уменьшается скорость окисления субстрата активным илом. К концу второго коридора в иловую смесь попадает большое количество ингибирующих веществ. Уменьшение скорости окислительных реакций учтено путем уменьшения  $\mu_A$ . В результате этот параметр может выходить за границы области допустимых значений.

Таким образом, динамику концентраций в каждом компартменте описывают соответствующие уравнения из (1)–(6). Компартмент  $C_3$  условно разделим на два субкомпартамента  $c_{31}$ ,  $c_{32}$  так, что начало  $c_{31}$  совпадает с началом  $C_3$ . Для определения конца  $c_{31}$  (начала  $c_{32}$ ) находится момент времени, к которому органика окислена до уровня  $s$ . Динамику концентраций в  $C_1, C_2, c_{31}$  описывают уравнения (1)–(4), а в  $c_{32}, C_4, C_5$  — (2), (4), (5), (6).

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

В качестве экспериментальных данных для численного моделирования использованы: БПК<sub>полн</sub> в начале  $C_1$  и в конце  $C_5$ , концентрации аммония  $S_{NH}$ , кислорода  $S_O$  и общая концентрация микроорганизмов  $X$  на границах компартментов. Все данные были получены на очистных сооружениях г. Петрозаводска в марте 2013 г.

Специфика получения концентрации микроорганизмов активного ила такова, что в значение  $X$  также входят концентрации отмерших клеток активного ила и субстрата, абсорбированного живыми клетками. Дальнейшие

рассуждения основываются на двух предположениях. Суть первого в том, что абсорбированный субстрат через некоторое время преобразуется в биомассу активного ила, второго — часть отмерших клеток удаляется вместе с избыточным активным илом после каждого прохождения иловой смесью аэротенка, что позволяет поддерживать соотношение отмерших и живых клеток активного ила на некотором уровне. Таким образом, экспериментальное значение  $X$  с достаточной точностью является концентрацией микроорганизмов. Чтобы в  $X$  выделить  $X_A$  и  $X_H$ , воспользуемся соотношением этих концентраций из [8].

При получении экспериментальных данных общепринятая в практике допустимая погрешность по концентрации аммония составляет  $\pm 0,5$  г/м<sup>3</sup> (экспертная оценка), по концентрации микроорганизмов — 14 % (по принятым нормам).

В каждом компартменте идентифицируются параметры, которые входят в уравнения, соответствующие этому компартменту. Вследствие отсутствия экспериментальных данных в конце  $c_{31}$  для нахождения значений концентраций на выходе из этого субкомпартамента использовались значения параметров из  $C_2$ .

Пусть  $n_p$  — количество параметров модели,  $T$  — символ операции транспонирования,  $P = (p_1, \dots, p_{n_p})^T$  — вектор параметров:  $P \in \Pi = \{P : p_j \in [\underline{P}_j, \bar{P}_j]\} \in R^{n_p}$ ,  $j = 1, \dots, n_p$ , где  $\underline{P}_j$  и  $\bar{P}_j$  — нижняя и верхняя границы допустимых значений параметра  $p_j$  соответственно. Методом сканирования [2] для каждого  $C_n$  находится вектор параметров  $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_{n_p}^0)^T$ , доставляющий минимум критерию оптимальности

$$J = \sum_{i=1}^{n_y} sc_i^2 (y_i - y_i^m(P))^T (y_i - y_i^m(P)),$$

где  $y_i, y_i^m(P)$  — экспериментальные и модельные значения концентраций соответственно в конце компартмента,  $n_y$  — количество измеряемых концентраций,  $i = 1, \dots, n_y$ . Для удобства записи опустим номер компартмента в обозначении масштабирующих коэффициентов  $sc_i$ , в качестве которых используются величины, обратные среднему значению соответствующих концентраций.

Так как имеются экспериментальные значения концентраций  $S_{NH}$  и  $X$ , то  $n_y = 2$ . Введем обозначения:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, y^m(P) = \begin{pmatrix} y_1^m(P) \\ y_2^m(P) \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

где  $y_1, y_2$  и  $y_1^m(P), y_2^m(P)$  — экспериментальные и модельные значения концентраций  $S_{NH}$  ( $y_1, y_1^m(P)$ ) и  $X$  ( $y_2, y_2^m(P)$ ) соответственно на выходах из компартментов,  $e_i = sc_i(y_i - y_i^m(P))$ .

Введем величину  $s_{ij}$ , характеризующую чувствительность критерия оптимальности  $J$  к изменению параметра:

$$s_{ij} = sc_i \frac{y_i^m(P^0 + \delta P_j) - y_i^m(P^0)}{\delta p_j},$$

где  $\delta P_j$  — вектор-столбец с нулевыми компонентами, кроме  $j$ -й компоненты (равной  $\delta p_j$ ),  $y_i^m(P^0)$  и  $y_i^m(P^0 + \delta P_j)$  — модельные значения концентраций. Таким образом получим матрицу  $S = \{s_{ij}\}$ , результатом нормирования столбцов которой будет матрица  $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}$ , где  $\tilde{s}_{ij} = s_{ij}/\|s_j\|$ ,  $\|s_j\| = s_{1j}^2 + s_{2j}^2$ .

В [9] приведены два условия идентифицируемости подмножества значений параметров  $K \subset \Pi$  такого, что  $K \subset R^k$ ,  $k \leq n_p$ . Во-первых, вектор модельных данных  $y^m(P)$  должен быть существенно чувствителен к изменению каждого параметра из  $K$ . Во-вторых, отклонения  $y^m(P)$ , вызванные изменением какого-либо  $j$ -го параметра, не должны в точности совпадать с отклонениями  $y^m(P)$ , которые вызваны изменениями других параметров из  $K$ .

Выполнение первого условия проверяется значением меры чувствительности (sensitivity measure)  $\delta_j^{\text{msqr}}$ , которая находится для каждого параметра в каждом компартменте [9]:

$$\delta_j^{\text{msqr}} = \sqrt{\frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_y} s_{ij}^2}.$$

Увеличению чувствительности критерия оптимальности  $J$  к изменению  $j$ -го параметра со-

ответствует увеличение значения  $\delta_j^{\text{msqr}}$ . Значения мер чувствительности для  $C_1$  приведены в таблице 1.

Для проверки второго условия вводится индекс коллинеарности (collinearity index)  $\gamma_k$  подмножества  $K$ :

$$\gamma_k = \frac{1}{\min_{\|\xi\|=1} \|\tilde{S}_k \xi\|} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}},$$

где  $\tilde{S}_k$  — матрица, содержащая  $k$  вектор-столбцов матриц  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{\lambda}_k$  — наименьшее собственное число матрицы  $\tilde{S}_k^T \tilde{S}_k$ ,  $\xi$  — вектор коэффициентов длиной  $k$ . Индекс коллинеарности  $\gamma_k$  в некотором смысле является мерой линейной зависимости столбцов матрицы  $\tilde{S}_k$ , причем уменьшению  $\gamma_k$  соответствует уменьшение этой меры. Второе условие считается выполненным [9] при:

$$\gamma_k < 10. \quad (7)$$

Мера детерминанта (determinant measure)  $\rho_k$  зависит от выполнения обоих вышеуказанных условий и является показателем идентифицируемости подмножества  $K$ :

$$\rho_k = (\det(S_k^T S_k))^{1/(2k)} = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_j \right)^{1/(2k)},$$

где  $S_k$  — матрица, содержащая  $k$  вектор-столбцов матрицы  $S$ ,  $\lambda_j$  — собственное число матрицы  $S_k^T S_k$ . Причем чем больше значение  $\rho_k$ , тем более точно можно идентифицировать подмножество параметров.

Найденные индексы коллинеарности показывают, что при выполнении условия (7) подмножество  $K$  может содержать максимально два параметра. Такое максимальное количество параметров сохраняется и для любого  $\gamma_k \leq 100$ .

Таблица 1. Значения мер чувствительности  $\delta_j^{\text{msqr}}$

Параметр	$C_1$	$C_2$	$c_{32}$	$C_4$	$C_5$
$Y_H$	0,49	0,25	—	—	—
$Y_A$	3,06	3,72	0,97	2,03	0,01
$\mu_H$	52,53	38,67	—	—	—
$\mu_A$	936,02	1888,10	782,85	20452,00	2341,40
$b_H$	9,59	23,39	—	—	—
$b_A$	4,80	21,90	2,78	2,93	0,80
$K_S$	0,00	0,00	—	—	—
$K_{NH}$	0,11	0,25	0,06	0,05	0,00
$K_{O,H}$	0,06	0,05	—	—	—
$K_{O,A}$	0,08	0,26	0,06	0,03	0,00
$K_\alpha$	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
$\beta$	—	—	15,67	26,98	10,781

Для первого компартамента в таблице 2 представлены  $\gamma_k$  и  $\rho_k$  всех наборов параметров, удовлетворяющих условию (7). Из таблицы 2 можно сделать выводы о том, что  $b_H$  в паре с каждым из остальных параметров в  $C_1$  имеет достаточно маленький индекс коллинеарности (близкий к 1). Подмножество  $K$ , состоящее из двух параметров ( $b_H, \mu_A$ ), имеет наибольшую меру детерминанта, т. е. эта пара параметров в  $C_1$  наиболее точно идентифицируема.

Таблица 2. Характеристики идентифицируемости подмножества, содержащего пары параметров, в первом компарimente

Параметр	Параметр	$\gamma_k$	$\rho_k$
$Y_H$	$b_H$	1,10	3,03
$Y_A$	$b_H$	1,11	7,58
$\mu_H$	$b_H$	1,11	31,45
$\mu_A$	$b_H$	1,11	132,74
$b_A$	$b_H$	1,19	9,38
$K_S$	$b_H$	1,11	0,18
$K_{NH}$	$b_H$	1,11	1,44
$K_{O,H}$	$b_H$	1,11	1,09
$K_{O,A}$	$b_H$	1,11	1,29
$K_\alpha$	$b_H$	1,11	0,50

В таблице 3 для каждого компартамента представлены наиболее точно идентифицируемые параметры и их характеристики идентифицируемости.

Таблица 3. Характеристики подмножества наиболее точно идентифицируемых параметров в каждом компарimente

Компартмент	Параметры	$\gamma_k$	$\rho_k$
$C_1$	$\mu_A, b_H$	1,11	132,74
$C_2$	$\mu_A, b_H$	1,08	295,59
$c_{32}$	$\mu_A, \beta$	1,00	156,63
$C_4$	$\mu_A, \beta$	1,00	1050,50
$C_5$	$\mu_A, \beta$	1,00	224,69

Представленные выше результаты численного анализа обусловлены малым количеством измеряемых переменных, входящих в  $J$ . При увеличении количества экспериментальных данных можно ожидать увеличение количества идентифицируемых параметров.

Параметрическая идентификация произведена на основе алгоритма, представленного в [15]. В качестве начальной оценки значения вектора параметров  $P$  использован вектор  $P^0$ , найденный методом сканирования. Так как  $P^0$  достаточно близок к  $P$ , то отклонения

найденных значений параметров от экспериментальных  $\Delta P = P - P^0$  близки к нулю. На основе итерации Ньютона и аппроксимации Ньютона-Гаусса в [15] для нахождения  $\Delta P$  была получена система уравнений:

$$(S^T S)|_{P^0} \Delta P = S^T e_i|_{P^0}, \quad (8)$$

которая для предлагаемой модели оказывается плохо обусловленной. Для решения данной проблемы в [15] предложено масштабировать параметры и переменные или пронормировать столбцы матрицы  $S$ . Вычисления в пакете "GNU Octave" показали, что масштабирование и нормирование не дают требуемых результатов, матрица  $S^T S$  остается плохо обусловленной. В результате приходится ограничиться нахождением нормального решения системы (8).

Для большинства параметров уравнений (1)–(6) в [8] представлена область допустимых значений. В результате решения системы (8) находим  $\Delta P$ ; далее получаем вектор  $P = P^0 + \Delta P$ . Если значение параметра выходит из области допустимых значений, то в качестве него берется значение на границе соответствующей области, наиболее близкой к значению параметра. Для  $K_\alpha$  допустимая область была определена выше,  $\beta \in [\beta_\exists - 0,01|\beta_\exists|, \beta_\exists + 0,01|\beta_\exists|]$ , где  $\beta_\exists$  — значение параметра, определенное экспертом. Найденное значение  $P$  используется как новая начальная оценка  $P^0$ . Из системы (8) находится  $\Delta P$ . Алгоритм повторяется до тех пор, пока модуль разности модельных и экспериментальных данных на предыдущем шаге больше соответствующего модуля разности на новом шаге. Полученные значения параметров приведены в таблице 4.

Концентрации на выходе из  $C_n$ , найденные подстановкой  $P$  в соответствующие уравнения (1)–(6), приведены в таблице 5. Во втором, пятом столбцах этой таблицы представлены экспериментальные данные с очистных сооружений г. Петрозаводска. Выходные концентрации при использовании параметров, найденных методом сканирования, приведены в третьем, шестом столбцах, при уточненных значениях параметров — в четвертом, седьмом столбцах.

Из таблицы 5 видно, что уточнение значений параметров в большинстве случаев приближает модельные данные к экспериментальным. Возникающие отклонения модельных данных от экспериментальных не превосходят допустимых погрешностей измерений.

Таблица 4. Значения параметров в компартментах

Параметр	Единицы измерения	$C_1$	$C_2$	$c_{32}$	$C_4$	$C_5$
$Y_H$	г биомассы · (г БПК <sub>полн</sub> ) <sup>-1</sup>	0,75	0,75	–	–	–
$Y_A$	г биомассы · (г аммония) <sup>-1</sup>	0,17	0,28	0,28	0,07	0,28
$\mu_H$	сут <sup>-1</sup>	10,00	7,00	–	–	–
$\mu_A$	сут <sup>-1</sup>	0,80	0,80	0,66	0,01	0,001
$b_H$	сут <sup>-1</sup>	0,05	0,05	–	–	–
$b_A$	сут <sup>-1</sup>	0,05	0,05	0,05	0,09	0,06
$K_S$	г БПК <sub>полн</sub> · м <sup>-3</sup>	200,00	40,00	–	–	–
$K_{NH}$	г аммония · м <sup>-3</sup>	1,00	0,70	1,00	0,30	1,00
$K_{O,H}$	г O <sub>2</sub> · м <sup>-3</sup>	0,20	0,01	–	–	–
$K_{O,A}$	г O <sub>2</sub> · м <sup>-3</sup>	0,40	0,40	1,50	0,40	1,50
$K_\alpha$	г аммония · (г БПК <sub>полн</sub> ) <sup>-1</sup>	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
$\beta$	сут <sup>-1</sup>	–	–	20,30	4,56	–24,52

Таблица 5. Концентрации на выходе из компартментов

$C_i$	$S_{NH}$ (г аммония · м <sup>-3</sup> )			$X$ (г биомассы · м <sup>-3</sup> )		
	Эксп. данные	Сканирование	Уточнение	Эксп. данные	Сканирование	Уточнение
$C_1$	2,750	2,748	2,749	3300,000	3273,000	3273,000
$C_2$	3,500	3,501	3,500	2635,000	2631,500	2631,500
$C_3$	2,750	3,192	2,722	3430,000	3072,400	3081,100
$C_4$	2,250	2,444	2,249	3720,000	3843,600	3839,000
$C_5$	2,250	2,249	2,249	2760,000	2736,500	2744,800

## Выводы

Для описания процесса биоочистки в проточной биосистеме предложена математическая модель с переменной структурой, учитывающая окисление органики, аммония и динамику биомассы активного ила. Выбор тех или иных уравнений модели в каждом конкретном компартменте обусловлен спецификой процесса биологической очистки и очистных сооружений г. Петрозаводска.

По имеющимся экспериментальным данным найдены меры чувствительности рассматриваемого критерия оптимальности к изменению параметров, индексы коллинеарности и меры детерминантов, определяющие возможность идентификации некоторого подмножества параметров. В каждом компартменте определены подмножества параметров, идентифицируемых наиболее точно. С использованием методов теории чувствительности уточнены значения параметров, полученные методом сканирования.

Первостепенной задачей процесса биологической очистки является поддержание концентрации субстратов на выходе из аэротенка в допустимых пределах. При этом в процессе биоочистки имеют место значительные финан-

совые затраты на подачу воздуха в аэротенк, в связи с чем возникает задача построения управления, оптимального в смысле минимизации соответствующих затрат при поддержании выходных концентраций в допустимых пределах. При этом управляющей переменной является интенсивность подачи кислорода в аэротенк. Найденные значения параметров и информация об их идентифицируемости позволяют решать эту задачу.

*Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности на 2012–2016 гг.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 143 с.
2. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
3. Жмур Н. С. Управление процессом и контроль результата очистки сточных вод на сооружениях с аэротенками. М.: Луч, 1997. 172 с.
4. Кириллов А. Н., Рейсс Т. В., Смирнов Н. В. Математическое моделирование процессов нит-

рификации и окисления органических веществ в проточной биосистеме // Ученые записки ПетрГУ. Сер. «Естественные и технические науки», 2013. № 4 (133). С. 105–109.

5. *Хенце М., Армозс П., Ля-Кур-Янсен Й., Арван Э.* Очистка сточных вод. М.: Мир, 2004. 480 с.

6. *Яковлев С. В., Карюхина Т. А.* Биохимические процессы в очистке сточных вод. М.: Стройиздат, 1980. 200 с.

7. *Adetola V., Lehrer D., Guay M.* Adaptive estimation in nonlinearly parameterized nonlinear dynamical systems // American Control Conference on O'Farrell Street, San Francisco, USA, 2011. P. 31–36.

8. *Boukroune B., Darouach M., Gille S. et al.* A nonlinear observer for an activated sludge wastewater treatment process // USA, American Control Conference, 2009. P. 1027–1033.

9. *Brun R., Kühni M., Gujer W. et al.* Practical identifiability of ASM2d parameters – systematic selection and tuning of parameter subsets // Water Research, 2002. № 36. P. 4113–4127.

10. *Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environmental Technology, 6:11, 1985. P. 467–476.

11. *Dochain D., Vanrolleghem P. A.* Dynamical Modelling and Estimation in Wastewater Treatment Processes. London: IWA Publishing, 2001. 342 p.

12. *Henze M., Grady C. P. L., Gujer W. et al.* Activated sludge model no. 1. Scientific and Technical Report 1, IAWPRC Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment Processes. IAWPRC, London, 1987.

13. *Henze M., Gujer W., Mino T. et al.* Activated sludge models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3. Scientific and Technical Report 9, IWA Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment. London: IWA Publishing, 2000.

14. *Knights C. D., Peters C. A.* Statistical Analysis of Nonlinear Parameter Estimation for Monod Biodegradation Kinetics Using Bivariate Data // Biotechnol. Bioeng., 69, 2, 2000. P. 160–170.

15. *Chai Q.* Modeling, Estimation, and Control of Biological Wastewater Treatment Plants. Doctoral Theses at NTNU 2008:108 at HiT, Porsgrunn. Telemark University College, 2008.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

### **Кириллов Александр Николаевич**

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических исследований  
Карельского научного центра РАН  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 781108

### **Смирнов Николай Васильевич**

аспирант  
Институт прикладных математических исследований  
Карельского научного центра РАН  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
преподаватель  
Петрозаводский государственный университет  
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,  
Россия, 185910  
эл. почта: fresh.87@mail.ru  
тел.: (8142) 781108

### **Kirillov, Alexander**

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 781108

### **Smirnov, Nikolai**

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
Petrozavodsk State University  
33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia  
e-mail: fresh.87@mail.ru  
tel.: (8142) 781108