Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 80–86

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК

А. В. Колчин, Н. Ю. Энатская[1]

[1]*Московский институт электроники и математики*
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Рассматриваются различные процедуры перечисления всех исходов схемы перестановок, устанавливается взаимно однозначное соответствие между ними и их номерами в каждой процедуре перечисления, приводятся способы моделирования исходов схемы.

Ключевые слова: перечислительные задачи комбинаторного анализа, схема размещения, перестановка.

A. V. Kolchin, N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME

We consider several procedures to number all outcomes of a permutation scheme, establish a one-to-one correspondence between the outcome and its number generated in the numbering procedure, and give some methods to simulate the outcomes.

Key words: enumerative combinatorics, allocation scheme, permutation.

1. Процедуры перечисления исходов схемы перестановок

Схема перестановок длины r возникает при взаимном упорядочивании r различимых элементов между собой или при размещении r различимых частиц по r различимым ячейкам, вмещающим по одной частице. Общее число исходов схемы равно $r!$.

Рассмотрим несколько способов перечисления исходов схемы.

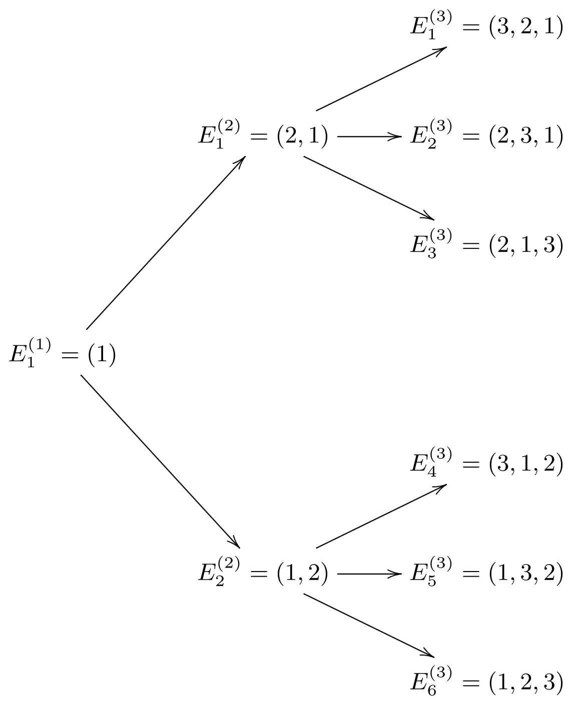
1.1. Метод графов перечисления исходов схемы перестановок

Построим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до r номерами, размещая каждый из них последовательно и случайно относительно каждой перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого, и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, то есть при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, \ldots, a_j)$ i-е состояние процесса (то есть i-ю перестановку $a_1, \ldots, a_j$) на j-м шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид, показанный на рисунке.

1.2. Монотонное перечисление исходов схемы перестановок

Будем сопоставлять каждой i-й из $r!$ перестановок длины r число R_i, составленное из номеров ее элементов, $i = 1, \ldots, r!$, и будем перечислять все исходы схемы, например, в порядке роста чисел R_i. Тогда среди $r!$ чисел образуется $r!/r = (r-1)!$ групп соответствующих перестановок длины r с фиксированными первыми элементами в порядке их роста от 1 до r, и в каждой из них имеется $(r-1)!/(r-1) = (r-2)!$ групп перестановок с фиксированными первыми двумя элементами в порядке роста номеров второго элемента, исключая номер первого фиксированного элемента, и так далее. Перечисляя таким образом перестановки элементов до последней с фиксированными остальными $r-1$ элементами, получаем все перестановки в порядке роста чисел R_i.

Продемонстрируем эту процедуру монотонного перебора перестановок на примере.



Граф переходов

Пример 1.

1. Пусть $r = 3$, $r! = 3! = 6$, $(r-1)! = 2$, $(r-2)! = 1$. Получаем очевидную последовательность перестановок в порядке роста чисел R_i: (123), (132), (213), (231), (312), (321).

2. Пусть $r = 4$, $r! = 4! = 24$, $(r-1)! = 3! = 6$, $(r-2)! = 2$, $(r-3)! = 1$. Получаем следующую последовательность перестановок в порядке роста чисел R_i, причем среди $r = 4$ групп по $(r-1)! = 6$ элементов с фиксированным первым элементом в порядке его роста, среди каждой из которых по $(r-2)! = 2$ элемента с фиксированным вторым элементом, а третий и четвертый элементы перечисляются в $2! = 2$ порядках по мере роста чисел R_i: (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (2134), (2143), (2314), (2341), (2413), (2431), (3124), (3142), (3214), (3241), (3412), (3421), (4123), (4132), (4213), (4231), (4312), (4321).

1.3. Метод отбраковки монотонного перечисления исходов схемы перестановок

Из предыдущего параграфа следует, что все исходы схемы перестановок находятся для описанных там же чисел R_i в диапазоне от числа $(1\ 2 \ldots r)$ до числа $(r\ (r-1) \ldots 1)$ в порядке их роста. Если считать составляющие их цифры номерами элементов и провести в каждом из них сначала отбраковку чисел с цифрами больше r и затем маркировку цифр по частотам их присутствия в числе, то для получения всех требуемых перестановок в порядке роста чисел R_i нужно оставить в исходной последовательности только числа с единичными маркировками. В результате получаем перечисление перестановок в том же порядке, что и в предыдущем параграфе. Покажем это на примере.

Пример 2. Пусть $r = 3$. Тогда числа R_i лежат в диапазоне от 123 до 321. Выкинем из них числа, состоящие из цифр, отличных от данных: 1, 2, 3. Получим растущие числа 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321. Из них с единичными маркировками останутся числа 123, 132, 213, 231, 312, 321, которые и являются всеми перечисленными в монотонно возрастающем порядке (в смысле R_i) исходами схемы перестановок длины 3.

2. Нумерация исходов схемы перестановок

Установление полноты перебора всех исходов схемы перестановок и удобство дальнейшего ее использования требует для каждой из предложенных процедур решения обратной и прямой задач нахождения соответствия чисел R_i и их номеров, то есть, соответственно, нахождения номера N по заданному числу R и нахождение числа R для данного номера N, где, как и раньше, число R представляет данную перестановку.

2.1. Нумерация исходов схемы перестановок, перечисленных методом графов

Обратная задача. Пусть задана перестановка размера r или число R, ей соответствующее. Требуется найти его номер N, который в силу процедуры формирования перестановок (см. п.1, рис.) определяется числами M_i, $i = 1, \ldots, r$, где M_i — номер места элемента i среди элементов перестановки от 1 до i, считая слева направо. Тогда для номера N получаем формулу

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r, \qquad (1)$$

или, так как $M_1 = 1$ и $r!/i! = 1$ при $i = r$, формулу (1) можно представить в виде

$$N = \sum_{i=2}^{r} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + 1.$$

Покажем, как работает формула (1) при нахождении номера N по данному числу R на примерах.

Пример 3. Пусть $r = 4$.

$R = 2431$. По рис., $N = N_4 = 6$. Вычислим N по (1):

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 1, \quad M_3 = 2, \quad M_4 = 2,$$

откуда следует, что

$$N = N_4 = (1-1)(4!)/(2!) + \\ + (2-1)(4!)/(3!) + 2 = 6.$$

$R = 1423$. По рис., $N = N_4 = 22$. Вычислим N по (1):

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = 3, \quad M_4 = 2,$$

откуда следует, что

$$N = N_4 = (2-1)(4!)/(2!) + \\ + (3-1)(4!)/(3!) + 2 = 22.$$

$R = 1234$. По рис., $N = N_4 = 24$. Вычислим N по (1):

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = 3, \quad M_4 = 4,$$

откуда следует, что

$$N = N_4 = (2-1)(4!)/(2!) + \\ + (3-1)(4!)/(3!) + 4 = 24.$$

Прямая задача. Пусть задан номер $N = N_r$ перестановки R размера r или числа R. Требуется найти число R. В силу процедуры формирования перестановок (см. п.1, рис.) число R определяется числами M_i, $i = 1, \ldots, r$, где M_i — номер позиции элемента i среди чисел перестановки от 1 до i, считая слева направо. Обозначим через N_k номер перестановки длины k в данной процедуре, порождающей искомую перестановку длины r с данным номером $N = N_r$. Тогда, так как $M_r = r$, если N делится на r, и $M_r = N \pmod r$ в противном случае, что может быть записано в виде формулы

$$M_r = (N_r - 1) \mod r + 1,$$

или, в общем случае, при $k = 1, \ldots, r$,

$$M_k = (N_k - 1) \mod k + 1, \qquad (2)$$

так как

$$N_{r-1} = \begin{cases} [N_r/r], & \text{если } N_r \text{ делится на } r, \\ [N_r/r] + 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что может быть записано в виде формулы

$$N_{r-1} = \left[\frac{N_r + r - 1}{r} \right],$$

где $[Z]$ — целая часть числа Z, или, в общем случае, при $k = 1, \ldots, r$,

$$N_{k-1} = \frac{N_k + r - k}{r - k + 1}. \qquad (3)$$

Покажем, как использовать формулы (2) и (3) для нахождения числа R по данному номеру $N - N_r$ на примерах.

Пример 4. Пусть $r = 4$.

$N = N_4 = 22$. По рис., $R = 1423$. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$\begin{aligned} M_4 &= (N_4 - 1) \mod 4 + 1 = \\ &= (22 - 1) \mod 4 + 1 = 2; \\ N_3 &= [(N_4 + 3)/4] = [(22 + 3)/4] = 6; \\ M_3 &= (N_3 - 1) \mod 3 + 1 = \\ &= (6 - 1) \mod 3 + 1 = 3; \\ N_2 &= [(N_3 + 2)/3] = [(6 + 2)/3] = 2; \\ M_2 &= (N_2 - 1) \mod 2 + 1 = \\ &= (2 - 1) \mod 2 + 1 = 2; \\ N_1 &= [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1; \end{aligned}$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем $R = 1423$, что совпадает с результатом по рисунку.

$N = N_4 = 24$. По рис., $R = 1234$. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$\begin{aligned} M_4 &= (N_4 - 1) \mod 4 + 1 = \\ &= (24 - 1) \mod 4 + 1 = 4; \\ N_3 &= [(N_4 + 3)/4] = [(24 + 3)/4] = 6; \\ M_3 &= (N_3 - 1) \mod 3 + 1 = \\ &= (6 - 1) \mod 3 + 1 = 3; \\ N_2 &= [(N_3 + 2)/3] = [(6 + 2)/3] = 2; \\ M_2 &= (N_2 - 1) \mod 2 + 1 = \\ &= (2 - 1) \mod 2 + 1 = 2; \\ N_1 &= [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1; \end{aligned}$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем $R = 1234$, что совпадает с результатом по рисунку.

$N = N_4 = 13$. По рис., $R = 4312$. Вычислим число R по формулам (2) и (3):

$$\begin{aligned} M_4 &= (N_4 - 1) \mod 4 + 1 = \\ &= (13 - 1) \mod 4 + 1 = 1; \\ N_3 &= [(N_4 + 3)/4] = [(13 + 3)/4] = 4; \\ M_3 &= (N_3 - 1) \mod 3 + 1 = \\ &= (4 - 1) \mod 3 + 1 = 1; \\ N_2 &= [(N_3 + 2)/3] = [(4 + 2)/3] = 2; \\ M_2 &= (N_2 - 1) \mod 2 + 1 = \\ &= (2 - 1) \mod 2 + 1 = 2; \\ N_1 &= [(N_2 + 1)/2] = [(2 + 1)/2] = 1; \end{aligned}$$

отсюда и из определения чисел M_i получаем $R = 4312$, что совпадает с результатом по рисунку.

2.2. Нумерация исходов схемы перестановок при их монотонном перечислении

Под монотонным перечислением подразумеваем перебор исходов схемы перестановок в порядке роста чисел R_i, представляющих перестановки.

Заметим, что при двух представленных в п.1 способах перечисления исходов схемы перестановок в итоге получаем их в монотонно возрастающем порядке в смысле чисел R_i, поэтому соответствие этих чисел и их номеров одинаково для обеих процедур перечисления исходов схемы.

Обратная задача. Пусть задана перестановка R размера r. Требуется найти ее номер $N = N_r$ при монотонно возрастающем перечислении всех исходов схемы перестановок. Искомый номер N определяется числами M_i, $i = 1, \ldots, r - 1$, где M_i есть порядковый номер по возрастанию для элемента на i-м месте среди элементов правее i-го места от 1 до i. Тогда из процедуры перечисления перестановок в п.1 следует, что искомый номер $N = N_r$ определяется по формуле

$$N_r = \sum_{i=1}^{r-2} (M_i - 1)(r - 1)! + M_{r-1}. \qquad (4)$$

Покажем на примерах решение обратной задачи по формуле (4).

Пример 5. Пусть $r = 4$. Для всех R при их перечислении как в п.1.2 в количестве $r! = 4! = 24$ найдем их номера по (4) при заранее известных номерах для проверки и представим результаты решения в таблице.

Прямая задача. Пусть задан номер $N = N_r$ перестановки длины r или числа R при монотонно возрастающем порядке перечисления чисел R, описанном в п.1.2. Требуется найти это число R, которое, как следует из процедуры перечисления перестановок, определяется численностями групп исходов с совпадающими первыми, первыми двумя, тремя и так далее элементами, которые соответственно равны $r!/r = (r - 1)!$, $(r - 1)!/(r - 1) = (r - 2)!$, и так далее. Поэтому, если искомое число $R = I_1 I_2 \ldots I_r$, где $I_1, I_2, \ldots, I_r$ — номера элементов перестановки, составляющих число R, то задача сводится к нахождению этих номеров. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_r$ — соответствующие числам $I_1, I_2, \ldots, I_r$ их относительные порядковые номера по возрастанию: i_1 — порядковый номер числа I_1 среди чисел $I_1, I_2, \ldots, I_r$,

i_2 — порядковый номер числа I_2 среди чисел $I_2, I_3, \ldots, I_r$, и так далее. Тогда определение числа $R = I_1 I_2 \ldots I_r$ сводится к нахождению значений $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и производится путем следующих последовательных вычислений:

$$i_1 = \begin{cases} [N_r/(r-1)!] + 1, & \text{если число } N_r \text{ не} \\ & \text{делится на } (r-1)!, \\ [N_r/(r-1!)] = i_1^* & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что можно записать в виде единой формулы

$$\begin{aligned} i_1 &= [(N_r + (r-1)! - 1)/(r-1)!]; \\ N_{r-1} &= N_r - i_1^*(r-1)!; \end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned} i_2 &= [(N_{r-1} + (r-2)! - 1)/(r-2)!]; \\ N_{r-2} &= N_{r-1} - i_2^*(r-2)!; \end{aligned}$$

а в общем случае вычисления проводятся по формулам

$$\begin{aligned} i_k^* &= [N_{r-k+1}/(r-k)!], \\ i_k &= [(N_{r-k+1} + (r-k)! - 1)/(r-k)!], \quad (5) \\ N_{r-k} &= N_{r-k+1} - i_k^*(r-k)!, \end{aligned}$$

где $k = 1, \ldots, r-1$.

Замечание 1. Если в процессе вычисления окажется, что $i_k = 0$, то это, в силу выбранной процедуры нумерации перестановок в п.1.2, означает, что в перестановке с $(k-1)$ первыми фиксированными номерами элементов $I_1, \ldots, I_{k-1}$ все остальные не найденные еще номера элементов перечисляются в порядке их убывания, так как это соответствует последней перестановке из ненайденных номеров в группе, то есть максимальному числу из не использованных еще номеров после $k-1$ первых фиксированных.

Покажем порядок вычислений для определения числа R по данному $N = N_r$ на примерах.

Решение обратной задачи по формуле

N	R	M_1	M_2	M_3	расчет $N = N_4$ по (4)
1	1234	1	1	1	$N = (1-1)3! + (1-1)2! + 1 = 1$
2	1243	1	1	2	$N = (1-1)3! + (1-1)2! + 2 = 2$
3	1324	1	2	1	$N = (1-1)3! + (2-1)2! + 1 = 3$
4	1342	1	2	2	$N = (1-1)3! + (2-1)2! + 2 = 4$
5	1423	1	3	1	$N = (1-1)3! + (3-1)2! + 1 = 5$
6	1432	1	3	2	$N = (1-1)3! + (3-1)2! + 2 = 6$
7	2134	2	1	1	$N = (2-1)3! + (1-1)2! + 1 = 7$
8	2143	2	1	2	$N = (2-1)3! + (1-1)2! + 2 = 8$
9	2314	2	2	1	$N = (2-1)3! + (2-1)2! + 1 = 9$
10	2341	2	2	2	$N = (2-1)3! + (2-1)2! + 2 = 10$
11	2413	2	3	1	$N = (2-1)3! + (3-1)2! + 1 = 11$
12	2431	2	3	2	$N = (2-1)3! + (3-1)2! + 2 = 12$
13	3124	3	1	1	$N = (3-1)3! + (1-1)2! + 1 = 13$
14	3142	3	1	2	$N = (3-1)3! + (1-1)2! + 2 = 14$
15	3214	3	2	1	$N = (3-1)3! + (2-1)2! + 1 = 15$
16	3241	3	2	2	$N = (3-1)3! + (2-1)2! + 2 = 16$
17	3412	3	3	1	$N = (3-1)3! + (3-1)2! + 1 = 17$
18	3421	3	3	2	$N = (3-1)3! + (3-1)2! + 2 = 18$
19	4123	1	1	1	$N = (4-1)3! + (1-1)2! + 1 = 19$
20	4132	4	1	2	$N = (4-1)3! + (1-1)2! + 2 = 20$
21	4213	4	2	1	$N = (4-1)3! + (2-1)2! + 1 = 21$
22	4231	4	2	2	$N = (4-1)3! + (2-1)2! + 2 = 22$
23	4312	4	3	1	$N = (4-1)3! + (3-1)2! + 1 = 23$
24	4321	4	3	2	$N = (4-1)3! + (3-1)2! + 2 = 24$

Пример 6. Пусть $r = 4$. Тогда все перестановки $r! = 4! = 24$ перечислены со своими номерами в примере 5. Будем вычислять числа R по данным N по формулам (5) с проверкой по примеру 5.

$N = N_4 = 22$. По примеру 5, $R = 4231$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [22/6] = 3; \quad i_1 = [(22+6-1)/6] = 4;$$
$$N_3 = 22 - 3(4-1)! = 4;$$

I_1 есть i_1-й, то есть четвертый по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 4$;

$$i_2^* = [4/2] = 2; \quad i_2 = [(4+2-1)/2] = 2;$$
$$N_2 = 4 - 2(3-1)! = 0;$$

I_2 есть i_2-й, то есть второй по величине элемент из элементов 1, 2, 3, отсюда получаем, что $I_2 = 2$;

$$i_3^* = [0/1] = 0; \quad i_3 = [(0+1-1)/1] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 1 и 3 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_3 = 3$, $I_4 = 1$, тогда получаем $R = 4231$, что совпадает с 22-й перестановкой из примера 5.

$N = N_4 = 13$. По примеру 5, $R = 3124$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [13/6] = 2; \quad i_1 = [(13+6-1)/6] = 3;$$
$$N_3 = 13 - 2(4-1)! = 1;$$

I_1 есть i_1-й, то есть третий по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 3$;

$$i_2^* = [1/2] = 0; \quad i_2 = [(1+2-1)/2] = 1;$$
$$N_2 = 1 - 0(3-1)! = 1;$$

I_2 есть i_2-й, то есть первый по величине элемент из элементов 1, 2, 4, отсюда получаем, что $I_2 = 1$;

$$i_3^* = [1/1] = 1; \quad i_3 = [(1+1-1)/1] = 1,$$

I_3 есть i_3-й, то есть первый по величине элемент из элементов 2, 4, отсюда получаем, что $I_3 = 2$, значит, $I_4 = 4$. Тогда получаем, что $R = 3124$, что совпадает с 13-й перестановкой из примера 5.

$N = N_4 = 24$. По примеру 5, $R = 4321$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [24/6] = 4; \quad i_1 = [(24+6-1)/6] = 4;$$
$$N_3 = 24 - 4(4-1)! = 0;$$

I_1 есть i_1-й, то есть четвертый по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 4$;

$$i_2^* = [0/2] = 0; \quad i_2 = [(0+2-1)/2] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 1, 2 и 3 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_2 = 3$, $I_3 = 2$, $I_4 = 1$, тогда получаем, что $R = 4321$, что совпадает с 24-й перестановкой из примера 5.

$N = N_4 = 14$. По примеру 5, $R = 3142$. Вычислим R по (5):

$$i_1^* = [14/6] = 2; \quad i_1 = [(14+6-1)/6] = 3;$$
$$N_3 = 14 - 2(4-1)! = 2;$$

I_1 есть i_1-й, то есть третий по величине элемент из элементов 1, 2, 3, 4, отсюда получаем, что $I_1 = 3$;

$$i_2^* = [2/2] = 1; \quad i_2 = [(2+2-1)/2] = 1;$$
$$N_2 = 2 - 1(3-1)! = 0;$$

I_2 есть i_2-й, то есть первый по величине элемент из элементов 1, 2, 4, отсюда получаем, что $I_2 = 1$;

$$i_3^* = [0/1] = 0; \quad i_3 = [(0+1-1)/1] = 0,$$

следовательно, остальные номера (неиспользованные) 2 и 4 в числе R (по замечанию 1) располагаем в порядке убывания, то есть $I_3 = 4$, $I_4 = 2$, тогда получаем, что $R = 3142$, что совпадает с 14-й перестановкой из примера 5.

3. Способы моделирования перестановок

1. Если установлено взаимно однозначное соответствие между всеми перестановками R и их номерами N, что было сделано в п.2, то моделирование перестановок производим методом маркировки (см. [1]), при котором отрезок $[0, 1]$ делим на $r!$ равных частей. Генерируем случайное число x и считаем смоделированной перестановку с номером части отрезка $[0, 1]$, на которую попадает число x.

Замечание 2. Если $r!$ так велико, что $1/r!$ меньше точности генерируемого случайного числа, то оно будет соответствовать нескольким номерам частей отрезка $[0, 1]$. Тогда среди них равновероятно методом маркировки выбираем одну конкретную перестановку.

2. Можно моделировать перестановки без их предварительной нумерации путем выполнения следующих шагов при их размере r:

1. генерируем r случайных чисел $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_r)$;
2. строим для последовательности $\bar{x}$ вариационный ряд $\bar{x}_\bullet = (x_{(1)}, \ldots, x_{(r)})$;
3. выписываем номера элементов $\bar{x}$ в порядке просмотра вектора $\bar{x}_{(\bullet)}$, тем самым получаем перестановку R.

Замечание 3. В шаге 3 можно поменять местами векторы $\bar{x}$ и $\bar{x}_{(\bullet)}$.

О методе маркировки

Для полноты изложения приведем кратко основные сведения о методе маркировки (см. [1]).

Метод маркировки является одним из методов генерирования («разыгрывания») дискретной случайной величины с заданным законом распределения

$$\mathsf{P}(X = x_k) = p_k.$$

На отрезке $[0, 1]$ изобразим точки вида $\sum_{k=1}^{s}$, $s = 1, 2, \ldots$

Пусть r — возможное значение случайной величины R, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, тогда

$$\mathsf{P}(0 < r < p_1) = p_1,$$
$$\mathsf{P}(p_1 < r < p_1 + p_2) = p_2, \ldots,$$
$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r < \sum_{i=1}^{k} p_i\right) = p_k, \ldots$$

Отсюда следует, что попадание случайного числа R на k-й отрезок моделирует полученное значение случайной величины $X = x_k$.

Замечание. Для многих основных распределений так называемый коэффициент воспроизводимости $\gamma_k = p_{k+1}/p_k$ имеет для всех k удобное общее выражение как функции от k. Поэтому в данном случае при использовании метода маркировки нет необходимости загрузки в память всего ряда распределения, вместо этого $\{p_k\}$ вычисляется по мере необходимости по формуле

$$p_{k+1} = \gamma_k p_k.$$

Литература

1. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Колчин Андрей Валентинович
к. ф.-м. н.
эл. почта: andrei.kolchin@gmail.com

Kolchin, Andrey
e-mail: andrei.kolchin@gmail.com

Энатская Наталия Юрьевна
доцент, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. М. Пионерская, 12, Москва,
Россия, 113054
эл. почта: nat1943@mail.ru

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
Higher School of Economics
12 M. Pionerskaya St.
113054 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru