Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 87–92

УДК 517.962.2:517.93

О СОХРАНЕНИИ УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИСТЕМЫ

А. В. Ласунский

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

С помощью первого метода Ляпунова получены достаточные условия сохранения положения равновесия и его асимптотической устойчивости при дискретизации неавтономной системы дифференциальных уравнений второго порядка. Соответствующий результат иллюстрируется на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы недосягаема для хищника.

Ключевые слова: сохранение устойчивости при дискретизации, первый метод Ляпунова, неавтономная модель Лотки-Вольтерры.

A. V. Lasunsky. MAINTAINING STEADY-STATE EQUILIBRIUM AFTER DISCRETIZATION OF THE SYSTEM

With the help of Lyapunov's first method we obtained sufficient conditions for maintaining the equilibrium state and its asymptotic stability after discretization of a nonautonomous system of second order differential equations. The result is illustrated by a modified Lotka-Volterra model in which part of the prey population is inaccessible for the predator.

Key words: preservation of stability after discretization, Lyapunov's first method, nonautonomous Lotka-Volterra model.

Введение

Решение дифференциальных уравнений численными методами, как правило, основано на сведении этих уравнений к уравнениям в конечных разностях. Роль таких уравнений существенно определяется применением вычислительных машин, требующих представления задач в дискретном виде. Важной проблемой, возникающей при дискретизации, является проблема сохранения качественных характеристик исследуемых систем. Переход от непрерывных уравнений к разностным уравнениям может повлечь существенное изменение свойств решений системы, в частности, может нарушиться устойчивость. Вопросами коррекции разностных схем для обеспечения согласованности между свойствами решений непрерывных и дискретных уравнений занимались В. И. Зубов [6], К. Деккер, Я. Вервер [3]. Связь между устойчивостью решений дифференциальных и разностных уравнений исследовалась в статьях М. А. Скалкиной [13, 14]. В своей работе Л. З. Фишман [15] изучает сохранение устойчивости решений дифференциальных уравнений при дискретизации их по методу Эйлера. Он показал, что устойчивость может не сохраняться при любом малом шаге дискретизации. Я. Е. Ромм [12] излагает схемы, ориентированные на компьютерный анализ устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Проблема сохранения устойчивости при переходе от обыкновенных дифференциальных уравнений к разностным изучалась в работе А. П. Жабко и А. Ю. Александрова [2]. В последней работе авторы отмечают, что с практической точки зрения весьма актуальной является задача выделения классов систем, для которых сохранение качественных характеристик при переходе к дискретному виду имеет место и без дополнительной коррекции разностных схем. Для решения ряда задач кроме согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле устойчивости требуется также сохранение таких характеристик, как устойчивость по отношению к постоянно действующим возмущениям, границы бассейна аттрактора и др. Особый интерес представляют системы дифференциальных уравнений, нулевые решения которых асимптотически устойчивы в целом (глобально асимптотически устойчивы). В этой статье с помощью первого метода Ляпунова получены достаточные условия согласованности между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле сохранения положения равновесия и его асимптотической устойчивости при дискретизации. Соответствующий результат иллюстрируется на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы недосягаема для хищника.

Достаточные условия сохранения устойчивости положения равновесия неавтономной системы дифференциальных уравнений второго порядка при дискретизации

Пусть (x_0, y_0) – положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,y), \\ \dot{y} = g(t,x,y), \end{cases} \tag{1}$$

$$t \geqslant t_0,\ f, g \in \mathbb{C}^{(0,1,1)}_{t,x,y}([t_0;+\infty) \times D),$$

где $D \subset \mathbb{R}^2$ окрестность (x_0, y_0). Стандартной заменой $u = x - x_0, v = y - y_0$ систему (1) можно привести к системе

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u + x_0, v + y_0) \\ \dot{v} = g(t, u + x_0, v + y_0) \end{cases}$$

с нулевым положением равновесия.

Матрица $A(t)$ системы первого приближения в окрестности этого положения равновесия имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} f'_x(t,x_0,y_0) & f'_y(t,x_0,y_0) \\ g'_x(t,x_0,y_0) & g'_y(t,x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

$$A(t) \in \mathbb{C}[t_0;+\infty).$$

Воспользуемся теоремой Ляпунова [4] об устойчивости по первому приближению в следующей формулировке.

Теорема 1. *Если система первого приближения*

$$\dot{y} = A(t)y,\ y \in \mathbb{R}^n,\ A(t) \in \mathbb{C}[t_0,+\infty),$$

$$\sup_t \|A(t)\| < \infty$$

правильна, все ее характеристические показатели отрицательны, причем выполнено условие нелинейности

$$\|f(t,x)\| \leqslant \psi(t)\|x\|^m,\ m > 1,$$

где $\psi(t)$ – непрерывная положительная функция при $t \geqslant t_0$ с нулевым характеристическим показателем, то тривиальное решение $x = 0$ полной нелинейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x),\ f(t,0) = 0,$$

$$f(t,x) \in \mathbb{C}^{(0,1)}_{t,x}\ (t_0 \leqslant t < +\infty,\ \|x\| < h)$$

экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$.

Отметим, что дискретный аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению получен В. Б. Демидовичем [5].

Как для системы дифференциальных, так и для системы разностных уравнений в неавтономном случае об устойчивости положения равновесия нельзя судить лишь по системе первого приближения. Даже если система первого приближения правильна и ее показатели Ляпунова отрицательны, устойчивость можно испортить нелинейными членами. В качестве иллюстрации этого факта приведем пример.

Пример 1. Скалярное уравнение

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2 - 4 \cdot 6^n x_n} = f(n, x_n)$$

имеет положение равновесия $x_n = 0$. Так как $\dfrac{\partial f(n,0)}{\partial x_n} = 0,5$, то уравнение первого приближения имеет вид $y_{n+1} = 0,5y_n$, положение равновесия $y_n = 0$ которого асимптотически устойчиво.

Построим общее решение исходного нелинейного уравнения. Имеем

$$x_{n+1}(2 - 4 \cdot 6^n x_n) = x_n,$$

$$\frac{1}{2^{n+1}x_{n+1}} - \frac{1}{2^n x_n} = -2 \cdot 3^n,$$

$$\Delta\left(\frac{1}{2^n x_n}\right) = -2\cdot 3^n,$$

$$\frac{1}{2^n x_n} = C - \sum_{k=0}^{n-1} 2\cdot 3^k = C_1 - 3^n,$$

$$x_n = \frac{1}{2^n(x_0^{-1}+1-3^n)},\ x_0 \neq 0.$$

Хотя все решения стремятся к нулю при $n \to +\infty$, тем не менее тривиальное решение $x_n = 0$ исходного уравнения неустойчиво по Ляпунову. Решения, сколь угодно близкие к нулю в начальный момент времени

$$x_0 = \frac{1}{2^N - 1 + 2^{-2N}} = \delta,$$

удовлетворяют условию $x_N = 2^N$. Неустойчивость можно было ожидать, так как достаточное условие на нелинейность [5] не выполнено. Функция

$$\psi(n) = \frac{\partial^2 f(n,0)}{\partial x_n^2} = 2\cdot 6^n$$

имеет положительный показатель Ляпунова.

Теорема 2. *Пусть существует* $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = A$, *причем* $\det A > 0,\ Sp\,A < 0$. *Пусть также выполнено условие на нелинейные члены системы* (1) *(см. теорему 1), тогда положение равновесия* (x_0, y_0) *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Действительно, линейная система $\dot{u} = A(t)u$ правильна, так как она почти приводима [1] к системе с постоянной матрицей. Из неравенств $\det A > 0$ и $SpA < 0$ следует, что собственные числа матрицы A второго порядка имеют отрицательную вещественную часть. Показатели Ляпунова в случае постоянной матрицы коэффициентов системы совпадают с вещественными частями собственных чисел матрицы A. Линейная система с постоянной матрицей коэффициентов имеет устойчивые характеристические показатели. Так как показатели Ляпунова в случае их устойчивости не меняются при линейных возмущениях, стремящихся к нулю на $+\infty$, то показатели Ляпунова системы первого приближения $\dot{u} = A(t)u$ также отрицательны.

Отметим, что еще К. П. Персидский [11] изучал линейные системы дифференциальных уравнений с коэффициентами-функциями слабой вариации. Он получил коэффициентный признак устойчивости характеристических показателей. Им же показано, что если функция $f(t)$ имеет конечный предел на $+\infty$, то функция $f(t)$ слабой вариации.

При численном интегрировании системы (1) нас будет интересовать сохранение положения равновесия при дискретизации, а также сохранение его устойчивости. Наиболее простым способом построения решения в точке t_{n+1}, если оно известно в точке t_n, является способ, основанный на разложении в ряд Тейлора. Обрывая ряды на соответствующих членах, для системы (1) мы можем получить

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \end{cases} \tag{2}$$

(метод Эйлера).

Если (x_0, y_0) – положение равновесия системы (1), то оно остается положением равновесия системы (2). Матрица $P(n) = P(t_n)$ системы первого приближения в окрестности положения равновесия (x_0, y_0) системы (2) имеет вид $P(n) = E + hA(n)$, E – единичная матрица.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда существует* h_0 *такое, что для всех* $0 < h < h_0$ *положение равновесия* (x_0, y_0) *системы* (2) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем, что при достаточно малом h положение равновесия (x_0, y_0) системы (2) также асимптотически устойчиво, как и у системы (1). Обозначим $P = \lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = E + hA$. Собственные числа матрицы P второго порядка по модулю меньше 1 тогда и только тогда, когда

$$|Sp\,P| - 1 < \det P < 1. \tag{3}$$

Если $\det A > 0,\ Sp\,A < 0$, то для достаточно малого h имеем $|Sp\,P| - 1 = |2 + hSp\,A| - 1 = 1 + hSp\,A, \quad \det P = \det(E + hA) = 1 + hSp\,A + h^2 \det A$. Неравенство (3), очевидно, выполняется. Шаг h достаточно выбрать удовлетворяющим неравенствам $2 + hSp\,A > 0,\ Sp\,A + h\det A < 0$. Воспользуемся следующим утверждением [10].

Теорема 4. *Если матрица коэффициентов системы*

$$x(n+1) = P(n)x(n), \quad \det P(n) \neq 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^m, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

имеет предел $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = P, \quad \det P \neq 0$, *то показатели Ляпунова решений этой системы совпадают с показателями Ляпунова предельной системы* $y(n+1) = Py(n)$ *и исходная система правильна.*

Условие на нелинейность системы (1) дает аналогичное условие на нелинейность системы (2). По дискретному аналогу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [5] положение равновесия (x_0, y_0) системы (2) асимптотически устойчиво. Теорема 3 доказана.

Неавтономная модель Лотки-Вольтерры

Проиллюстрируем предыдущий результат на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы $\varphi(x,y)$ недосягаема для хищника [9]

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)\left(x - M^{-1}x^2 - K^{-1}(x-\varphi(x,y))y\right), \\ \dot{y} = \beta(t)y\left(L^{-1}(x-\varphi(x,y)) - 1\right), \end{cases} \tag{4}$$

K, M, L – положительные числа, $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \varphi(x,y) < x$. Мальтузианские коэффициенты роста численности жертв $\alpha(t) > 0$ и убывания численности хищников $(-\beta(t)) < 0$ зависят от времени. Будем предполагать, что существуют $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \beta(t) = \beta > 0$, что соответствует стабилизации мальтузианских коэффициентов с течением времени.

Из биологической интерпретации системы (4) следует, что фазовые переменные $x(t), y(t)$ должны принимать лишь неотрицательные значения. Выполнение этого факта вытекает из следующей теоремы [7].

Теорема 5. *Для того чтобы решение системы*

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ i = \overline{1,n}$$

при любых неотрицательных начальных условиях было неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы функции F_i удовлетворяли условию квазиположительности:

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ i = \overline{1,n}$$

при любых неотрицательных переменных $x_j,\ j \neq i$.

Здесь уместно отметить монографию [8], посвященную систематическому изложению математической теории отбора.

Рассмотрим несколько случаев вида $\varphi(x,y)$:

1) для случая $\varphi(x,y) = m,\ m \geqslant 0$ положение равновесия

$$x_0 = m+L,\ y_0 = KL^{-1}M^{-1}(m+L)(M-L-m) \tag{5}$$

при естественном предположении $M > L + m$ имеет биологический смысл. Для элементов матрицы $A(t)$ системы первого приближения получаем следующие выражения:

$$a_{11}(t) = \alpha(t)L^{-1}M^{-1}(m^2 - L^2 - mM);$$

$$a_{21}(t) = KM^{-1}(m+L)(M-L-m)\beta(t);$$

$$a_{12}(t) = -LK^{-1}\alpha(t);\ a_{22}(t) = 0.$$

Имеем

$$\det A(t) = LM^{-1}(m+L)(M-L-m)\alpha(t)\beta(t) > 0,$$

$Sp\,A(t) = \alpha(t)L^{-1}M^{-1}(m^2 - L^2 - mM) < -(L + m)M^{-1}\alpha(t) < 0$.

Ясно, что для матрицы $A = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$ при условии $M > L + m$ также выполняются неравенства $\det A > 0,\ Sp\,A < 0$. Условие на нелинейность выполнено, так как функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ имеют нулевые характеристические показатели в силу ограниченности. По теореме 2 положение равновесия (5) системы (4) асимптотически устойчиво.

Если мы подвергнем систему (4) дискретизации, то нужно позаботиться о неотрицательности x_n и y_n. Ясно, что для системы (2) этот факт в общем случае может не иметь места. Вместо системы (2) мы рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \exp(hf(t_n, x_n, y_n)), \\ y_{n+1} = y_n \exp(hg(t_n, x_n, y_n)). \end{cases} \tag{6}$$

Ясно, что если (x_0, y_0) положительное положение равновесия системы (1), то оно является положением равновесия и системы (6), причем $x_n > 0,\ y_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Матрица $\widetilde{P}(n)$ системы первого приближения в окрестности положения равновесия (x_0, y_0) системы (6) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + x_0hf'_x(t_n, x_0, y_0) & x_0hf'_y(t_n, x_0, y_0) \\ y_0hg'_x(t_n, x_0, y_0) & 1 + y_0hg'_y(t_n, x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для системы (4) и рассматриваемого случая 1) имеем

$$\widetilde{P} = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{P}(n) = E + h\begin{pmatrix} x_0a_{11} & x_0a_{12} \\ y_0a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\lim_{t\to+\infty} A(t) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для достаточно малых h с учетом того, что $SpA = a_{11} < 0,\ \det A = -a_{12}a_{21} > 0$, имеем $|Sp\widetilde{P}| - 1 = |2 + hx_0a_{11}| - 1 = 1 + hx_0a_{11} < \det \widetilde{P} < 1$, так как $\det \widetilde{P} = 1 + hx_0a_{11} + x_0y_0h^2 \det A$. Шаг h достаточно выбрать удовлетворяющим условиям

$$2 + hx_0a_{11} > 0,\ a_{11} + y_0h \det A < 0. \tag{8}$$

Так как правые части уравнений системы (4) являются многочленами двух переменных с ограниченными коэффициентами, то для системы (6) выполнено условие на нелинейность для применения теоремы об устойчивости по первому приближению.

Теорема 6. *Если $M > L+m$ и шаг дискретизации h удовлетворяет неравенствам* (8)*, то положение равновесия* (5) *системы* (6)*, полученной дискретизацией системы* (4) *для случая $\varphi(x,y) = m,\ m \geqslant 0$, асимптотически устойчиво.*

2) Для случая $\varphi(x,y) = mx,\ m \in (0;1)$ система (4) переобозначением коэффициентов $(1-m)K^{-1} = K_1^{-1}$, $(1-m)L^{-1} = L_1^{-1}$ приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(t)x(1 - yK_1^{-1} - xM^{-1}), \\ \dot{y} = \beta(t)y(xL_1^{-1} - 1), \end{cases} \tag{9}$$

с положением равновесия $(L_1; K_1M^{-1}(M - L_1))$, которое получается из положения равновесия (5), если положить $m = 0,\ K = K_1,\ L = L_1$. Итак, случай 2) сводится к случаю 1), если $m = 0$. Теорема 6 остается справедливой.

3) Для случая $\varphi(x,y) = my,\ m \in (0;1)$ система (4) имеет два нетривиальных положения равновесия. Одно из них не имеет биологического смысла, так как в нем $x_0 < 0$. При условии $M > L$ второе положение равновесия $(x_0; y_0)$ лежит в области допустимых значений переменных x, y. Здесь x_0 – положительный корень уравнения $Kmx^2 + (ML - MKm)x - ML^2 = 0$, $\quad y_0 = (x_0 - L)m^{-1}$[9]. Далее в этом пункте мы рассматриваем это положение равновесия. Матрица $A(t)$ системы первого приближения в окрестности $(x_0; y_0)$ имеет следующие элементы:

$$a_{11}(t) = \alpha(t)\left(1 - 2M^{-1}x_0 - (x_0 - L)m^{-1}K^{-1}\right),$$

$$a_{12}(t) = \alpha(t)K^{-1}(x_0 - 2L),$$

$$a_{21}(t) = \beta(t)m^{-1}L^{-1}(x_0 - L),$$

$$a_{22}(t) = \beta(t)L^{-1}(L - x_0).$$

Для этой матрицы $\det A(t) > 0$, а если $M < 2L$, то $SpA(t) < 0$ [9]. Заметим, что если существуют $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \beta(t) = \beta > 0$, то для матрицы $A = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$ имеем тоже строгие неравенства $\det A > 0,\ Sp\, A < 0$.

Теорема 7. *Если $L < M < 2L$ и шаг дискретизации h удовлетворяет неравенствам $2 + h(x_0a_{11} + y_0a_{22}) > 0$, $x_0a_{11} + y_0a_{22} + x_0y_0h\det A < 0$, то положение равновесия (x_0, y_0) системы* (6)*, полученной дискретизацией системы* (4) *для случая $\varphi(x,y) = my$, $m > 0$, асимптотически устойчиво.*

Действительно, для матрицы $\widetilde{P}$ выполняются неравенства $|Sp\widetilde{P}| - 1 = |2 + h(x_0a_{11} + y_0a_{22})| - 1 = 1 + h(x_0a_{11} + y_0a_{22}) < 1 + h(x_0a_{11} + y_0a_{22}) + x_0y_0h^2\det A = \det\widetilde{P} < 1$, так как коэффициенты $a_{11} < 0$ и $a_{22} < 0$ [9]. Система первого приближения $u_{n+1} = \widetilde{P}(n)u_n$ правильна и имеет отрицательные показатели Ляпунова (см. теорему 4). Условие на нелинейность тоже выполнено.

Заключение

Указан класс неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, для которых сохранение положения равновесия и его асимптотической устойчивости при переходе к дискретному виду имеет место и без дополнительной коррекции разностных схем. Рассмотрено приложение этого результата на примере модифицированной модели Лотки-Вольтерры, в которой часть популяции жертвы недосягаема для хищника.

Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/2301).

Литература

1. *Адрианова Л. Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: изд. Санкт-Петербургского университета, 1992. 240 с.

2. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* О сохранении устойчивости при дискретизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журнал. 2010. Т. 51, № 3. С. 481–497.

3. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

5. *Демидович В. Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.

6. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. СПб.: СПбГУ, 2001. 354 с.

7. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с.

8. *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: изд. Нижегородского университета, 2007. 324 с.

9. *Ласунский А. В.* Состояния равновесия неавтономной модели Лотки-Вольтерры при наличии убежища для жертвы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 445–448.

10. *Ласунский А. В.* О положениях равновесия некоторых неавтономных разностных уравнений // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 3. С. 120–126.

11. *Персидский К. П.* О характеристических числах дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1947. № 1. С. 5–47.

12. *Ромм Я. Е.* Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 12. С. 105–118.

13. *Скалкина М. А.* О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным // ДАН СССР. 1955. Т. 104, № 4. С. 505–508.

14. *Скалкина М. А.* О связи между устойчивостью решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений // ПММ. 1955. Т. 19, № 3. С. 287–294.

15. *Фишман Л. З.* К сохранению устойчивости дифференциальных уравнений при их дискретизации // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 4. С. 568–569.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ласунский Александр Васильевич
доцент кафедры высшей математики, д. ф.-м. н.
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41,
Великий Новгород, Россия, 173003
эл. почта: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
тел.: (8162) 629968

Lasunsky, Alexander
Novgorod State University
41 B. Sankt-Petersburgskaya St., 173003
Veliky Novgorod, Russia
e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru
tel.: (8162) 629968