Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 100–105

УДК 519:65

О СГЛАЖИВАНИИ ФУНКЦИЙ

С. Е. Михеев

Санкт-Петербургский государственный университет

Если функция f имеет кусочно-непрерывную производную порядка n, ограниченную на участках непрерывности, то она может быть сглажена до функции, имеющей производную порядка не ниже, чем n. Сглаживание может быть выполнено сложением с алгебраическим сплайном степени $n+1$ дефекта 1, который определяется в сколь угодно малой односторонней окрестности точки разрыва производной $f^{(n)}$. Возможно также сохранить значения производных более низких порядков в бывшей точке разрыва n-й производной и увеличить ограничение на нее во всей области задания не более чем на заранее заданную сколь угодно малую величину. Если f имеет также непрерывные производные до порядка $n+k$ в области C – там, где непрерывна $f^{(n)}$, то сглаживание алгебраическим сплайном S степени $n+k+1$ помимо предыдущих свойств дополнительно может обеспечить непрерывность производных суммы $(f+S)^{(n+i)}$, $i=1,...,k$, в области C.

Ключевые слова: сплайн, сглаживание, сходимость.

S. E. Mikheev. A SMOOTHING OF FUNCTIONS

If a function f has a sectionally continuous derivative of order n bounded in sections of continuity, then it can be smoothed up to the function having the continuous derivative of the order no less than n. The smoothing can be done by summing with the algebraic spline of degree $n+1$ with defect 1, which is determined in an arbitrarily small one-sided neighborhood of the node, where there is the gap of the n-th derivative of f. In addition, it is possible to save values of lower order derivatives in the node and disrupt the original upper estimation of the n-th derivative module in the whole domain of its definition only up to an arbitrarily small value. If f additionally has continuous derivatives $f^{(n+1)},...,f^{(n+k)}$ in the domain C of continuity of $f^{(n)}$, then the smoothing with the algebraic spline S of degree $n+k+1$, in addition to above mentioned properties can ensure continuity of the sum of derivatives $(f+S)^{(n+i)}$, $i=1,...,k,$, in the domain C.

Key words: spline, smoothing, convergence.

Введение

Потребность в сглаживании функций может возникать в задачах как технического, прикладного происхождения, так и теоретического.

Весьма характерна проблема сглаживания при преобразовании цифрового звука цифроаналоговыми преобразователями (ЦАП) в аналоговый. Поток цифр, поступающий на вход ЦАП, представляет собой *отсечки* звукового давления, т. е. численные значения звукового давления (в некоторой шкале) через равные интервалы времени Δ. ЦАП, согласно поступающим числам, вначале выставляет напряжение на соответствующих временны́х интервалах, которое, таким образом, имеет ступенчатый вид. Затем с помощью фильтров ЦАП аппаратно сглаживает ступенчатое напряжение. Стоимость этих фильтров зависит от их качества и составляет существенную долю полной стоимости ЦАП. В свою очередь, качество фильтров зависит от того, какую функцию они должны реализовать. В поиске таких функций первое, на что следует дать ответ, – вопрос о существовании функции, обеспечивающей нужный результат; второе – как такую функцию построить.

К проблеме сглаживания функций есть интерес и со стороны численного анализа. Так, при исследовании сходимости итеративных численных методов часто бывает эффективным разбор «наихудшего варианта». Например, рассмотрение разнообразных мажорант в теоремах о методе Ньютона [1]. Или в исследовании зацикливания в методе Ньютона [2, 8] и сходимости метода Ньютона [3–5]. Заметное неудобство в таких разборах может представлять отсутствие этого «наихудшего варианта» в классе рассматриваемых функций. Например, нет элемента среди скалярных монотонных функций, имеющих в корне производную g_0' с ограниченной константой L второй производной (класс $K(L, g_0')$), который в методе Ньютона реализует цикл на двух точках с минимальным расстоянием между ними. С другой стороны, для монотонных функций с пониженным требованием к гладкости: всего лишь с липшицевостью первой производной (класс $C^{1,L}(g_0')$), такой минимайзер находится без труда в виде сплайна типа $s_{2,1}$ с разрывом второй производной в центре цикла.

В связи с этим возникает интерес в инструменте, который помогал бы в перенесении результатов о сходимости в одном подобном классе на другой без внедрения в тело доказательств, но просто предельным переходом.

Сглаживание

Произвольную функцию f, имеющую кусочно-непрерывную производную порядка n и непрерывные производные более низких порядков, можно трактовать как некоторый в общем случае не алгебраический сплайн f типа $\sigma_{n,1}$ (гладкость звеньев n, дефект на стыках звеньев 1). Пусть построение такого сплайна происходило согласно информации, которая содержала, в частности, значения его и его производных $f^{(i)}$, $i = 0, ..., n-1$ в стыковочном узле $\bar{x}$ и его n-я производная внутри примыкающих к $\bar{x}$ звеньев оказалась ограниченной по модулю величиной L. Тогда сложением с некоторым алгебраическим сплайном S типа $s_{n+1,1}$ его можно «сгладить» в узле $\bar{x}$, т. е. получить там у суммы F порядок гладкости n, при этом, что существенно для сплайна, значения низших производных на стыке звеньев останутся неизменными: $F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x})$, $i = 0, ..., n-1$ и лишь может ухудшиться сколь угодно мало ограничение на n-ю производную в области задания сплайна S, которую можно расположить в сколь угодно малой односторонней окрестности $\bar{x}$.

Теорема 1. *Любой общего вида сплайн f типа $\sigma_{n,1}$ с ограниченной между узлами стыковки звеньев производной n-го порядка $|f^{(n)}(x)| < L$ и конечностью пары ее левосторонних производных чисел в узле стыковки $\bar{x}$ сглаживается для всякого $\varepsilon > 0$ до сплайна типа $\sigma_{n+1,1}$ на любой паре соседних с $\bar{x}$ звеньев с помощью сложения на $\bar{\Delta}$ с алгебраическим сплайном S типа $s_{n+1,1}$, где $\bar{\Delta}$ – область задания сплайна S. При этом:*

1) $\bar{\Delta}$ является левосторонней окрестностью узла стыковки соседних звеньев $\bar{x}$ и ее можно назначить сколь угодно малой;

2) можно сохранить в узле $\bar{x}$ суммарному сплайну $F = S + f$ значения производных более низких порядков:

$$F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, 1, ..., n-1;$$

3) можно обеспечить сплайну F ограниченность производной n-го порядка вида $|F^{(n)}(x)| \leqslant L + \varepsilon \quad \forall x \in \bar{\Delta}$, где ε сколь угодно малое положительное число;

4) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| < L$, в сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева к $\bar{x}$, можно сгладить f до F так, что

$$|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \lambda;$$

5) когда $|f^{(n)}(\bar{x} - 0)| = L$, в $\bar{\Delta}$ – сколь угодно малой левосторонней окрестности $\bar{x}$ – сглаживание f до F без нарушения условия $|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \bar{\Delta}$ невозможно.

Если имеется конечность правых производных чисел в $\bar{x}$ у $f^{(n)}$, то вышеприведенное утверждение будет верным после замены слов «левосторонняя окрестность» на «правосторонняя окрестность» в пунктах 1 и 5 и замены в пункте 4 «$-$» на «$+$ » и «слева» на «справа».

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все построения будут проводиться на сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева к $\bar{x}$. На правостороннем сегменте имеют место зеркально-симметричные построения. Очевидно, достаточно будет исследовать всего лишь случай $\bar{x} = 0$.

Положим, не умаляя общности

$$f^{(n)}(+0)-f^{(n)}(-0)=:D>0.$$

Построим семейство звеньев $s_0,...,s_n$, являющихся функциями, тождественно равными нулю вне интервалов соответственно $\bar\Delta_0,\bar\Delta_1,...,\bar\Delta_n$, левые границы которых обозначим соответственно через $\delta_0,...,\delta_n$. Потребуем совпадение правой границы $\bar\Delta_i$ с δ_{i-1} при $i=\overline{1,n}$. Положим $\bar\Delta_0=(-\delta,0]$, следовательно, длина интервала $\bar\Delta_0$ равна δ и $\delta_0=-\delta$. В дальнейшем построении длины прочих интервалов будут соответственно $2\Delta_1$, ..., $2\Delta_n$. Следовательно,

$$\delta_i=-(\delta+2\sum_1^i\Delta_j).$$

Каждый интервал $\bar\Delta_i$, $i=1,...,n$ будет иметь разбиение на два интервала, такое, что $\bar\Delta_i=\bar\Delta_i^-\cup\bar\Delta_i^+$, правая граница $\bar\Delta_i^-$ совпадает с левой границей $\bar\Delta_i^+$ и длины $\bar\Delta_i^-$, $\bar\Delta_i^+$ равны друг другу и равны Δ_i. Длины δ, $\Delta_1,...,\Delta_n$ будем назначать так, чтобы δ_n не вышла из λ. Уточним выбор этих длин позднее.

Положим на всем λ: $s_0\equiv...\equiv s_n\equiv 0$, и лишь в одной точке для удобства обозначений зададим производные фиктивного звена: $s_{n+1}^{(j)}(\delta_n)=0,\quad j=\overline{0,n}.$

Схема дальнейших построений

Будем переопределять звенья в порядке возрастания индекса как решения задач Коши

$$\begin{aligned}s_i^{(n+1)}(x)=A_ia_i(x),\quad x\in\bar\Delta_i,\\ s_i^{(k)}(\delta_i)=s_{i+1}^{(k)}(\delta_i),\quad k=\overline{0,n},\quad i=\overline{0,n}.\end{aligned}\tag{1}$$

Определение. Под сводным сплайном $S_i=s_i\uplus...\uplus s_0$ будем понимать сплайн, определяемый на каждом $\bar\Delta_j$, $j=i,...,0$, как решение задач Коши (1), начиная с получения звена s_i при $s_i^{(j)}(\delta_i)=0$, $j=0,...,n$.

После переопределения звена s_i все звенья с индексами $0,...,i$ будем помечать в нижнем индексе индексом i в круглых скобках. Функцию a_i, принимающую только два значения: ±1, и числовой параметр A_i будем назначать так, чтобы

1) $F_i:=S_i+f$, где $S_i:=s_{i(i)}\uplus...\uplus s_{0(i)}$, имела бы в 0 непрерывность производных порядков $n,...,n-i$, что эквивалентно выполнению $S_i^{(n-k)}(0)=0$, $k=\overline{0,i}$; отметим, что если выбор a_{i-1} обеспечил обнуление в нуле производным порядков $n,...,n-i+1$ сплайна S_{i-1}, то для обладания этим свойством сплайном S_i при выборе a_i необходимо и достаточно обеспечить $s_{i(i)}^{(n-k)}(\delta_{i-1})=0$, $k=\overline{0,i-1}$;

2) производная n-го порядка сплайна S_i по абсолютной величине не более ε на всем $[\delta_i,0]$.

Начинаем работу по схеме с $i=0$. Обозначим левое нижнее производное число производной $f^{(n)}$ в 0 через d_-. Согласно его определению должно выполняться для некоторого $T\in\lambda$

$$f^{(n)}(t)\leqslant f^{(n)}(-0)+d_-t+o(t)\qquad\forall t\in[T,0],$$

где $o(\cdot)$ – бесконечно малая функция своего аргумента. Выберем $\delta_0\in[T,0)$ таким, чтобы $o(t)<d_-t$ $\forall t\in(\tau,0)$. Тогда

$$f^{(n)}(t)\leqslant f^{(n)}(-0)+2d_-t\qquad\forall t\in(\delta_0,0).\tag{2}$$

Положим $a_0(x)\equiv1$ $\forall x\in(\delta_0,0]\subset\lambda$. Параметр A_0 и левую границу δ_0 интервала звена $s_{0,0}$ выберем так, чтобы производная порядка n функции $F_0\equiv f+s_{0(0)}$ была бы не больше L на $(\delta_0,0]$ и $s_{0(0)}^{(n)}(0)=D$. Обозначим для удобства $-\delta_0$ через δ. Второе требование к A_0 и δ_0 при указанном выборе a_0 выполняется тогда и только тогда, когда $A_0=D/\delta$ (см. (1), $k=n$, $i=0$).

Обеспечим выбором δ первое. С помощью (2) имеем

$$(\forall x\in[\delta_0,0))\ F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+s_{0(0)}^{(n)}(x)\leqslant$$

$$\leqslant f^{(n)}(-0)+2d_-x+A_0(x-\delta_0).$$

Таким образом, свойство

$$(\forall x\in[\delta_0,0))\ F^{(n)}(x)\leqslant L$$

обеспечивается выполнением для всех x из $[\delta_0,0)$ неравенства

$$f^{(n)}(-0)+2d_-x+A_0x+D\leqslant L\iff$$

$$\iff(2d_-+D/\delta)x\leqslant L-f^{(n)}(+0).$$

Правая часть последнего неравенства не отрицательна по построению. Следовательно, при $x=0$ оно выполняется. При $x=\delta_0$ оно эквивалентно неравенству

$$2d_-\delta\leqslant L+f^{(n)}(-0).$$

Поэтому если длина интервала задания звена $s_{0(0)}$ удовлетворяет условию

$$0<\delta\leqslant\min\left(-T,\frac{L+f^{(n)}(-0)}{2d_-}\right)$$

и $A_0=D/\delta$, то и $\left|F_0^{(n)}(x)\right|\leqslant L$ $\forall x\in(\delta_0,0)$ и непрерывность $F_0^{(n)}$ в 0 имеется. Однако $s_{0(0)}^{(i)}$

имеет разрывы в 0, для всех $i=\overline{0,n-1}$, которые перейдут в F_0, так как $f^{(i)}$ непрерывны в 0. Пусть

$$D_1 := F_0^{(n-1)}(+0) - F_0^{(n-1)}(-0) =$$

$$= -s_{0(0)}^{(n-1)}(-0) = -A_0\delta^2/2 = -D\delta/2 \neq 0,$$

$$D_{1,i} := -S_0^{(n-i)}(-0) = -A_0\delta^{i+1}/(i+1)! =$$

$$= -D\delta^i/(i+1)!, \qquad i=\overline{2,n}.$$

Для ликвидации разрыва в 0 у

$$F_0^{(n-1)} \equiv S_0^{(n-1)} + f^{(n-1)}$$

переопределим, с сохранением значений в 0 производных более высоких порядков $S_1^{(n)}(0) = S_0^{(n)}(0) = D$, звено s_1 на $\bar\Delta_1$ заданием функции a_1 на $\bar\Delta_1$ и заданием параметра A_1. Отметим, что для такого сохранения необходимо и достаточно должно быть

$$s_{1(1)}^{(n)}(\delta_0) = s_{0(1)}^{(n)}(\delta_0) = S_1^{(n)}(\delta_0) = 0.$$

Потом для ликвидации разрыва в 0 у

$$F_1^{(n-2)} \equiv S_1^{(n-2)} + f^{(n-2)}$$

переопределим, с сохранением значений в 0 производных более высоких порядков $S_2^{(n)}(0) = D$ и $S_2^{(n-1)}(0) = -D_1$, звено s_2 на $\bar\Delta_2$ заданием функции a_2 на $\bar\Delta_2$ и заданием параметра A_2. Отметим, что для такого сохранения необходимо и достаточно сохранения начальных данных для n-й и $(n-1)$-й производных звена $s_{0(2)}$, доставляемых звеном $s_{1(2)}$. Что в свою очередь обеспечивается тогда и только тогда, когда $s_{2(2)}^{(n)}(\delta_1) = s_{1(2)}^{(n)}(\delta_1) = 0$ и $s_{2(2)}^{(n-1)}(\delta_1) = s_{1(2)}^{(n-1)}(\delta_1) = 0$.

И т. д. вплоть до переопределения звена s_n.

Пусть таким путем уже найдены A_{i-1} и a_{i-1}, $i \in \{1,...,n-1\}$. На очереди – переопределение звена s_i. С целью обеспечить

$$s_{i(i)}^{(n-k)}(\delta_{i-1}) = 0,\ k=0,...,i-1, \tag{3}$$

зададим a_i через a_{i-1} так:

$$a_i(x) := \begin{cases} -a_{i-1}(\alpha_i^- x + \beta_i^-), & x \in \bar\Delta_i^-, \\ \ \ a_{i-1}(\alpha_i^+ x + \beta_i^+), & x \in \bar\Delta_i^+. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь, когда x пробегает $\bar\Delta_i^+$, в том же направлении величина $\alpha_i^+ x + \beta_i^+$ пробегает $\bar\Delta_{i-1}$. Когда x пробегает $\bar\Delta_i^-$, в обратном направлении $\alpha_i^+ x - \beta_i^+$ пробегает $\bar\Delta_{i-1}$.

$$\alpha_i^+ = 2\Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

$$\beta_i^+ = \delta_{i-2} - \alpha_i^+\delta_{i-1} = \delta_{i-2} - 2\delta_{i-1}\Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

$$\alpha_i^- = -2\Delta_{i-1}/\Delta_i,$$

$$\beta_i^- = \delta_{i-1} - \alpha_i^-(\delta_{i-1} - \Delta_i) = \delta_{i-2} + 2\delta_{i-1}\Delta_{i-1}/\Delta_i.$$

Задание (4) обеспечивает нечетность a_i, $i=1,...,n$, относительно середины $\bar\Delta_i$. Это дает $s_{i,i}^{(n)}(\delta_{i-1}) = 0$.

Если $i>1$, то каждое сужение a_i на половинки $\bar\Delta_i^-$, $\bar\Delta_i^+$ нечетно относительно их середин, ибо таким свойством обладало уже a_{i-1}. Поэтому независимо от параметра A_i оказывается $s_{i(i)}^{(n-1)}(\delta_{i-1} - \Delta_i) = 0$, что влечет $s_{i(i)}^{(n-1)}(\delta_{i-1}) = 0$.

Если $i>2$, то каждое сужение a_i на половинки половинок $\bar\Delta_i^-$, $\bar\Delta_i^+$ нечетно относительно их середин, ибо таким свойством обладало уже a_{i-2}. Отсюда $s_{i(i)}^{(n-2)}(\delta_{i-1}) = 0$. И т. д.

В итоге получаем (3). Приступим к определению параметров A_i и оценке длин Δ_i.

Производные звена $s_{i(i)}$ в δ_{i-1} находим решением задачи Коши (1) совместно с (4)

$$s_{i(i)}^{(n-k)}(\delta_{i-1}) =$$

$$= \int_{\delta_i}^{\delta_{i-1}} \int_{\delta_i}^{t_1} ... \int_{\delta_i}^{t_k} A_i a_i(t_{k+1})\, dt_{k+1}...dt_1 =$$

$$= A_i \bar a_{i,n-k}\Delta_i^{k+1}. \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что величины $\bar a_{i,n-k}$, $k=0,...,n$, могут быть вычислены независимо от всех прочих данных задачи, и также, что $\bar a_{i,n-i} \neq 0$.

Согласно (3) $\bar a_{i,n-k} = 0$, $k=0,...,i-1$. Значения прочих $\bar a_{i,n-k}$, $k>i$, не существенны для дальнейшего.

Приступим к определению параметров A_i, Δ_i. Для осуществления утверждения 3 теоремы необходимо и достаточно выполнения $|A_i|\Delta_i \leqslant \varepsilon$. Будем при выборе параметров, за редким исключением, реализовывать равенство

$$|A_i|\Delta_i = \varepsilon \tag{6}$$

и введем для удобства обозначение $\rho = \delta/\varepsilon$.

Определим параметры A_i, Δ_i, $i=1,...,n$, рекуррентно из системы (см. (5))

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1\bar a_{1,n-1}\Delta_1^2 + A_0\bar a_{0,n-1}\delta_0^2 = 0 \\ A_2\bar a_{2,n-2}\Delta_2^3 + A_1\bar a_{1,n-2}\Delta_1^3 + A_0\bar a_{0,n-2}\delta_0^3 = 0 \\ ... \\ A_n\bar a_{n,0}\Delta_n^{n+1} + ... + A_1\bar a_{1,0}\Delta_1^n + A_0\bar a_{0,0}\delta_0^n = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

Второе слагаемое первого уравнения системы (7) есть $D_1 \neq 0$. Поэтому можно использовать (6) для подстановки в первое слагаемое:

$$\Delta_1 = |A_0\bar a_{0,n-1}/\bar a_{1,n-1}|\rho\delta \implies \Delta_1 \sim \delta.$$

Вместо кропотливого исследования возможности обнуления сумм слагаемых, начиная со второго, в i-м уравнении $(i > 1)$ отметим, что такое обнуление позволило бы положить $A_i = 0$ и придать δ_i произвольное значение, например δ. За редким исключением таких обнулений можно подставлять (6) в первые слагаемые.

Тогда при $i = 2$, уже имея эквивалентность $\Delta_1 \sim \delta$, получаем

$$\Delta_2^2 = \frac{\left|A_1\Delta_1^3\bar{a}_{1,n-2} + A_0\delta^3\bar{a}_{0,n-2}\right|}{|\varepsilon\bar{a}_{2,n-2}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\Delta_1^2\bar{a}_{1,n-2}\right| + \left|A_0\rho\delta^2\bar{a}_{0,n-2}\right|}{|\bar{a}_{2,n-2}|} \Longrightarrow \Delta_2^2 \lesssim \delta^2, \quad (8)$$

где за знаком $\lesssim$ стоит утверждение: «величина слева от знака либо эквивалентна величине справа от знака, либо бесконечно мала относительно нее». Исследование первой дроби в (8) приводит к невозможности второго варианта. Отсюда следует, что Δ_2 эквивалентна δ: $\Delta_2 \sim \delta$.

Пройдя по уравнениям системы (7) до конца, выясним, что $\Delta_i \sim \delta$, $i = 1, ..., n$, и, следовательно, сумма длин всех звеньев, т. е. $|\delta_n|$, эквивалентна δ.

Отметим, что оценка отношения δ_n/δ зависит только от $\rho A_0 = D/\varepsilon$.

В случае $D < 0$ справедливы аналогичные рассуждения относительно звена s_1 с несущественными отличиями: $A_0 < 0$, $D_1 > 0$ и с особенностью $f^{(n)}(-0) = L$.

В случае $L - |f^{(n)}(-0)| =: \ell > 0$ получаем дополнительное утверждение. В силу непрерывности $f^{(n)}$ в некоторой малой левой окрестности $\bar{\Delta}$ нуля будет

$$f^{(n)}(-0) < 0 \implies (\forall x \in \bar{\Delta})\, f^{(n)}(x) \geqslant -L + \ell/2.$$

Полагая $\varepsilon = \ell/4$, как и в общем случае, можно сгладить сплайн f до F так, что станет $F^{(n)}(x) \geqslant -L + \varepsilon > -L$. Что и завершает доказательство.

Частные случаи

Когда f является обычным алгебраическим сплайном типа $s_{n,1}$, все ее производные числа конечны, и для ее сглаживания вышеприведенная теорема 1 несколько упрощается.

Теорема 2. *Любой алгебраический сплайн f степени n дефекта 1 с ограниченной между узлами стыковки звеньев производной: $|f^{(n)}(x)| < L$ сглаживается для всякого $\varepsilon > 0$ до сплайна типа $s_{n+1,1}$ на любой паре соседних звеньев с помощью сложения на $\bar{\Delta}$ со сплайном S степени $n+1$ дефекта 1, где $\bar{\Delta}$ – область задания сплайна S. При этом:*

1) можно разместить $\bar{\Delta}$ по желанию в сколь угодно малой лево- или правосторонней окрестности узла стыковки соседних звеньев $\bar{x}$ (точке разрыва n-й производной);

2) можно сохранить в узле $\bar{x}$ суммарному сплайну $F = S + f$ значения производных более низких порядков:

$$F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, 1, ..., n-1;$$

3) можно обеспечить сплайну F ограниченность производной вида $|F^{(n)}(x)| \leqslant L + \varepsilon$ $\forall x \in \Delta$, где ε сколь угодно малое положительное число;

4) когда $|f^{(n)}(\bar{x} - 0)| < L$, в сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева к $\bar{x}$, можно сгладить f до F так, что $|F^{(n)}(x)| < L$ $\forall x \in \lambda$; также можно сгладить и в правосторонней окрестности, если $|f^{(n)}(\bar{x} + 0)| < L$;

5) когда $|f^{(n)}(\bar{x} - 0)| = L$, в $\bar{\Delta}$ – сколь угодно малой левосторонней окрестности $\bar{x}$ – сглаживание f до F без нарушения условия $|F^{(n)}(x)| < L$ $\forall x \in \bar{\Delta}$ невозможно; аналогично с правосторонней окрестностью.

Когда дефект исходного сплайна f более 1: $f \in \sigma_{n+k,k+1}$, при сглаживании разрывов его n-й производной согласно теореме 1 с помощью сплайна типа $s_{n+1,1}$ появятся разрывы производных порядков $n+1, ..., n+k$ внутри интервалов звеньев исходного сплайна. Если такое явление нежелательно, то его можно избежать, используя для сглаживания сплайны типа $s_{n+k+1,1}$.

В качестве шаблона для построения такого сплайна используем идею построения функций $a_0, ..., a_n$ в (4). Положим (временно)

$$\bar{\Delta}_0 = ... = \bar{\Delta}_k = \bar{\delta} = [-1, 1],$$
$$a_0(x) = 1 \ \forall x \in \bar{\delta}$$

$$a_i(x) := \begin{cases} -a_{i-1}(1-2x), & x \in [-1, 0), \\ a_{i-1}(2x-1), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} s^{(n+k+1)} = a_i(t), \\ s^{(n+k-j)}(-1) = 0, \quad j = 0, ..., n+k, \end{cases}$$

обладает, как уже говорилось в доказательстве теоремы 1, свойствами:

$$s^{(n+k+1-j)}(1) = 0, \ j = \overline{1, i}, \ s^{(n+k-i)}(1) \neq 0.$$

Полагая $i = k$, видим, что на роль прежнего a_0 можно назначить новое a_k после линейного преобразования переменных $G : \bar{\delta} \to [\delta_0, 0]$. Т. е. $a_0(x) := a_k(G(t))$. Дальнейшие построения совпадают с таковыми в доказательстве теоремы 1. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Любой общего вида сплайн f типа $\sigma_{n+k,k+1}$ с ограниченной между узлами стыковки звеньев производной n-го порядка $|f^{(n)}(x)| < L$ и конечностью пары ее левосторонних производных чисел в узле стыковки $\bar{x}$ сглаживается для всякого $\varepsilon > 0$ до сплайна типа $\sigma_{n+k+1,1}$ на паре соседних примыкающих к $\bar{x}$ звеньев с помощью сложения на $\bar{\Delta}$ с алгебраическим сплайном S типа $s_{n+k+1,1}$, где $\bar{\Delta}$ – область задания сплайна S. При этом:*

1) $\bar{\Delta}$ является левосторонней окрестностью узла стыковки соседних звеньев $\bar{x}$ и ее можно назначить сколь угодно малой;

2) можно сохранить в узле $\bar{x}$ суммарному сплайну $F = S + f$ значения производных более низких порядков:

$$F^{(i)}(\bar{x}) = f^{(i)}(\bar{x}), \quad i = 0, 1, ..., n-1;$$

3) можно обеспечить сплайну F ограниченность производной n-го порядка вида $|F^{(n)}(x)| \leqslant L + \varepsilon \quad \forall x \in \bar{\Delta}$, где ε сколь угодно малое положительное число;

4) когда $|f^{(n)}(\bar{x}-0)| < L$, в сегменте λ звена сплайна f, примыкающего слева к $\bar{x}$, можно сгладить f до F так, что

$$|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \lambda;$$

5) когда $|f^{(n)}(\bar{x} - 0)| = L$, в $\bar{\Delta}$ – сколь угодно малой левосторонней окрестности $\bar{x}$ – сглаживание f до F без нарушения условия $|F^{(n)}(x)| < L \quad \forall x \in \bar{\Delta}$ невозможно.

Если имеется конечность правых производных чисел в $\bar{x}$ у $f^{(n)}$, то вышеприведенное утверждение будет верным после замены слов «левосторонняя окрестность» на «правосторонняя окрестность» в пунктах 1 и 5 и замены в пункте 4 «$-$» на «$+$» и «слева» на «справа».

Заключение

Сглаживание сплайнов в скалярном случае позволяет заметно упростить доказательства некоторых теорем о сходимости итеративных методов и даже несколько усилить результат. Так, удалось ослабить требования к функции и начальному приближению для сходимости основного метода Ньютона до уровня таких требований для модифицированного метода Ньютона в одной локальной теореме о сходимости, Мысовских [7]. В свою очередь, метод точных релаксаций [6], использующий теорему Мысовских, существенно повышает свою эффективность с ослаблением упомянутого требования.

Литература

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

2. *Михеев С. Е.* Нелинейные методы в оптимизации. СПб., 2001. 276 с.

3. *Михеев С. Е.* Глобализация некоторых итеративных методов решения скалярных уравнений // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2008. Вып. 1. С. 43–52.

4. *Михеев С. Е.* Об одном парадоксе в теоремах о методе Ньютона // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 22–36.

5. *Михеев С. Е., Михеев В. С.* Точная релаксация с учетом невязки // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, № 2. С. 74–78.

6. *Михеев С. Е.* Метод точных релаксаций // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 71–85.

7. *Мысовских И. П.* О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применениях // Докл. АН СССР. 1950. Т. LXX, № 4. С. 565–568.

8. *Mikheev S. E.* Cycling in Newton's Method. www.hrpub.org/journals/jour_archive.php?id=24, HRPUB, DOI: 10.13189/ujcmj.2013.010302, Vol. 1, No 3, Oct 2013. P. 73–77.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Михеев Сергей Евгеньевич
профессор, д. ф.-м. н.
Санкт-Петербургский госуниверситет
факультет прикладной математики – процессов управления
Университетский пр., 35, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия, 198504
эл. почта: him2@mail.ru
тел.: +79602405627

Mikheev, Sergey
Saint-Petersburg State University
Faculty of Applied Mathematics & Control Theory
35 Universitetskiy St., 198504 Saint-Petersburg, Russia
e-mail: him2@mail.ru
tel.: +79602405627