Труды Карельского научного центра РАН
№ 4. 2014. С. 121–129

УДК 519.175.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА КРАТНЫХ РЕБЕР ОДНОЙ ВЕРШИНЫ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Рассматривается случайный граф, содержащий N вершин, в котором независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, равные степеням вершин графа, имеют биномиальное распределение с параметрами (N, p), где параметр $p = p(N)$ выбран так, что $Np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, при $N \to \infty$. Получены предельные распределения числа кратных ребер одной вершины случайного графа.

Ключевые слова: случайный граф, конфигурационная модель, петля, кратное ребро, предельное распределение.

I. A. Cheplyukova. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE NUMBER OF MULTIPLE EDGES OF A VERTEX OF A CONFIGURATION GRAPH

We consider a random graph with N vertices in which the random variables $\xi_1, \ldots, \xi_N$, equal to the vertex degrees are independent and have a binomial distribution with parameters (N, p), where $p = p(N)$ is such that $N \to \infty$, $Np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Limit distributions of the number of multiple edge are obtained for one vertex of the configuration model.

Key words: random graph, configuration model, loop, multiple edge, limit distribution.

Изучению случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций, посвящено множество работ (см., например, [5, 9, 11]). Одна из наиболее известных моделей – конфигурационная модель с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Построение этой модели состоит из двух этапов. На первом этапе для каждой из N вершин графа определяется ее степень в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Для удобства изложения процесса построения такой модели часто используется понятие полуребра, введенное в [11]. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер, число которых равно степени данной вершины. Предполагается, что все вершины и полуребра различны. На втором этапе построения происходит последовательное образование ребер: на каждом шаге два полуребра выбираются равновероятно и, соединившись, образуют ребро; если сумма всех полуребер является нечетным числом, то вводится вспомогательная (фиктивная) вершина, степень которой равна 1, и последнее свободное полуребро образует ребро с этой дополнительной вершиной. При изучении структуры таких графов оказалось эффективным использование методов теории ветвящихся процессов ([4, 6, 7, 10] и др.). Однако при построении конфигурационной модели соединение полуребер происходит без ограничений, следовательно, могут появиться кратные ребра и петли, а этих объектов в реализациях ветвящихся процессов нет. Поэтому необходимо уметь оценивать вероятности появления петель и кратных ребер при исследовании конфигурационных графов. Первые такие результаты были получены в работах [2] и [3].

В [8] рассматривается предельная структура графа, содержащего N вершин, при условии, что существует предельное распределение степеней вершин с конечными двумя первыми моментами. В [8] показано, что если максимальная степень вершины вышеуказанного графа имеет порядок $o(\sqrt{N})$ при $N \to \infty$, то число петель и число кратных ребер асимптотически имеет распределение Пуассона. В этом случае конфигурационный граф имеет только конечное число петель и кратных ребер. Следовательно, как отмечалось в [1], можно предположить, что предельная структура этого графа эквивалентна структуре уже хорошо изученной классической модели случайного графа Эрдеша–Реньи. В таком случайном графе, содержащем N вершин, степень вершины подчиняется биномиальному распределению с параметрами $(N-1, p)$, где p означает вероятность соединения пары вершин в ребро. Исследованию структуры и свойствам графа Эрдеша–Реньи посвящено большое число работ. Например, в книге [8] рассматривается частный случай такого графа, где параметр распределения степеней вершин $p = p(N)$ выбран так, что при $N \to \infty$ выполнено условие $Np = \lambda, 0 < \lambda < \infty$. В этом случае при $N \to \infty$ биномиальное распределение степеней вершин может быть приближено Пуассоновским распределением с параметром λ, и по построению такой граф не имеет ни петель, ни кратных ребер. Можно предположить, что в асимптотике структура конфигурационного графа с N вершинами и биномиальным распределением степеней вершин с параметрами (N, p), где параметр $p = p(N)$ удовлетворяет вышесказанному условию, аналогична этой классической модели Эрдеша–Реньи. Например, размер ее максимальной компоненты связности может измениться только за счет появления конечного числа петель и кратных ребер.

В данной работе рассматривается частный случай конфигурационного графа с биномиальным распределением степеней вершин, параметр распределения $p = p(N)$ которого выбран так, что при $N \to \infty$ выполнено условие $Np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Как было сказано ранее, можно предположить, что в асимптотике, при $N \to \infty$, структура такого графа эквивалентна соответствующей классической модели Эрдеша–Реньи. В настоящей работе получены предельные распределения вероятностей числа кратных ребер для одной вершины в рассматриваемом случайном графе.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ означают независимые случайные величины, равные степеням вершин с номерами $1, \ldots, N$ соответственно, распределение которых имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Понятно, что для изучения случайного графа желательно знать предельные распределения основных характеристик этого графа, например, максимальную степень и сумму степеней графа. Легко показать, что для максимальной степени $\xi_{(N)} = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $N \to \infty$, тогда для x таких, что $0 < C_1 \leqslant Ne^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \leqslant C_2 < \infty$, справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} < x\} = \exp\left\{-Ne^{-\lambda} \frac{\lambda^{\lceil x \rceil}}{\lceil x \rceil !}\right\},$$

где $\lceil x \rceil$ означает наименьшее целое число, большее или равное x.

Замечание 1. Из условий леммы 1 нетрудно получить, что при $N \to \infty$ максимальная степень вершины с вероятностью, стремящейся к единице, эквивалентна

$$\frac{\ln N}{\ln \ln N}.$$

Учитывая последнее замечание, для изучения предельного поведения числа петель и числа кратных ребер нашего графа достаточно рассмотреть только те вершины, степени d которых не превосходят максимальную, однако при доказательствах всех нижеприведенных теорем мы расширим это условие и будем рассматривать графы, степени вершин которых удовлетворяют условию $d = o(N^a), a < 1/2$.

Выберем две произвольные вершины нашего графа, например вершины с номерами N и $N-1$. Пусть случайная величина γ_N равна числу петель вершины с номером N, а случайная величина $\lambda_{N,N-1}$ равна числу ребер вида

$(N, N-1)$. Введем следующие обозначения:

$$p(d_N; m) = \mathbf{P}\{\gamma_N = m | \xi_N = d_N\};$$
$$p(d_N, d_{N-1}; m) =$$
$$= \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}\},$$
$$m = 0, 1, 2, \dots;$$
$$\alpha_m = \begin{cases} \mathbf{E}[\xi]^m, \text{если } m = 1, 2, \dots; \\ 1, \text{если } m = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{E}[\xi]^m$ означает факториальный момент, т. е.

$$\mathbf{E}[\xi]^m = \mathbf{E}\xi(\xi-1)\cdots(\xi-m+1).$$

Теорема 1. *Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы следующие утверждения.*

1. При фиксированных d_N

$$p(d_N; m) = \frac{d_N!(1+o(1))}{(d_N-2m)!m!(2\lambda N)^m}.$$

2. При $d_N \to \infty$

$$p(d_N; m) =$$
$$= \left(\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right)^m \frac{1}{m!} \exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\}(1+o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$*

$$\mathbf{P}\{\gamma_N = m\} = \frac{1+o(1)}{m!(2\lambda N)^m}\alpha_m,$$

где α_m определено в (2).

Следствие 1. *Пусть $N \to \infty$, тогда*

$$\mathbf{P}\{\gamma_N = 0\} = 1 + o(1).$$

Теорема 3. *Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$*

$$p(d_N, d_{N-1}; m) =$$
$$= \frac{d_N! d_{N-1}!(1+o(1))}{m!(d_N-m)!(d_{N-1}-m)!(\lambda N)^m} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{d_N^2}{\lambda N} - \frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right\}.$$

Следствие 2. *Пусть $N \to \infty$, тогда*

$$p(d_N, d_{N-1}; 0) = 1 + o(1).$$

Следствие 3. *Пусть $N, d_N, d_{N-1} \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$*

$$p(d_N, d_{N-1}; m) =$$
$$= \frac{1+o(1)}{m!}\left(\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right)^m \exp\left\{-\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right\}.$$

Теорема 4. *Пусть $N \to \infty$, тогда для $m = 0, 1, 2, \dots$*

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m\} = \frac{1+o(1)}{m!(\lambda N)^m}\alpha_m^2.$$

Обозначим через K событие, состоящее в том, что вершина с номером N не имеет ребер кратности больше единицы. Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть $N \to \infty$, тогда*

$$\mathbf{P}\{K\} = 1 + o(1).$$

Для доказательства этих утверждений нам потребуется предельное распределение суммы степеней всех вершин случайного графа. Обозначим через η_N сумму всех степеней вершин, т. е. $\eta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ при отсутствии фиктивной вершины, в противном случае $\eta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N + 1$. В работе [1] доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $N \to \infty$, тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k - N^2p)/\sqrt{N\lambda(1-p)}$ в любом конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = k\} =$$
$$= \frac{(1+o(1))}{\sqrt{2\pi\lambda N(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(k-N^2p)^2}{\lambda N(1-p)}\right\}.$$

Доказательства теорем 1, 2 и следствия 1 приведены в статье [1].

Докажем теорему 3. Обозначим через η_{N-2} сумму степеней вершин графа без учета $(N-1)$-й и N-й вершин, т. е. $\eta_N = \eta_{N-2} + \xi_{N-1} + \xi_N$. Согласно формуле полной вероятности имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1}\}=\\
&=\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N=0\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N=0|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1}\}+\\
&+\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N=1\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N=1|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1}\}+\cdots+\\
&+\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N=A\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N=A|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1}\}+\\
&+\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N>A,\gamma_N=o(N^a)\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N>A,\gamma_N=o(N^a)|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1}\}=\\
&=\sum_{k=0}^{A}\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N=k\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N=k|\xi_N=d_N\}+\\
&+\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N>A,\gamma_N=o(N^a)\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N>A,\gamma_N=o(N^a)|\xi_N=d_N\},\qquad(3)
\end{aligned}
$$

где A – некоторая положительная постоянная, выбор которой будет ясен из дальнейшего. Несложно видеть, что

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m|\xi_N=d_N,\xi_{N-1}=d_{N-1},\eta_{N-2}=l_N-d_N-d_{N-1},\gamma_N>A,\gamma=o(N^a)\}\times\\
&\times\mathbf{P}\{\gamma_N>A,\gamma=o(N^a)|\xi_N=d_N\}\leqslant\mathbf{P}\{\gamma_N>A,\gamma=o(N^a)|\xi_N=d_N\}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{k>A,k=o(N^a)}\mathbf{P}\{\gamma_N=k|\xi_N=d_N\}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{k>A,k=o(N^a)}\left(\sum_{l_N=d_N}^{[\lambda N/2]}\mathbf{P}\{\gamma_N=k|\xi_N=d_N,\eta_{N-1}=l_N-d_N\}\mathbf{P}\{\eta_{N-1}=l_N-d_N\}+\right.\\
&\left.+\sum_{l_N>[\lambda N/2],l_N=o(N^{a+1})}\mathbf{P}\{\gamma_N=k|\xi_N=d_N,\eta_{N-1}=l_N-d_N\}\mathbf{P}\{\eta_{N-1}=l_N-d_N\}\right)=\\
&=\Sigma_1+\Sigma_2.\qquad(4)
\end{aligned}
$$

Тогда, используя известное неравенство для случайной величины ρ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p (см., например [6]):

$$\mathbf{P}\{\rho\leqslant np/2\}\leqslant\exp\{-np/8\},\qquad(5)$$

находим, что

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1&\leqslant\sum_{k>A,k=o(N^a)}\sum_{l_N=d_N}^{[\lambda N/2]}\mathbf{P}\{\eta_{N-1}=l_N-d_N\}\leqslant\\
&\leqslant\sum_{k>A,k=o(N^a)}\mathbf{P}\{\eta_{N-1}\leqslant\frac{\lambda N}{2}\}\leqslant\exp\{-\lambda N/8\}N^a.\qquad(6)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим слагаемое Σ_2. Пусть $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные. В [1] было показано, что при $d = o(\sqrt{N}), l_N > C_1 N$ справедливо соотношение:

$$\mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N, \eta_{N-1} = l_N - d\} = \\ = \frac{1}{k!}\left(\frac{d_N^2}{2l_N}\right)^k \exp\left\{-\frac{d_N^2}{2l_N}\right\}(1 + o(1)).$$

Отсюда и из (4) получаем, что

$$\Sigma_2 = \sum_{k>A, k=o(N^a)} \sum_{l_N > [\lambda N/2], l_N = o(N^{a+1})} \frac{1+o(1)}{k!}\left(\frac{d_N^2}{2l_N}\right)^k \exp\left\{-\frac{d_N^2}{2l_N}\right\} \times \\ \times \mathbf{P}\{\eta_{N-1} = l_N - d_N\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k>A, k=o(N^a)} \frac{1}{k!}\left(\frac{N^{2a}}{\lambda N}\right)^k \leqslant C_1 N^{A(2a-1)}. \tag{7}$$

Из (4), (6) и (7) находим, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N > A\} \times \\ \times \mathbf{P}\{\gamma_N > A | \xi_N = d_N\} \leqslant C_2 N^{A(2a-1)}. \tag{8}$$

Из соотношений (3) и (8) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} \times \\ \times \mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N\} + O\left(\left(N^{A(2a-1)}\right)\right) = \\ = \sum_{k=0}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} \times \\ \times p(d_N; k) + O\left(\left(N^{A(2a-1)}\right)\right). \tag{9}$$

По формуле полной вероятности имеем:

$$p(d_N, d_{N-1}; m) = \sum_{\substack{l_N \geqslant d_N + d_{N-1}, \\ l_N = o(N^{a+1})}} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \times \\ \times \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\}. \tag{10}$$

Разобьем область суммирования на три части:

$$K_1 = \{l_N : d_N + d_{N-1} \leqslant l_N < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}\};$$

$$K_2 = \{l_N : l_N \in \in [\lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}, \lambda N + B\sqrt{\lambda N(1-p)}]\};$$

$$K_3 = \{l_N : l_N > \lambda N + B\sqrt{\lambda N(1-p)}\},$$

где выбор положительной постоянной B будет ясен из дальнейшего, а соответствующие суммы обозначим через $S_i, i = 1, 2, 3$.

Нетрудно видеть, что при $m \leqslant \min\{d_N, d_{N-1}\}, k \leqslant d_N/2$ справедливы равенства:
при $k \neq 0$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} = \binom{d_N}{m}\binom{d_{N-1}}{m} m! \binom{d_N - m}{2k} \times \binom{2k}{k}\binom{l_N - d_N - d_{N-1}}{d_N - m - 2k} \times (d_N - m - 2k)! \frac{(l_N - 2d_N - 1)!!}{(l_N - 1)!!} \quad (11)$$

и при $k = 0$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} = \binom{d_N}{m}\binom{d_{N-1}}{m} m! \binom{l_N - d_N - d_{N-1}}{d_N - m} \times (d_N - m)! \frac{(l_N - 2d_N - 1)!!}{(l_N - 1)!!}, \quad (12)$$

где $(2l-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2l-1)$. Легко показать, что для заданного l

$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l l!}. \quad (13)$$

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (10), дает слагаемое S_2. Используя формулу Стирлинга и асимптотику:

$$\left(1 - \frac{b}{x}\right)^{x-b} = \exp\left\{-b + \frac{b^2}{2x} + O\left(\frac{b^3}{x^2}\right)\right\},$$

где $b = o(x)$ при $x \to \infty$, из (11) – (13) получаем, что при $N \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} = \frac{d_N! d_{N-1}! l_N^{-m-2k}}{m!(d_{N-1} - m)!(d_N - m - 2k)! 2(2k-2)!} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{d_N^2}{l_N} - \frac{d_N d_{N-1}}{l_N} + \right. \quad (14)$$

$$\left. + \frac{(2d_N + d_{N-1})(m + 2k)}{l_N} + O\left(\frac{(d_N + d_{N-1})^3}{l_N^2}\right)\right\}$$

и

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} = \frac{d_N! d_{N-1}! l_N^{-m}}{m!(d_N - m)!(d_{N-1} - m)!} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{d_N^2}{l_N} - \frac{d_N d_{N-1}}{l_N} + \right. \quad (15)$$

$$\left. + \frac{(2d_N + d_{N-1})m}{l_N} + O\left(\frac{(d_N + d_{N-1})^3}{l_N^2}\right)\right\}.$$

Из соотношений (9) и (10) несложно найти, что

$$S_2 = \sum_{l_N \in K_2} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\}\Big(\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} p(d_N; 0) + \\ + \sum_{k=1}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} p(d_N; k) + \\ + O(N^{A(2a-1)})\Big).$$

Отсюда, из пункта 1 теоремы 1 и соотношений (14), (15) получаем, что при фиксированных d_N

$$S_2 = \sum_{l_N \in K_2} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \left(\frac{d_N! d_{N-1}! l_N^{-m}(1+o(1))}{m!(d_{N-1}-m)!(d_N-m)!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{A} \frac{(d_N!)^2 d_{N-1}! l_N^{-m-2k}(1+o(1))}{m!(d_{N-1}-m)!(d_N-m-2k)! 2(2k-2)!(d_N-2k)! k! (2\lambda N)^k} \right) =$$
$$= \frac{d_N! d_{N-1}!}{(\lambda N)^m (d_{N-1}-m)!(d_N-m)!} \sum_{l_N \in K_2} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\}(1+o(1)).$$

Используя пункт 2 теоремы 1, несложно показать, что последнее соотношение справедливо и в случае, когда $d_N \to \infty$. Тогда отсюда и из леммы 2 следует, что при $N \to \infty$ выбором достаточно большого B сумма S_2 может быть сделана сколь угодно близкой к выражению

$$\frac{d_N! d_{N-1}!}{(\lambda N)^m (d_{N-1}-m)!(d_N-m)!}(1+o(1)).$$

Оценим S_1. Несложно видеть, что

$$S_1 \leqslant \sum_{l_N = d_N + d_{N-1}}^{[\lambda N/2]} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \times$$
$$\times \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} +$$
$$+ \sum_{[\lambda N/2]+1 \leqslant l_N < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \times$$
$$\times \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\}.$$

Тогда из (9) получаем, что

$$S_1 \leqslant \mathbf{P}\{\nu_{N-2} \leqslant \lambda N/2\} + \sum_{[\lambda N/2] < l_N < \lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \times$$
$$\times \left(\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} \times \right.$$
$$\times \mathbf{P}\{\gamma_N = 0 | \xi_N = d_N\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} \times$$
$$\left. \times \mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N\} + O(N^{A(2a-1)}) \right).$$

Отсюда, из пункта 1 теоремы 1 и неравенства (5) находим, что при фиксированных d_N

$$S_1 \leqslant \exp\left\{-\frac{\lambda N}{8}\right\} + \sum_{[\lambda N/2]<l_N<\lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \times$$

$$\times C_3 \left(\frac{d_N! d_{N-1}! l_N^{-m}}{m!(d_N - m - 2k)!(d_{N-1} - m)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{A} \frac{(d_N!)^2 d_{N-1}! l_N^{-m-2k}}{2m!(d_N - m - 2k)!(d_{N-1} - m)!(2k-2)!k!(d_N - 2k)!(2\lambda N)^k} \right) <$$

$$< \exp\left\{-\frac{\lambda N}{8}\right\} + C_4(\lambda N)^{-m} \sum_{[\lambda N/2]<l_N<\lambda N - B\sqrt{\lambda N(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\}.$$

Аналогичная оценка для суммы S_1 справедлива и для случая, когда $d_N \to \infty$. Отсюда, из леммы 2 и явного выражения для суммы S_2 следует, что при $N \to \infty$ и при достаточно больших значениях B справедливо, что

$$S_1 = o(S_2). \qquad (16)$$

Аналогично тому, как получено соотношение (16), из теоремы 1, леммы 2 и (9) можно показать, что при $N \to \infty$ и достаточно больших значениях B выполнено неравенство:

$$S_3 \leqslant C_5 \sum_{l_N \in K_3} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} \Big(\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1},$$

$$\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = 0\} p(d_N; 0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{A} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} p(d_N; k) \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_6 d_N! d_{N-1}!}{(N\lambda)^m m!(d_N - m)!(d_{N-1})!} \sum_{l_N > N\lambda + B\sqrt{N\lambda(1-p)}} \mathbf{P}\{\eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} = o(S_2).$$

Отсюда, из соотношений (10), (16) и выражения для суммы S_2 следует утверждение теоремы 3.

Докажем теорему 4. Используя формулу полной вероятности, имеем, что при $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m\} = \sum_{\substack{d_N \geqslant m,\\ d_N = o(N^a)}} \sum_{\substack{d_N \geqslant m,\\ d_N = o(N^a)}} \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\xi_N = d_N\} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = d_{N-1}\}.$$

Тогда из теоремы 3 и равенства (1) следует, что при $N \to \infty$ и $m = 1, 2, \ldots$ справедливо

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m\} = \frac{1 + o(1)}{m!(\lambda N)^m} \sum_{\substack{d_N \geqslant m,\\ d_N = o(N^a)}} \frac{d_N!}{(d_N - m)!} \mathbf{P}\{\xi_N = d_N\} \times$$

$$\times \sum_{\substack{d_N \geqslant m,\\ d_N = o(N^a)}} \frac{d_{N-1}!}{(d_{N-1} - m)!} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = d_{N-1}\} = \frac{1 + o(1)}{m!(\lambda N)^m} (\mathbf{E}[\xi]^m)^2,$$

а при $m = 0$ получаем, что

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = 0\} = (1 + o(1)) \sum_{\substack{d_N, d_{N-1} \geqslant 0, \\ d_N, d_{N-1} = o(N^a)}} \mathbf{P}\{\xi_N = d_N\} = \ (1 + o(1)).$$

Теорема 4 доказана.

Следствия 2 и 3 непосредственно следуют из утверждения теоремы 3, следствие 4 вытекает из теоремы 4, используя следующие соотношения

$$\mathbf{P}\{K\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{K}\} \geqslant \\ \geqslant 1 - N\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} > 0\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13–01–00009, и Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

Литература

1. *Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа петель и кратных ребер одной вершины конфигурационного графа // European Reserсher (в печати).

2. *Bender E. A., Canfield E. R.* The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 1978. Vol. 24, Iss. 3. P. 296–307.

3. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labeled regular graphs // European Journal of Combinatorics. 1980. Vol. 1. P. 311–316.

4. *Erdös P., Rènyi A.* On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1960. Vol. 5. P. 17–61.

5. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.

6. *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random graphs. New York: Wiley, 2000. 348 p.

7. *Hofstad R., Hooghiemsra G., Znamenski D.* Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees // Electronic Journal of Probability. 2007. Vol. 12. P. 703–766.

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.

9. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Physical Review E. 2001. 64. 026118.

10. *Pavlov Yu. L.* On power-law random graphs and branching processes // Proceedings of the Eight International Conference CDAM. Minsk: Publishing center BSU. 2007. Vol. 1. P. 92–98.

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370